Государственное бюджетное
профессиональное образовательное учреждение
«Кунгурский колледж агротехнологий и управления»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
К ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
ЕН.02 МАТЕМАТИКА

по специальности 35.02.05 Агрономия

базовой подготовки

2023 г.

Рассмотрено и одобрено
на заседании методической комиссии
естественнонаучных дисциплин
Протокол № __1_
от 30 августа 2023 г.
Председатель МК
____________ В.Н. Чернышёва

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора
____

Методические рекомендации по выполнению практических работ составлены в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины ЕН.02 Математика

Организация-разработчик: **государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение «Кунгурский колледж агротехнологий и управления»**

Составитель:
Волкова О.В. преподаватель

Ф.И.О., должность

Пояснительная записка

Методические рекомендации к выполнению практических работ по дисциплине «ЕН 02. Математика» предназначены для организации самостоятельной работы обучающихся первого курса очного отделения специальности 35.02.05 Агрономия на уроке.

Учебным планом на изучение дисциплины отводится 124 часа, в том числе практические занятия – 54 часа. Практические занятия являются важной формой образовательного процесса и направлены на экспериментальное подтверждение теоретических положений и формирование учебных и профессиональных практических умений, они составляют важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки.

Перед выполнением практической работы преподавателем проводится инструктаж, который включает цель задания, его содержание, время выполнения, основные требования к результатам работы, критерии оценки выполнения задания. Выполнению практических занятий предшествует проверка знаний студентов - их теоретической готовности к выполнению задания. Практические занятия носят репродуктивный характер. Работы, носящие репродуктивный характер, отличаются тем, что при их проведении студенты пользуются подробными инструкциями, в которых указаны: цель работы, пояснения (теория, основные характеристики), порядок выполнения работы.

Критерии оценивания при выполнении практической работы:

Процент результативности (%)	**Оценка уровня подготовки**	**Оценка**
91 – 100	отлично	5
70 - 90	хорошо	4
50 - 69	удовлетворительно	3
Менее 50	неудовлетворительно	2

Время выполнения практической работы составляет 90 минут.
В процессе инструктажа преподаватель обращает внимание обучающихся на возможные встречающиеся типичные ошибки.

Практическая работа №1

Практическая работа №1: Вычисление пределов функций. «Раскрытие неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$»

Цель работы: научиться раскрывать неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, путем разложения на множители.

Способы разложения на множители:

1) Вынесение общего множителя за скобку: $ax^2 + bx = x(ax + b)$

2) Формулы сокращенного умножения:
- Разность квадратов $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$
- Сумма и разность кубов $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

3) Разложение квадратного трехчлена на множители:
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1, x_2 корни квадратного уравнения

4) Способ группировки
- Образовать группы, между ними знак «+»,
- В каждой группе вынести общий множитель за скобки,
- Найти и вынести за скобки общий множитель обеих групп, в результате получим произведение множителей.

Разбор решения одного варианта:

1. $\lim\limits_{x\to 15} \dfrac{15x - x^2}{225 - x^2}$;

2. $\lim\limits_{x\to 10} \dfrac{x^2 - 13x + 30}{100 - x^2}$;

3. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2x^2 + 2x - 40}{8x - 2x^2}$;

4. $\lim\limits_{x\to -11} \dfrac{x^3 - 121x}{x^2 + 22x + 121}$;

5. $\lim\limits_{x\to 10} \dfrac{1000 - x^3}{x^2 - 9x - 10}$;

6. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^3 - 16x - x^2 + 16}{x^3 - 5x^2 + 4x}$;

7. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x^3 - 9x - x^2 + 9}$;

Решение:

1) $\lim\limits_{x\to 15} \dfrac{15x - x^2}{225 - x^2} =$

подстановка предельного значения $x = 15$ дает неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Чтобы раскрыть эту неопределенность надо разложить числитель и знаменатель на множители. В числителе вынесем общий множитель «x» за скобку, в знаменателе заметим, что $225 = 15^2$ и применим формулу разность квадратов

$$= \lim_{x\to 15} \frac{x(15 - x)}{15^2 - x^2} = \lim_{x\to 15} \frac{x(15 - x)}{(15 - x)(15 + x)} =$$

сократим на множитель, приводящий к неопределенности, это х-15

$$\lim_{x\to 15} \frac{x}{15 + x} =$$

подстановка предельного значения $x = 15$ дает

$$= \frac{15}{15 + 15} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}.$$

2) $\lim\limits_{x\to 10} \dfrac{x^2 - 13x + 30}{100 - x^2} = \left(\dfrac{0}{0}\right) =$

разложим числитель и знаменатель на множители:
В числителе разложим квадратный трехчлен на множители по формуле
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1, x_2 − корни квадратного уравнения

$$x^2 - 13x + 30 = 1(x - \quad)(x - \quad)$$

Найдем корни квадратного уравнения $x^2 - 13x + 30 = 0$

$D = b^2 - 4ac$

$D = 169 - 4 \cdot 1 \cdot 30 = 169 - 120 = 49, \quad \sqrt{D} = 7$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{13 \pm 7}{2}: \quad x_1 = \frac{13+7}{2} = \frac{20}{2} = 10, \quad x_2 = \frac{13-7}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Заполним разложение:

$x^2 - 13x + 30 = (x - 10)(x - 3)$

в знаменателе 100 это $10^2 \Longrightarrow$ формула $a^2 - b^2$, получим

$$= \lim_{x \to 10} \frac{(x-10)(x-3)}{(10-x)(10+x)} =$$

в первом множителе вынесем минус, тогда $x - 10 = -(10 - x)$

$$= \lim_{x \to 10} \frac{-(10-x)(x-3)}{(10-x)(10+x)} = \text{сократим на } (10 - \mathrm{x})$$

$$= \lim_{x \to 10} \frac{-(x-3)}{(10+x)} = \text{подстановка } x = 10:$$

$$= \frac{-(10-3)}{(10+10)} = -\frac{7}{20}.$$

3). $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2x^2 + 2x - 40}{8x - 2x^2} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2(x - \quad)(x - \quad)}{2x(4-x)} =$ сократим на 2:

$$= \lim_{x \to 4} \frac{(x - \quad)(x - \quad)}{x(4-x)} =$$

решим квадратное уравнение $2x^2 + 2x - 40 = 0$

$D = 4 - 4 \cdot 2(-40) = 4 + 320 = 324, \quad \sqrt{D} = 18$

$x_1 = \frac{-2+18}{2 \cdot 2} = \frac{16}{4} = 4, \quad x_2 = \frac{-2-18}{2 \cdot 2} = \frac{-20}{4} = -5$ тогда

$$= \lim_{x \to 4} \frac{(x-4)(x+5)}{x(4-x)} = \lim_{x \to 4} \frac{(x-4)(x+5)}{-x(x-4)} = \lim_{x \to 4} \frac{x+5}{-x} = \frac{4+5}{-4} = -\frac{9}{4}.$$

4). $\lim\limits_{x \to -11} \dfrac{x^3 - 121x}{x^2 + 22x + 121} = \left(\dfrac{0}{0}\right) =$

В числителе вынесем общий множитель «х» за скобки, причем заметим, что 121=11^2, и применим формулу разность квадратов $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

А в знаменателе увидим формулу сокращенного умножения : квадрат первого , минус удвоенное произведение первого на второе, плюс квадрат второго

$$\lim_{x \to -11} \frac{x(x^2 - 121)}{x^2 - 2 \cdot x \cdot 11 + 11^2} = \lim_{x \to -11} \frac{\mathrm{x}(\mathrm{x} - 11)(\mathrm{x} + 11)}{(\mathrm{x} - 11)^2} =$$

Сократим на множитель (x-11)

$$= \lim_{x \to -11} \frac{\mathrm{x}(\mathrm{x} + 11)}{\mathrm{x} - 11} =$$

Подставив предельное значение $\mathrm{x} = -11$, получим

$$= \frac{-11 \cdot 0}{-22} = 0$$

5) $\lim\limits_{x \to 10} \dfrac{1000 - x^3}{x^2 - 9x - 10} = \left(\dfrac{0}{0}\right) =$

В числителе применим формулу разность кубов $a^3 - b^3 - (a-b)(a^2 + ab + b^2)$, а в знаменателе разложим квадратный трехчлен на множители

$= \lim\limits_{x\to10} \dfrac{10^3 - x^3}{(x- \ )(x- \ )}$ = для этого найдем корни квадратного уравнения:

$x^2 - 9x - 10 = 0$

$D = 81 - 4\cdot1\cdot(-10) = 81 + 40 = 121 \qquad \sqrt{D} = 11$

$x_1 = \frac{9+11}{2} = \frac{20}{2} = 10; \qquad x_2 = \frac{9-11}{2} = \frac{-2}{2} = -1$, тогда

$$= \lim_{x\to10} \frac{(10-x)(10^2 + 10x + x^2)}{(x-10)(x+1)} =$$

Заметим что $10 - \mathrm{x} = -(\mathrm{x} - 10)$,

$$= \lim_{x\to10} \frac{-(x-10)(100 + 10x + x^2)}{(x-10)(x+1)} =$$

сократим на $x - 10$ и подставим $x = 10$, получим

$$= \lim_{x\to10} \frac{-(100 + 10x + x^2)}{(x+1)} = \frac{-(100+100+100)}{10+1} = \frac{-300}{11} = -27\frac{3}{11}.$$

6) $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{x^3 - 16x - x^2 + 16}{x^3 - 5x^2 + 4x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) =$

в числителе разложим на множители способом группировки

$(x^2 - 16x) + (-x^2 + 16) = x(x^2 - 16) - (x^2 - 16) = (x^2 - 16)(x - 1) =$
$= (x^2 - 4^2)(x-1) = (x-4)(x+4)(x-1)$

А в знаменателе вынесем за скобки общий множитель «х»

$$= \lim_{x\to4} \frac{(x-4)(x+4)(x-1)}{x(x^2 - 5x + 4)} =$$

А затем разложим квадратный трехчлен на множители:

$$\lim_{x\to4} \frac{(x-4)(x+4)(x-1)}{x(x- \ )(x- \ )} =$$

для этого решим квадратное уравнение $\quad x^2 - 5x + 4 = 0$

$D = 25 - 4\cdot1\cdot4 = 25 - 16 = 9; \qquad \sqrt{D} = 3$

$x_{1,2} = \dfrac{5 \pm 3}{2}; \qquad x_1 = \dfrac{5+3}{2} = 4; \qquad x_2 = \dfrac{5-3}{2} = 1.$

$$= \lim_{x\to4} \frac{(x-4)(x+4)(x-1)}{x(x-4)(x-1)} =$$

сократим на $(x-4)(x-1)$ и подставим $\mathrm{x} = 4$

$$= \lim_{x\to4} \frac{x+4}{x} = \frac{8}{4} = 2.$$

7) $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x^3 - 9x - x^2 + 9} = \left(\dfrac{0}{0}\right) =$

<u>в числителе</u> вынесем x за скобку $\qquad x^3 + 2x^2 - 3x = x(x^2 + 2x - 3)$ и разложим квадратный трехчлен на множители, $\quad x(x^2 + 2x - 3) = x(x- \ )(x- \ )$

для этого найдем корни квадратного уравнения

$x^2 + 2x - 3 = 0; \;\; D = 4 - 4\cdot1\cdot(-3) = 4 + 12 = 16; \qquad \sqrt{D} = 4;$

$x_1 = \dfrac{-2+4}{2} = \dfrac{2}{2} = 1; \qquad x_2 = \dfrac{-2-4}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3; \qquad$ получим

$x(x^2 + 2x - 3) = x(x-1)(x+3)$, а <u>в знаменателе</u> сгруппируем

$(x^3 - 9x) + (-x^2 + 9)$ в первой группе вынесем x, а во второй $\ll -1 \gg$

$x(x^2 - 9) - (x^2 - 9)$ общий множитель обеих групп $x^2 - 9$ вынесем за скобки

$(x^2 - 9)(x-1) = (x^2 - 3^2)(x-1) = (x-3)(x+3)(x-1)$ тогда

$$= \lim_{x\to-3} \frac{x(x-1)(x+3)}{(x-3)(x+3)(x-1)} =$$

сократим числитель и знаменатель на $(x-1)(x+3)$ и подставим предельное значение x $=-3$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{x}{x-3}=\frac{-3}{-3-3}=\frac{-3}{-6}=\frac{1}{2}.$$

Вариант 1	Вариант 2
1. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2+x-2}{x^2-4}$;	1. $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2+x-6}$;
2. $\lim\limits_{x\to-5}\frac{x^2-25}{x^2+9x+20}$;	2. $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+2x-8}{x^2-4}$;
3. $\lim\limits_{x\to-3}\frac{9-x^2}{3x-x^2}$;	3. $\lim\limits_{x\to5}\frac{5x-x^2}{25-x^2}$;
4. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$;	4. $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2+6x+9}{x^2-9}$;
5. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-x-2x^2+2}{x^3-2x^2+3x}$;	5. $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^3-9x-x^2+9}{x^3-4x^2+3x}$;
6. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x^2-7x+3}{2x^2-x}$;	6. $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{5}}\frac{5x^2-9x-2}{5x^2+x}$;
7. $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-8}{x-2}$;	7. $\lim\limits_{x\to3}\frac{x-3}{x^3-27}$;

Практическая работа № 2 «Раскрытие неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$»

Цель работы: научиться раскрывать неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, вызванную присутствием корня.

Теоретическая часть:

Сопряженными называются множители $(a-b)$ и $(a+b)$, причем их произведение дает формулу разность квадратов $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

Согласно свойств степени и корня: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$

Пример 1: $\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{7}\right)=\left(\sqrt{x+3}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2$$=x+3-7=x-4$

Пример2:

$$\left(\sqrt{x^2-4}-3x\right)\left(\sqrt{x^2-4}+3x\right)=\left(\sqrt{x^2-4}\right)^2-(3x)^2=x^2-4-9x^2$$
$$=-8x^2-4$$

Разбор решения одного варианта:

1. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\sqrt{x+9}-\sqrt{7}}{x+2}$;	4. $a)\ \lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{x^2-4}-\sqrt{3x}}{x-4}$;
2. $\lim\limits_{x\to15}\frac{\sqrt{x+10}-5}{x-15}$;	$b)\ \lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+4x-4}-\sqrt{x}}$;
3. $a)\ \lim\limits_{x\to36}\frac{x^2-36x}{\sqrt{x-11}-5}$;	5. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sqrt{3x+4}+x}{x+1}$;
$b)\ \lim\limits_{x\to50}\frac{\sqrt{x-1}-7}{x^2-2500}$;	

1. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{x+9}-\sqrt{7}}{x+2}$ подстановка предельного значения $x=-2$ в числитель

$\lim\limits_{x\to-2}\sqrt{x+9}-\sqrt{7}=0,$

предел знаменателя дает

$\lim\limits_{x\to-2}x+2=0,$

то имеет место неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, которая вызвана присутствием корня. Раскроем неопределенность умножением числителя и знаменателя на сопряженный множитель к числителю

$$=\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{x+9}-\sqrt{7}}{x+2}\cdot\frac{\sqrt{x+9}-\sqrt{7}}{\sqrt{x+9}-\sqrt{7}},$$

применив в числителе формулу разность квадратов

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2,$ имеем:

$$\lim_{x\to-2}\frac{\left(\sqrt{x+9}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}{(x+2)\left(\sqrt{x+9}+\sqrt{7}\right)}=$$

при возведении квадратного корня в квадрат корень исчезает

$$=\lim_{x\to-2}\frac{x+9-7}{(x+2)\left(\sqrt{x+9}+\sqrt{7}\right)}=\lim_{x\to-2}\frac{x+2}{(x+2)\left(\sqrt{x+9}+\sqrt{7}\right)}=$$

сократив на $(x+2)$ - множитель, приводящий к неопределенности и подставив предельное значение $x=-2$, имеем

$$=\lim_{x\to-2}\frac{1}{\sqrt{x+9}+\sqrt{7}}=\frac{1}{\sqrt{-2+9}+\sqrt{7}}=\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{7}}=\frac{1}{2\sqrt{7}}.$$

2. $\lim\limits_{x\to15}\dfrac{\sqrt{x+10}-5}{x-15}=$

подстановка $x=15$ дает неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, вызванную присутствием корня, поэтому умножаем на сопряженный множитель к числителю

$$=\lim_{x\to15}\frac{\sqrt{x+10}-5}{x-15}\cdot\frac{\sqrt{x+10}+5}{\sqrt{x+10}+5},$$

применив в числителе, формулу разность квадратов $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$$=\lim_{x\to15}\frac{\left(\sqrt{x+10}\right)^2-5^2}{(x-15)\left(\sqrt{x+10}+5\right)}=\lim_{x\to15}\frac{x+10-25}{(x-15)\left(\sqrt{x+10}+5\right)}$$

Посчитав, в числителе подобные, имеем

$$=\lim_{x\to15}\frac{x-15}{(x-15)\left(\sqrt{x+10}+5\right)}=$$

Сократим числитель и знаменатель на множитель x-15

$$=\lim_{x\to15}\frac{1}{\sqrt{x+10}+5}=$$

подставим предельное значение $x=15$, тогда

$$=\frac{1}{\sqrt{25}+5}=\frac{1}{5+5}=\frac{1}{10}.$$

3. $a)$ $\lim\limits_{x\to36}\dfrac{x^2-36x}{\sqrt{x-11}-5}=$

подстановка предельного значения $x=36$ дает неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, умножаем числитель и знаменатель на сопряженный множитель к знаменателю

$$= \lim_{x\to 36} \frac{x^2-36x}{\sqrt{x-11}-5}\cdot\frac{\sqrt{x-11}+5}{\sqrt{x-11}+5} =$$

в знаменателе формула разность квадратов a^2-b^2

$$= \lim_{x\to 36} \frac{(x^2-36x)\left(\sqrt{x-11}\ +5\right)}{\left(\sqrt{x-11}\right)^2-5^2} = \lim_{x\to 36} \frac{(x^2-36x)\left(\sqrt{x-11}\ +5\right)}{x-11-25} =$$

вынесем в числителе общий множитель «x» за скобку, а в знаменателе вычислим

$$= \lim_{x\to 36} \frac{x(x-36)\left(\sqrt{x-11}\ +5\right)}{x-36} =$$

сократим на $(x-36)$ и подставим предельное значение $x=36$, имеем

$$= \lim_{x\to 36} x\left(\sqrt{x-11}\ +5\right) = 36\left(\sqrt{36-11}+5\right) = 36\left(\sqrt{25}+5\right) = 36\cdot 10 = 360.$$

3. $b)$ $\lim\limits_{x\to 50} \dfrac{\sqrt{x-1}-7}{x^2-2500} = \left(\dfrac{0}{0}\right) =$

умножаем числитель и знаменатель на сопряженный $\sqrt{x-1}+7$,
в знаменателе применим формулу разность квадратов, т.к. 2500 = 50^2

$$= \lim_{x\to 50} \frac{\sqrt{x-1}-7}{(x-50)(x+50)}\cdot\frac{\sqrt{x-1}+7}{\sqrt{x-1}+7} = \lim_{x\to 50} \frac{\left(\sqrt{x-1}\right)^2-7^2}{(x-50)(x+50)\left(\sqrt{x-1}+7\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 50} \frac{x-1-49}{(x-50)(x+50)\left(\sqrt{x-1}+7\right)} = \lim_{x\to 50} \frac{x-50}{(x-50)(x+50)\left(\sqrt{x-1}+7\right)} =$$

сократим на множитель $x-50$ и подставим $x=50$

$$= \lim_{x\to 50} \frac{1}{(x+50)\left(\sqrt{x-1}+7\right)} = \frac{1}{(50+50)\left(\sqrt{50-1}+7\right)} = \frac{1}{100\left(\sqrt{49}+7\right)} == \frac{1}{10\cdot 14}$$

$$= \frac{1}{140}.$$

4. $a)$ $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x^2-4}-\sqrt{3x}}{x-4} = \left(\dfrac{0}{0}\right) =$

умножаем на сопряженный к числителю, а затем в числителе применяем формулу разность квадратов a^2-b^2:

$$= \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x^2-4}-\sqrt{3x}}{x-4}\cdot\frac{\sqrt{x^2-4}+\sqrt{3x}}{\sqrt{x^2-4}+\sqrt{3x}} = \lim_{x\to 4} \frac{\left(\sqrt{x^2-4}\right)^2-\left(\sqrt{3x}\right)^2}{(x-4)\left(\sqrt{x^2-4}+\sqrt{3x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{x^2-4-3x}{(x-4)\left(\sqrt{x^2-4}+\sqrt{3x}\right)} = \lim_{x\to 4} \frac{x^2-3x-4}{(x-4)\left(\sqrt{x^2-4}+\sqrt{3x}\right)} =$$

в числителе квадратный трехчлен, разложим на множители по формуле:
$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1,x_2- корни квадратного уравнения

$$= \lim_{x\to 4} \frac{(x-\quad)(x-\quad)}{(x-4)\left(\sqrt{x^2-4}+\sqrt{3x}\right)} =$$

для этого найдем корни квадратного уравнения $x^2-3x-4=0$

$D=b^2-4ac=9-4\cdot 1\cdot(-4)=9+16=25,\quad \sqrt{D}=5$

$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{3\pm 5}{2}$; $\qquad x_1=\dfrac{3+5}{2}=\dfrac{8}{2}=4;\quad x_2=\dfrac{3-5}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1,$ тогда

$$= \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(x+1)}{(x-4)\left(\sqrt{x^2-4}+\sqrt{3x}\right)} =$$

сократим на $(x-4)$ и подставим $x=4$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-4}+\sqrt{3x}} = \frac{4+1}{\sqrt{4^2-4}+\sqrt{3\cdot 4}} = \frac{5}{\sqrt{12}+\sqrt{12}} = \frac{5}{2\sqrt{12}} = \frac{5}{2\sqrt{4\cdot 3}} =$$
$$= \frac{5}{2\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}} = \frac{5}{2\cdot 2\sqrt{3}} = \frac{5}{4\sqrt{3}}.$$

$b)$ $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+4x-4}-\sqrt{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) =$

подстановка $x = 1$ дает неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$, вызванную присутствием корнем ⇒ умножим на сопряженный $\sqrt{x^2+4x-4}+\sqrt{x}$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x^2-1)}{\sqrt{x^2+4x-4}-\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+4x-4}+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+4x-4}+\sqrt{x}} =$$

в числителе разложим по формуле разность квадратов, в знаменателе свернем по формуле разность квадратов a^2-b^2, затем приведем в знаменателе подобные получаем трехчлен, который тоже надо разложить:

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x^2+4x-4}+\sqrt{x})}{\left(\sqrt{x^2+4x-4}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2} =$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x^2+4x-4}+\sqrt{x})}{x^2+4x-4-x} =$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x^2+4x-4}+\sqrt{x})}{x^2+3x-4} =$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x^2+4x-4}+\sqrt{x})}{(x-\ )(x-\ )}$$

$x^2+3x-4=0;\ D=b^2-4ac=9-4\cdot 1(-4)=9+16=25,\quad \sqrt{D}=5$

$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a} = \frac{-3\pm 5}{2}\ ;\quad x_1 = \frac{-3-5}{2} = \frac{-8}{2} = -4;\qquad x_2 = \frac{-3+5}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x^2+4x-4}+\sqrt{x})}{(x+4)(x-1)} =$$

Сократив на $(x-1)$, подставим предельное значение $x = 1$

$$= \frac{(1+1)\left(\sqrt{1+4-4}+\sqrt{1}\right)}{1+4} = \frac{2\cdot 2}{5} = \frac{4}{5}.$$

Вариант 1	Вариант 2
1. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$;	1. $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}{x-2}$;
2. $\lim_{x\to 11} \frac{\sqrt{x+5}-4}{x-11}$;	2. $\lim_{x\to 21} \frac{\sqrt{x-5}-4}{x-21}$;
3. $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{\sqrt{x-4}-1}$;	3. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-x}{\sqrt{4-x}-2}$;
4. $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{3x}}$;	4. $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+6}-\sqrt{5x}}{x-2}$;
5. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2-x}-x}{x-1}$;	5. $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+6}-x}$;

Практическая работа № 3: «Вычисление предела при $x \to \infty$»

Цель работы: научиться вычислять пределы при $x \to \infty$, в том числе путем раскрытия неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$ и $\infty - \infty$».

Теоретическая часть:

1. Предел бесконечно малой равен нулю.
2. Если предел величины равен нулю, то эта величина есть бесконечно малая.
3. Предел бесконечно большой величины равен бесконечности.
4. Если x - величина бесконечно малая, то обратная ей величина $\frac{1}{x}$ является бесконечно большой.
5. Если x - величина бесконечно большая, то обратная ей величина $\frac{1}{x}$ является бесконечно малой.
6. Предел числа есть само число.
7. Произведение постоянной величины на бесконечно малую есть величина бесконечно малая.

Разбор решения одного варианта:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} x^4 - 2x^3 - 1$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4}{15x-2}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-7x}{3-5x}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x-5}{6x^2-11}$

5) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^6-5x^3-2}{7x^3-1}$

6) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^9-6x^3-1}{4x^3-9x^9}$

7) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-16} - x\right)$

8) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-4x+3} - \sqrt{x^2-2x+8}\right)$

1) $\lim\limits_{x\to\infty} x^4 - 2x^3 - 1 =$ первые два слагаемых при $x \to \infty$ пределов не имеют, поэтому имеет место неопределенность $(\infty - \infty)$, чтобы её раскрыть, надо вынести за скобку большую степень переменной, входящей в пример:

$$= \lim_{x\to\infty} x^4\left(\frac{x^4}{x^4} - \frac{2x^3}{x^4} - \frac{1}{x^4}\right) = \lim_{x\to\infty} x^4\left(1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^4}\right) = \lim_{x\to\infty} x^4 \cdot \lim_{x\to\infty}\left(1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^4}\right) =$$

при $x \to \infty$, величины $\frac{2}{x}$, $\frac{1}{x^4}$ – бесконечно малые и их педелы равны нулю,

$= \infty \cdot (1 - 0 - 0) = \infty.$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4}{15x-2} =$

при x → ∞ предел знаменателя есть величина бесконечно большая, тогда обратная ей функция $\frac{1}{15x-2}$ – есть величина бесконечно малая значит. Произведение бесконечно малой на ограниченную величину $4 \cdot \frac{1}{15x-2}$ - есть бесконечно малая, т.е. предел равен нулю $= 0$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-7x}{3-5x} =$

предел числителя и предел знаменателя есть величины бесконечно большие ⟹ имеет место неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, раскроем её делением числителя и знаменателя на наибольшую степень переменной т.е. на x и сократим, тогда

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{7x}{x}}{\frac{3}{x} - \frac{5x}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x} - 7}{\frac{3}{x} - x} =$$

помня, что при $x \to \infty$, $\frac{1}{x} \to 0$, $\frac{3}{x} \to 0$, имеем

$$= \frac{0-7}{0-5} = \frac{-7}{-5} = \frac{7}{5}.$$

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x-5}{6x^2-11} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

делим каждое слагаемое на x^2 и сократим

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4x}{x^2} - \frac{5}{x^2}}{\frac{6x^2}{x^2} - \frac{11}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4}{x} - \frac{5}{x^2}}{6 - \frac{4}{x^2}} =$$

так как при x → ∞, $\frac{4}{x} \to 0$, $\frac{5}{x^2} \to 0$, $\frac{4}{x^2} \to 0$ имеем:

$$= \frac{0-0}{6-0} = \frac{0}{6} = 0.$$

5) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^6 - 5x^3 - 2}{7x^3 - 1} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

делим числитель и знаменатель на старшую степень переменной, это x^6:

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4 - \frac{5}{x^3} - \frac{2}{x^6}}{\frac{7}{x^3} - \frac{1}{x^6}} =$$

при $x \to \infty$, $\frac{5}{x^3} \to 0$, $\frac{2}{x^6} \to 0$, $\frac{7}{x^3} \to 0$, $\frac{1}{x^6} \to 0$, тогда предел числителя равен 4, предел знаменателя равен 0, т.е. в знаменателе бесконечно малая величина ⟹ вся дробь есть величина бесконечно большая, т.е. = ∞.

$$= \left(\frac{4-0-0}{0-0}\right) = \left(\frac{4}{0}\right) = \infty.$$

6) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^9 - 6x^3 - 1}{4x^3 - 9x^9} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

делим числитель и знаменатель на x^9:

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{5 - \frac{6}{x^3} - \frac{1}{x^9}}{\frac{4}{x^3} - 9} =$$

при $x \to \infty$, $\frac{6}{x^3} \to 0$, $\frac{1}{x^9} \to 0$, $\frac{4}{x^3} \to 0$, предел числа равен самому числу:

$$= \frac{5-0-0}{0-9} = \frac{5}{-9} = -\frac{5}{9}.$$

7) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-16} - x\right) =$

функция представляет собой разность бесконечно больших величин$(\infty - \infty)$.

умножим числитель и знаменатель на сопряженный множитель $\sqrt{x^2-16} + x$:

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-16} - x}{1} \cdot \frac{\sqrt{x^2-16} + x}{\sqrt{x^2-16} + x} =$$

по формуле разность квадратов

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-16}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2-16} + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 16 - x^2}{\sqrt{x^2-16} + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-16}{\sqrt{x^2-16} + x}$$

при $x \to \infty$, знаменатель есть бесконечно большая величина ⟹ вся дробь есть бесконечно малая, т.е. = 0.

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-2x+8}\right)=(\infty-\infty)=$

умножим на сопряженный

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-2x+8}\right)}{1}\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-2x+8}\right)}{\left(\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-2x+8}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-4x+3}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-2x+8}\right)^2}{\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-2x+8}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+3-(x^2-2x+8)}{\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-2x+8}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+3-x^2+2x-8}{\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-2x+8}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x-5}{\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-2x+8}}=$$

при $x\to\infty$, имеем $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, раскроем путем деления на x, т.к. $\sqrt{x^2}=x$:

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{2x}{x}-\frac{5}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x}+\frac{\sqrt{x^2-2x+8}}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2-\frac{5}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{8}{x^2}}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2-\frac{5}{x}}{\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}}}=$$

при $x\to\infty$, $\frac{4}{x}\to0$, $\frac{3}{x^2}\to0$, $\frac{2}{x}\to0$, $\frac{8}{x^2}\to0$, тогда:

$$=\frac{-2-0}{\sqrt{1-0+0}+\sqrt{1-0+0}}=\frac{-2}{1+1}=-1.$$

Вариант 1	Вариант 2
1. $\lim\limits_{x\to\infty}\cdot\frac{2x-3}{4x-1}$;	1. $\lim\limits_{x\to\infty}\cdot\frac{7x-1}{2x-3}$;
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\cdot\frac{2x-1}{4x^2-1}$;	2. $\lim\limits_{x\to\infty}\cdot\frac{7x^2-1}{5x+1}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\cdot\frac{5x^3+3x-1}{4+x}$;	3. $\lim\limits_{x\to\infty}\cdot\frac{4x+5}{2x^3-1}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\cdot\frac{7x^3-2x+1}{4x^3-x}$;	4. $\lim\limits_{x\to\infty}\cdot\frac{7x^4-2x}{x+5x^4}$;
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\cdot\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)$;	5. $\lim\limits_{x\to\infty}\cdot\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$;
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\cdot\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}$.	6. $\lim\limits_{x\to\infty}\cdot\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$.

Практическая работа № 4: «Первый замечательный предел»

Цель работы: научится раскрывать неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ с помощью первого замечательного предела, вычислять пределы, содержащие тригонометрические функции.

Теоретическая часть:

Предел отношения синуса бесконечно малого угла к самому углу, есть величина постоянная, равная единице, т.е.

$$\lim_{p\to 0}\frac{sin\,p}{p}=0 \quad \text{или} \quad \lim_{p\to 0}\frac{p}{sin\,p}=1$$

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{18x}{sin\,x}$	5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{10}}{sin\,9x}$
2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin\,25x}{x}$	6) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\sqrt{121-ctg\,x}-11}{ctg\,x}$
3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{15x}{sin\,17x}$	7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin\frac{x}{2}+sin\,11x}{3x}$
4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin^3\,7x}{x^3}$	8) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{x^2-100}{sin(10-x)}$

Решение одного варианта:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{18x}{sin\,x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$ постановка $x=0$ дает неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, которую надо раскрыть с помощью первого замечательного предела:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{18}{1}\cdot\frac{x}{sin\,x}=\lim_{x\to 0}18\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{sin\,x}=18\cdot 1=18$$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin\,25x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$ используем первый замечательный предел,

Для этого умножим на $\frac{25}{25}$ и перегруппируем множители:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin\,25x}{x}\cdot\frac{25}{25}=\lim_{x\to 0}\frac{sin\,25x}{25x}\cdot\frac{25}{1}=1\cdot 25=25.$$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{15x}{sin\,17x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$ умножим на $\dfrac{17}{17}$ и перегруппируем $=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{15x}{sin\,17x}\cdot\frac{17}{17}=\lim_{x\to 0}\frac{17x}{sin\,17x}\cdot\frac{15}{17}=1\cdot\frac{15}{17}=\frac{15}{17}.$$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin^3\,7x}{x^3}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

используем первый замечательный предел три раза:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{sin\,7x}{x}\cdot\frac{sin\,7x}{x}\cdot\frac{sin\,7x}{x}=$$

умножим каждую дробь на $\frac{7}{7}$ и перегруппируем множители, тогда

$$=\lim_{x\to 0}\frac{sin\,7x}{x}\cdot\frac{7}{7}\cdot\frac{sin\,7x}{x}\cdot\frac{7}{7}\cdot\frac{sin\,7x}{x}\cdot\frac{7}{7}=\lim_{x\to 0}\frac{sin\,7x}{7x}\cdot\frac{7}{1}\cdot\frac{sin\,7x}{7x}\cdot\frac{7}{1}\cdot\frac{sin\,7x}{7x}\cdot\frac{7}{1}=$$

$$=1\cdot 7\cdot 1\cdot 7\cdot 1\cdot 7=7^3=343.$$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{10}}{sin\,9x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

Неопределенность вызвана присутствием корня $\Longrightarrow$ умножим числитель и знаменатель на сопряженный множитель $\frac{\sqrt{x+10}+\sqrt{10}}{\sqrt{x+10}+\sqrt{10}}$, тогда

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+10}-\sqrt{10}}{sin\,9x}\cdot\frac{\sqrt{x+10}+\sqrt{10}}{\sqrt{x+10}+\sqrt{10}}=$$

в числителе свернем по формуле разность квадратов $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+10}\right)^2-\left(\sqrt{10}\right)^2}{sin\,9x\cdot\left(\sqrt{x+10}+\sqrt{10}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+10-10}{sin\,9x\cdot\left(\sqrt{x+10}+\sqrt{10}\right)}=$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{sin\, 9x \cdot \left(\sqrt{x+10} + \sqrt{10}\right)} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

Для раскрытия неопределенности применим первый замечательный предел: умножим на $\frac{9}{9}$ и перегруппируем множители:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{sin\, 9x \cdot \left(\sqrt{x+10} + \sqrt{10}\right)} \cdot \frac{9}{9} = \lim_{x\to 0} \frac{9x}{sin\, 9x} \cdot \frac{1}{9\left(\sqrt{x+10} + \sqrt{10}\right)} =$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{9\left(\sqrt{10} + \sqrt{10}\right)} = \frac{1}{9 \cdot 2\sqrt{10}} = \frac{1}{18\sqrt{10}}$$

6) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{121 - ctg\, x} - 11}{ctg\, x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$

умножим на сопряженный множитель и применим формулу разность квадратов:

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{121 - ctg\, x} - 11}{ctg\, x} \cdot \frac{\sqrt{121 - ctg\, x} + 11}{\sqrt{121 - ctg\, x} + 11} =$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\left(\sqrt{121 - ctg\, x}\right)^2 - 11^2}{ctg\, x\left(\sqrt{121 - ctg\, x} + 11\right)} =$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{121 - ctg\, x - 121}{ctg\, x\left(\sqrt{121 - ctg\, x} + 11\right)} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{-ctg\, x}{ctg\, x\left(\sqrt{121 - ctg\, x} + 11\right)} =$$

сократим на $ctg\, x$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{121 - ctg\, x} + 11} = (\text{постановка } x = \frac{\pi}{2})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{121 - ctg\, \frac{\pi}{2}} + 11} = \frac{1}{\sqrt{121 - 0} + 11} = \frac{1}{11 + 11} = \frac{1}{22}.$$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sin\frac{x}{2} + sin\, 11x}{3x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$ разобьем на две дроби:

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{sin\frac{x}{2}}{3x} + \frac{sin 11x}{3x} =$ и применим первый замечательный предел два раза:

первую дробь умножим на $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$, вторую на $\frac{11}{11}$, и перегруппируем:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{sin\frac{x}{2}}{3x} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + \frac{sin 11x}{3x} \cdot \frac{11}{11} = \lim_{x\to 0} \frac{sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{3} + \lim_{x\to 0} \frac{sin 11x}{11x} \cdot \frac{11}{3} = 1 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{11}{3} =$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{11}{3} = \frac{1}{6} + \frac{22}{6} = \frac{23}{6} = 3\frac{5}{6}.$$

8) $\lim\limits_{x\to 10} \frac{x^2 - 100}{sin(10 - x)} = \left(\frac{0}{0}\right) =$ применим первый замечательны предел,

для этого разложим числитель на множители, т.к. $100 = 10^2$:

$$= \lim_{x\to 10} \frac{x^2 - 10^2}{sin(10 - x)} = \lim_{x\to 10} \frac{(x - 10)(x + 10)}{sin(10 - x)} =$$

в числителе в первой скобке вынесем (-1):

$$= \lim_{x\to 10} \frac{-(10 - x)(x + 10)}{sin(10 - x)} = \lim_{x\to 10} \frac{10 - x}{sin(10 - x)} \cdot \frac{-(x + 10)}{1} =$$

$$= 1 \cdot (-1)(10 + 10) = -20.$$

Вариант 1	Вариант 2
1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x}{sin\,x}$;	1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sin\,x}{10\,x}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sin\,8x}{x}$;	2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{sin\,7x}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{sin\,5x}$;	3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sin\,5x}{3x}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sin^2\,2x}{x^2}$;	4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{sin^3 2x}$;
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{sin\,5x}$;	5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{sin\,7x}$;
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4-tg\,x}-2}{tg\,x}$;	6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg\,x}{\sqrt{tg\,x+9}-3}$;
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sin\,5x+sin\,3x}{x}$;	7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg\,3x}{x}$;
8. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{sin(x-2)}{x^2-4}$;	8. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{sin(x-4)}{x^2-16}$;

Практическая работа № 5: «Второй замечательный предел»

Цель работы: научиться раскрывать неопределенность вида (1^∞) путем применения второго замечательного предела.

Теоретическая часть:

Предел суммы единицы и бесконечно малой величины, в степени бесконечно большой, есть величина постоянная, равная числу Эйлера $e \approx 2{,}7$.

$$\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = (1^\infty) = e$$

$$\lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}} = (1^\infty) = e$$

Разбор решения одного варианта:

1) $\lim\limits_{\mathrm{x}\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{x}}\right)^{\frac{\mathrm{x}}{5}}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{4x}}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{19}{x}\right)^{x}$	4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+16x)^{\frac{1}{x}}$ 5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{x}{5}\right)^{\frac{1}{x}}$ 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{7}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$	7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{8x}{7}\right)^{\frac{3}{x}}$ 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x}\right)^{18x}$

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x}{5}} =$

постановка $x\to\infty$ дает $1^\infty \Longrightarrow$ воспользуемся формулой второго замечательного предела, т.к. $\frac{x}{5}$ можно представить как $\frac{x}{1}\cdot\frac{1}{5}$,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{1}\cdot\frac{1}{5}} = \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{\frac{1}{5}} =$$

выражение в квадратных скобках равно е, тогда: $= e^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{e}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{4x}} =$

постановка $x=0$ дает $1^{\infty} \Longrightarrow$ ищем формулу второго замечательного предела, т.к. $\frac{1}{4x}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x}$, то поменяв местами имеем:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{4}} = \left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{\frac{1}{4}} =$$

в скобках выражение равно е, тогда $= e^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{e}$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{19}{x}\right)^{x} =$

постановка $x\to\infty$ дает $1^{\infty} \Longrightarrow$ воспользуемся формулой второго замечательного предела. Заметим, чтобы получилось число е, надо, чтобы степень была обратна слагаемому с «1», в нашем случае это $\frac{19}{x}$, тогда степень должна быть $\frac{x}{19}$, чтобы этого добиться в степени x умножим на $\frac{19}{19}$. Перегруппируем множители, чтобы сработала формула, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{19}{x}\right)^{x\cdot\frac{19}{19}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{19}{x}\right)^{\frac{x}{19}\cdot 19} = \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{19}{x}\right)^{\frac{x}{19}}\right]^{19} = e^{19}.$$

4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+16x)^{\frac{1}{x}} = (1^{\infty})$,

в степени нужно $\frac{1}{16x}$, умножим степень $\frac{1}{x}$ на $\frac{16}{16}$, перегруппируем $\frac{1}{16x}\cdot\frac{16}{1}$, тогда

$$\lim_{x\to 0}(1+16x)^{\frac{1\cdot 16}{x\cdot 16}} = \left[\lim_{x\to 0}(1+16x)^{\frac{1}{16x}}\right]^{16} = \mathrm{e}^{16}.$$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{5}\right)^{\frac{1}{x}} = (1^{\infty})$, в степени нужно $-\frac{5}{x}$, умножим $\frac{1}{x}$ на $\frac{-5}{-5}$, перегруппируем $\frac{-5}{x}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)$, тогда

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{5}\right)^{\frac{1}{x}\cdot\frac{(-5)}{(-5)}} = \left[\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{5}\right)^{-\frac{5}{x}}\right]^{\left(-\frac{1}{5}\right)} = e^{-\frac{1}{5}} == \frac{1}{e^{\frac{1}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{e}}.$$

Так как отрицательный показатель степени, отвечает за переворот дроби.

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{7}{x}\right)^{\frac{x}{2}} = 1^{\infty} \Longrightarrow$

в степени нужно $\frac{x}{7}$, для этого $\frac{x}{2}$ умножим на $\frac{7}{7}$, перегруппируем как $\frac{x}{7}\cdot\frac{7}{2}$, тогда

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot\frac{7}{7}} = \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{\frac{x}{7}}\right]^{\frac{7}{2}} = e^{\frac{7}{2}} = e^{3}e^{\frac{1}{2}} = e\sqrt[3]{e}.$$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{8x}{7}\right)^{\frac{3}{x}} = (1^{\infty}) =$ в степени нужно $\dfrac{7}{8x}$, умножим $\dfrac{3}{x}$ на $\dfrac{7\cdot 8}{7\cdot 8}$,

тогда перегруппируем множители $\frac{7}{8x}\cdot\frac{3\cdot 8}{7}$, тогда

$$\left[\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{8x}{7}\right)^{\frac{7}{8x}}\right]^{\frac{24}{7}} = e^{\frac{24}{7}} = e^{3}\cdot e^{\frac{3}{7}} = e^{3}\sqrt[7]{e^{3}}.$$

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x}\right)^{18x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x}-\dfrac{4}{x}\right)^{18x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{x}\right)^{18x} = (1^{\infty})$

$\Longrightarrow$ чтобы сработала формула второго замечательного предела, нужна степень $-\frac{x}{4}$

умножим на $\frac{-4}{-4}$ и перегруппируем $\frac{18x}{1}\cdot\frac{-4}{-4} = -\frac{x}{4}\cdot\frac{18\cdot(-4)}{1} = -\frac{x}{4}\cdot\frac{(-72)}{1}$

$$= \left[\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{x}\right)^{-\frac{x}{4}}\right]^{-72} = e^{-72} = \frac{1}{e^{72}}.$$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-8}\right)^{5x} =$

перевернем дробь, при этом степень станет отрицательной, и разделим на две дроби, тогда

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-8}{x}\right)^{-5x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x}-\frac{8}{x}\right)^{-5x} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{8}{x}\right)^{-5x} = 1^{\infty} \Longrightarrow$$

второй замечательный предел: нужна степень $-\frac{x}{8}$, тогда $\frac{-5x}{1}\cdot\frac{8}{8} = -\frac{x}{8}\cdot\frac{5\cdot 8}{1}$, тогда

$$= \left[\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{8}{x}\right)^{-\frac{x}{8}}\right]^{40} = e^{40}.$$

Вариант 1	Вариант 2
1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$;	1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{3}{x}}$;	2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{3}}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$;	3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{x}}$;	4. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$;
5. $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1}{x}}$;	5. $\lim\limits_{x\to 0}(1-7x)^{\frac{1}{x}}$;
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{3}}$;	6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{4}}$;
7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{4x}{5}\right)^{\frac{2}{x}}$;	7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{5x}{6}\right)^{\frac{3}{x}}$;
8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x}\right)^{7x}$;	8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{4x}$;
9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-3}\right)^{\frac{1}{2x}}$.	9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+4}\right)^{\frac{1}{2x}}$.

Литература:

Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: Учебное пособие. Математика: Высшая школа, 2019г.

Богомолов Н.В. Математика: учебник для вузов/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. 3-е издание, стереотип. – Математика: Дрофа, 2019г.

Практическая работа №6:

Производная функции. Правила дифференцирования

Цель: Отработка техники дифференцирования.

Повторить и систематизировать знания по теме: "Производная".

1.Теоретический материал, примеры вычисления производной.

Операция вычисления производной называется ***дифференцированием***.
Функция называется ***дифференцируемой*** в данной точке, если в этой точке существует ее производная.

Формулы дифференцирования

1)$C' = 0$ $(C \in R)$

2)$x' = 1$

3) $(x^n)' = nx^{n-1}$

4) $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$

5) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

6)$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

7) $(e^x)' = e^x$

8)$(a^x)' = a^x \ln a$

9)$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

10)$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

11)$(\sin x)' = \cos x$

19) $(\cos x)' = -\sin x$

12)$(arcsin\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

13)$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14)$(\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

15)$(\mathrm{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Правила дифференцирования

Т е о р е м 1 . Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные во всех точках интервала $(a; b)$, то $\big(u(x) \pm v(x)\big)' = u\,'(x) \pm v'(x)$ для любого $x \in (a; b)$. Короче,

$$(\boldsymbol{u} \pm \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}' \pm \boldsymbol{v}\,'.$$

Т е о р е м а 2 . Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные во всех точках интервала $(a; b)$, то $\big(u(x)v(x)\big)' = u'\,(x)v(x) + u(x)v'\,(x)$ для любого $x \in (a; b)$. Короче,

$$(\mathbf{u}\boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}'\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}'.$$

С л е д с т в и е . *Постоянный множитель можно выносить за знак производной:*

$$\big(\boldsymbol{af}(\boldsymbol{x})\big)' = \boldsymbol{af}'\,(\boldsymbol{x}).$$

Т е о р е м а 3 . Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные во всех точках интервала $(a; b)$, причем $v(x) \neq 0$ для любого $x \in (a; b)$, то

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

Короче,

$$\left(\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}}\right)' = \frac{\boldsymbol{u'v - uv'}}{\boldsymbol{v^2}}.$$

Пример 1. Найти значение производной функции: $y = 3x^2 + 2^x - 4x + 8$.

Решение:

По правилу нахождения производной алгебраической суммы функций :

$$y' = (3x^2 + 2^x - 4x + 8)' = (3x^2)' + (2^x)' - (4x)' + (8)' =$$
$$= 3 \cdot 2x + 2^x \cdot \ln 2 - 4 \cdot 1 + 0 = 6x + 2^x \cdot \ln 2 - 4.$$

Пример 2. Найти значение производной функции: $y = x^6(\sin x + 4)$.

Решение:

Функция представляет собой произведение двух множителей:

$u = x^6, v = \sin x + 4$.

$$y' = (x^6(\sin x + 4))' = (x^6)'(\sin x + 4) + x^6(\sin x + 4)' =$$
$$= 6x^5(\sin x + 4) + x^6 \cdot \cos x\,.$$

Пример 3. Найти значение производной функции: $\mathrm{y} = \frac{3\mathrm{x}-5}{4\mathrm{e}^{\mathrm{x}}-3}$.

Решение:

Функция представляет собой частное двух выражений: $u = 3x - 5, v = 4e^x - 3$.

По формуле 4:

$$y' = \left(\frac{3x-5}{4e^x-3}\right)' = \frac{(3x-5)' \cdot (4e^x-3) - (4e^x-3)' \cdot (3x-5)}{(4e^x-3)^2} = \frac{3(4e^x-3) - 4e^x(3x-5)}{(4e^x-3)^2}.$$

Пример 4. Если $y = \ln x \cdot \cos x$, то

$$y' = (\ln x)' \cdot \cos x + \ln x\,(\cos x)' = 1/x \cdot \cos x - \ln x \cdot \sin x.$$

2. Задания для самостоятельного выполнения:

Вариант №1

1. Найти производные

а) $y = 3x^2 + \sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^2} + 3$,

б) $y = \sin x \cdot arctg\ x$,

в) $y = \frac{\cos x}{x - \sqrt[3]{x}}$,

г) $y = \sqrt[3]{\frac{1}{x^2+1}}$,

д) $y = \frac{1}{3}tg^3 x - tgx + x$,

Вариант № 2

1. Найти производные

а) $y = 4x^5 - \sqrt[4]{x^3} + \frac{1}{x^3} - \sqrt[3]{3}$,

б) $y = \sqrt{x}\sin x$,

в) $y = \frac{tgx}{\sin x - \cos x}$,

г) $y = ctg(2x\sin\frac{1}{2})$,

д) $y = (\arccos x + \arcsin x)^2$,

е) $y = \arccos\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$,

ж) $y = (1+\ln\sin x)^2$,

з) $y = 2^{\frac{1}{\ln x}}$,

и) $y = x\ arctg\sqrt{x}$.

е) $y = arctg\ln(2x+3)$,

ж) $y = tg\frac{e^x}{x}$,

з) $y = \sin 3x\cos 5x$,

и) $y = \ln(1+\sqrt{x^2-1})$.

Практическая работа №7: Вычисление производной сложной функции

Цель: закрепить навыки вычисления производных сложных функций

Таблица производных

Производные степенных функций	Производные тригонометрических функций	Производные обратных тригонометрических функций
$(c)' = 0$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(x^a)' = ax^{a-1}$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(a^x)' = a^x\ln a$	$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$	$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

1. $\left(u^n\right)' = nu^{n-1} \cdot u'$.

2. $\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$.

3. $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$

4. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{x\ln a} \cdot u'$.

5. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$.

6. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.

7. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.

8. $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$.

9. $(\mathrm{tg}\, u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$.

10. $(\mathrm{ctg}\, u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$

11. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.

12. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

13. $(\mathrm{arctg}\, u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

14. $(\mathrm{arcctg}\, u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$

15. $(\mathrm{sh}\, u)' = \mathrm{ch}\, u \cdot u'$

16. $(\mathrm{ch}\, u)' = \mathrm{sh}\, u \cdot u'$

17. $(\mathrm{th}\, u)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 u} \cdot u'$

18. $(\mathrm{th}\, u)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 u} \cdot u'$

<u>Вариант 1.</u>

Вычислите производные сложных функций:

а) $f(x) = \sqrt[4]{1+x^2}$; б) $f(x) = 5^{2x}$; в) $f(x) = sin\, 3x$; г) $f(x) = \dfrac{ln\, x}{e^x + e^{-x}}$; д) $f(x) = 2tg^3\, 4x$

<u>Вариант 2.</u>

Вычислите производные сложных функций:

а) $f(x) = \dfrac{1}{(2x-1)^2}$; б) $f(x) = e^{-3x}$; в) $f(x) = cos\, 5x$; г) $f(x) = (3x+4) \cdot log_5\left(x+1+x^2\right)$;

д) $f(x) = 4ctg^3\, 2x$.

Вариант 3.

Вычислите производные сложных функций:

а) $f(x)=(3-x)^4$; б) $f(x)=2log_3 2x$; в) $f(x)=3tg\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$; г) $f(x)=(x^2+4)\cdot e^{-x^2}$;

д) $f(x)=2\sin^3 4x$.

Вариант 4.

Вычислите производные сложных функций:

а) $f(x)=\sqrt[5]{x+\sqrt{x}}$; б) $f(x)=lg(3x)$; в) $f(x)=3\cos\frac{x}{3}$; г) $f(x)=x\cdot 2^{3x+x^2}$;

д) $f(x)=log_3^2(2x+1)$.

Вариант 5.

Вычислите производные сложных функций:

а) $f(x)=(3-2x^3)^5$; б) $f(x)=0{,}3^{3x^2-7x+2}$; в) $f(x)=\cos(x^2+4x+12)$;

г) $f(x)=(3x+5x^2+x^3)\cdot 4^{x^2}$; д) $f(x)=3\sin^2 5x$.

Практическая работа №8,9,10: вычисление интегралов методом непосредственного интегрирования

Цель: проверить знание определения неопределённого интеграла, его свойства, табличные интегралы; формулы интегрирования при помощи замены переменной, умения вычислять неопределённые интегралы методом замены переменной.

Задание:

1. Найти неопределённые интегралы

1.

1.1. $\int x^3(3x+1)^2dx$ 1.11. $\int 4x^2(4x+2)^2dx$ 1.21. $\int 3\sqrt{x}(2-3x)^2dx$

1.2. $\int -2\sqrt{x}(4-3x)^2dx$ 1.12. $\int\frac{x^2-3x^3+2x^7}{x}dx$ 1.22. $\int\frac{2x^3+3x^4-5x^6}{x^2}dx$

1.3. $\int\frac{4x^3+x^4--8x^5}{x^3}dx$ 1.13. $\int\frac{7x^4-4x^4+6x^4}{x^2}dx$ 1.23. $\int\frac{x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{4}{7}}-x^{\frac{1}{2}}}{x}dx$

2.1. $\int \frac{\sqrt{3}}{9x^2-3}dx$

2.2. $\int \frac{1}{\sqrt{9x^2+3}}dx$

2.3. $\int \frac{1}{9x^2+3}dx$

2.4. $\int \frac{9}{\sqrt{9x^2-3}}dx$

2.5. $\int \frac{1}{\sqrt{3-9x^2}}dx$

2.6. $\int \frac{1}{7x^2-4}dx$

2.7. $\int \frac{3}{\sqrt{7x^2-4}}dx$

2.8. $\int \frac{1}{5x^2+3}dx$

2.9. $\int \frac{1}{5x^2-3}dx$

2.10. $\int \frac{1}{\sqrt{3-5x^2}}dx$

2.11. $\int \frac{1}{\sqrt{5x^2+3}}dx$

2.12. $\int \frac{1}{\sqrt{4-7x^2}}dx$

2.13. $\int \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3-4x^2}}dx$

2.14. $\int \frac{1}{\sqrt{2x^2-9}}dx$

2.15. $\int \frac{1}{2x^2+7}dx$

2.16. $\int \frac{1}{\sqrt{3x^2+1}}dx$

2.17. $\int \frac{1}{3x^2+2}dx$

2.18. $\int \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7-2x^2}}dx$

2.19. $\int \frac{\sqrt{14}}{2x^2-7}dx$

2.20. $\int \frac{1}{8x^2+9}dx$

2.21. $\int \frac{1}{3x^2-2}dx$

2.22. $\int \frac{1}{4x^2+3}dx$

2.23. $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+3}}dx$

2.24. $\int \frac{1}{\sqrt{3-4x^2}}dx$

2.25. $\int \frac{1}{4x^2-3}dx$

2.26. $\int \frac{2}{4+3x^2}dx$

2.27. $\int \frac{2}{\sqrt{4x^2-3}}dx$

2.28. $\int \frac{1}{4x^2+7}dx$

2.29. $\int \frac{1}{8x^2-9}dx$

2.30. $\int \frac{1}{\sqrt{9-8x^2}}dx$

Найти интегралы методом интегрирования по частям

1.$\int x\cos 6x\,dx$	11.$\int x\cos(x-7)dx$	1.21.$\int arctg\,\frac{x}{5}\,dx$
2.$\int x\sin(x-5)dx$	12.$\int \ln(x+12)dx$	22.$\int \arcsin\frac{x}{5}\,dx$
3.$\int \arcsin 3x\,dx$	13.$\int (x-4)e^{x}\,dx$	23.$\int \arccos 2x\,dx$
4.$\int arctg\,8x\,dx$	14.$\int xe^{-6x}\,dx$	1.24.$\int \ln(2x-1)dx$
5.$\int x\sin(x-2)dx$	15.$\int arctg\,7x\,dx$	1.25.$\int \ln(2x+3)dx$
6.$\int \arcsin 8x\,dx$	1.16.$\int \arcsin 5x\,dx$	1.26.$\int \arccos\frac{x}{5}\,dx$
7.$\int x\sin(x+3)dx$	1.17.$\int \ln(x-7)dx$	1.27.$\int arctg\,\frac{x}{4}\,dx$
8.$\int x\cos(x+4)dx$	1.18.$\int x\cos(x+6)dx$	1.28.$\int \arcsin\frac{x}{7}\,dx$
9.$\int \arccos 7x\,dx$	1.19.$\int arctg\,\frac{x}{2}\,dx$	1.29.$\int arctg\,6x\,dx$
10.$\int \ln(2x-4)dx$	1.20.$\int \ln(x+8)dx$	1.30.$\int \arccos\frac{x}{3}\,dx$

Контрольные вопросы

1. Таблица неопределенных интегралов.
2. Свойства неопределенного интеграла.
3. Непосредственное интегрирование.
4. Интегрирование заменой переменной.
5. Какие интегралы находятся методом по частям?
6. Алгоритм решения методом по частям

Практическая работа №11: Вычисление определённого интеграла

Цель: закрепить навыки вычисления определенных интегралов

Основные понятия.

1 Определенный интеграл – это предел интегральных сумм:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \quad i \in \overline{0, n-1}, \quad x_i$ - точки из отрезка $[a,b]$

$a = x_0, \quad b = x_n, \qquad c_i \in [x_i, x_{i+1}] \quad i \in \overline{0, n-1}$

2 Формула Ньютона-Лейбница: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$

где $F(x)$- первообразная для $f(x)$.

3 Свойства определенных интегралов

– $\int_a^a f(x)dx = 0$

– $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

– $\int_a^b C\cdot f(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$

– $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

– $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

4 Замена переменных в определенном интеграле:

$$\int_\alpha^\beta f(u(x))u' dx = \int_a^b f(u)du;$$

где $du = u'(x)dx, \; a = u(\alpha), \; b = u(\beta).$

5 Интегрирование по частям в определенном интеграле:

$$\int_{\alpha}^{\beta} udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Задание

1 Найти определенный интеграл, используя свойства интегралов
2 Найти интегралы методом замены переменной
3 Найти интегралы методом интегрирования по частям

Пример выполнения:

Исходные данные:

Вычислить интегралы.

Задание 1 $\int_1^3 \left(3\sqrt{x} + \frac{1}{x^3} - 4\right)dx$

Задание 2 $\int_0^1 \sqrt{x+32}dx;$ $\int_0^{\frac{\pi}{3}} sin^{15}\, x\, cos\, xdx$

Задание 3 $\int_0^e x\, ln\, xdx$

Решение.

Задание 1

$$\int_1^4 \left(3\sqrt{x} + \frac{1}{x^3} - 4\right)dx = 3\int_1^4 \sqrt{x}dx + \int_1^4 x^{-3}dx - 4\int_1^4 dx = 3\left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_1^4 + \left.\frac{x^{-2}}{-2}\right|_1^4 - 4x\Big|_1^4 =$$

$$= 2\sqrt{x^3}\Big|_1^4 - \left.\frac{1}{2x^2}\right|_1^4 - 4x\Big|_1^4 = 2\left(\sqrt{4^3} - \sqrt{1^3}\right) - \left(\frac{1}{2\cdot 4^2} - \frac{1}{2\cdot 1^2}\right) - 4(4-1) =$$

$$= 2(8-1) - \left(\frac{1}{32} - \frac{1}{2}\right) - 4\cdot 3 = 14 + \frac{15}{32} - 12 = 2\frac{15}{32}.$$

Задание № 2.

$$\int_0^1 \sqrt{x+32}dx = \begin{vmatrix} u = x+32 & du = dx \\ 0 \mapsto 0 & 1 \mapsto 33 \end{vmatrix} = \int_0^{33} \sqrt{u}du = \left.\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^{33} = \left.\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right|_0^{33} = \frac{2}{3}\left(33^{\frac{3}{2}} - 1\right).$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} sin^{15} x \, cos \, xdx = \begin{vmatrix} u = sin \, x & du = cos \, xdx \\ 0 \mapsto 0 & \frac{\pi}{3} \mapsto \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} u^{15} du = \left.\frac{u^{16}}{16}\right|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \frac{1}{16}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{16} - 0\right) = \frac{3^8}{2^{20}}.$$

Задание № 3

$$\int_0^e x \, ln \, xdx = \begin{vmatrix} u = ln \, x & dv = xdx \\ du = \frac{dx}{x} & v = \frac{x^2}{2} \end{vmatrix} = \left.\frac{x^2}{2} ln \, x\right|_0^e + \int_0^e \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} = \left.\frac{x^2}{2} ln \, x\right|_0^e +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^e xdx = \frac{e}{2} ln \, e - \frac{1}{2} ln 1 + \left.\frac{x^2}{4}\right|_0^e = \frac{e}{2} + \frac{e^2 - 0^2}{2} = \frac{e^2 + e}{2}.$$

Задания к практической работе.

Задание 1

1 $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4} \right) dx;$

2 $\int_2^{3.5} \left(\frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}} \right)$

3 $\int_0^2 x(3-x)dx;$

4 $\int_0^9 (3\sqrt{x} - x)dx;$

5 $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-x-6}$

6 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+8}}$

7 $\int_1^4 \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx;$

8 $\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4x-32}\ dx$

9 $\int_1^5 ((x-3)^2 - 4)dx;$

10 $\int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2}$

11 $\int_0^1 \frac{1}{x+2} dx;$

12 $\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2-1}\ dx$

13 $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

14 $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx;$

15 $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2+x-6}$

16 $\int_1^8 \sqrt[3]{x^2} dx;$

17 $\int_0^2 x^2(3-x)dx;$

18 $\int_{-1}^1 \left(\frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} \right)$

19 $\int_3^4 \frac{dx}{x^2-4x+5}$

20 $\int_0^2 x(4x^2+3x-2)dx;$

21 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-8}}$

22 $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2+2x+2}$

23 $\int_0^2 x(x^2+4x-1)dx;$

24 $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$

25 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+10}}$

26 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

27 $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$

28 $\int^5 ((x-2)^2 - 1)dx;$

29 $\int^4 ((x-2)^2 - 1)dx;$

30 $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

Задание 2

1 $\int_0^2 3^{2x+5} dx$

2 $\int_0^1 x(7x^2-5)^4 dx$

3 $\int_{-1}^0 4^{8x+7} dx$

4 $\int_1^4 \sqrt{x^2-1} \cdot x\ dx$

5 $\int_0^{\pi/4} \sin(4x)\ dx$

6 $\int_0^1 \left(\frac{dx}{\sqrt{4+5x}} \right)$

7 $\int_0^1 \left(\frac{dx}{\sqrt{4-3x}} \right)$

8 $\int_0^1 \left(\frac{dx}{\sqrt{10-3x}} \right)$

9 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} ctg\ x\ dx$

10 $\int_1^e \frac{\sin \ln x}{x} dx$

11 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\ dx$

12 $\int_0^{\pi/3} \cos(3x)\ dx$

13 $\int_{2}^{6} \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx$

14 $\int_{-1}^{1} tg\,x\,dx$

15 $\int_{2}^{3} \frac{2x+4}{x^2+4x-3}\,dx$

16 $\int_{0}^{1} 5^{2x-1}dx$

17 $\int_{-2}^{0} 5^{2x+9}dx$

18 $\int_{-2}^{2} e^{2x+1}dx$

19 $\int_{-1}^{1} 9^{6x-1}dx$

20 $\int_{0}^{1} 2^{2x+1}dx$

21 $\int_{1}^{e} \frac{\cos\ln x}{x}\,dx$

22 $\int_{1}^{2} 3^{7x+1}dx$

23 $\int_{0}^{2} 3^{3x-2}dx$

24 $\int_{-1}^{1} 5^{3x+1}dx$

25 $\int_{-2}^{1} 7^{2x+5}dx$

26 $\int_{0}^{3} \frac{2x-3}{x^2-3x+1}\,dx$

27 $\int_{-1}^{2} 2^{2x-1}dx$

28 $\int_{-1}^{1} 5^{9x+4}dx$

29 $\int_{1}^{2} 5^{3x-4}dx$

30 $\int_{1}^{2} e^{3x+2}dx$

Задание 3

1 $\int\limits_{0}^{1} \arcsin x dx;$

2 $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\left(\ln^2 x-9\right)};$

3 $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx;$

4 $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx;$

5 $\int\limits_{0}^{1} xarctgxdx;$

6 $\int\limits_{0}^{e-1} \ln(x+1)dx;$

7 $\int\limits_{0}^{1} xe^{-x}dx;$

8 $\int\limits_{0}^{1} x\arcsin x dx;$

9 $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x dx;$

10 $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} x\sin 3x dx;$

11 $\int\limits_{-\pi/2}^{3\pi/2} x\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)dx;$

12 $\int\limits_{0}^{1} \left(x^2-1\right)e^{x}dx;$

13 $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{xdx}{\sin^2 x};$

14 $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{xdx}{\cos^2 x};$

15 $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x dx;$

16 $\int\limits_{0}^{1} 5xe^{2x}dx;$

17 $\int\limits_{0}^{1} \left(x^2-1\right)e^{2x}dx;$

18 $\int\limits_{0}^{1} xarctg2xdx;$

19 $\int_0^1 3x^2e^{2x}dx;$ 20 $\int_0^{\pi/8}\frac{xdx}{\cos^2 2x};$ 21 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin xdx;$

22 $\int_0^1 xarctg3xdx;$ 23 $\int_0^{\pi} x\sin xdx;$ 24 $\int_0^{\pi} x^2\sin xdx;$

25 $\int_0^1 x^2arctg3xdx;$ 26 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{3}\right)dx;$ 27 $\int_{-1}^1 x\arcsin xdx;$

28 $\int_0^1 (x^2-1)e^{3x}dx;$ 29 $\int_0^1 (x^2-1)e^{x}dx;$ 30 $\int_0^1 \arcsin xdx$

ИНСТРУКЦИОННАЯ КАРТА для проведения практической

Цель: выполнения задания: привить навыки нахождения определенных интегралов методом замены переменной и интегрированием по частям

Необходимо знать: основные формулы и правила вычисления определенных интегралов
Необходимо уметь: применять основные формулы и правила вычисления определенных интегралов

Теория: для выполнения заданий по данной теме необходимо предварительно изучить теоретические материалы, а также методические рекомендации к выполнению работы
Порядок выполнения задания, методические указания: - ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме; - изучить схему решения задач; - выполнить задания практической работы; - сформулировать вывод

Дополнительные задания: могут быть сформулированы по ходу занятия

Содержание отчета: отчет по практической работе должен содержать: основные определения, рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ; вывод по работе

Контрольные вопросы:

1 Что называется определенным интегралом?

2 В чем принципиальное отличие определенного интеграла от неопределенного?

3 Формула Ньютона-Лейбница

4 Формула интегрирования по частям в определенном интеграле

5 Свойства определенного интеграла

Практическая работа №12: Линейные операции над матрицами

Операции над матрицами

Цель: закрепить навыки выполнения действий над матрицами

Содержание работы:

Основные понятия

1 Матрицей размерности m x n называется прямоугольная таблица $m \times n$ чисел a_{ij}, $i=1,\dots, m$, $j=1,\dots, n$, расположенных в m строках и n столбцах:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2 Матрица называется квадратной, если m=n (n - порядок матрицы).

3 Матрица называется единичной, если все элементы на ее главной диагонали равны 1. (Все остальные элементы при этом равны 0.) Единичная матрица чаще всего обозначается буквой E или E_n, где n - порядок матрицы.

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

4 Две матрицы A и B равны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый размер $m \times n$ и их соответствующие элементы равны. Пусть заданы две матрицы A и B, причем размерность первой из них равна размерности второй.

5 Чтобы умножить матрицу на число, нужно умножить на это число все элементы матрицы.

6 Суммой двух матриц одинаковой размерности, называется матрица той же размерности, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов слагаемых.

7 Произведением матриц называется матрица, элементы которой вычисляются по формуле: $c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}$, $i=1, \dots, m$, $j=1, \dots, k$. Произведение матриц A и B обозначается AB, т.е. $C=AB$.. Пусть заданы две матрицы A и B, причем число столбцов первой из них равно числу строк второй.

8 Произведение матриц существует тогда и только тогда, когда число столбцов в первой матрице равно числу строк во второй.

9 Матрица, получающаяся из матрицы A заменой строк столбцами, называется транспонированной по отношению к матрице и обозначается A^T

10 Матрица называется обратной к матрице A и обозначается A^{-1}, т.е. $A A^{-1} = A^{-1} A = E$.

11 Определителем n-го порядка называется число, полученное из квадратной таблицы размерности $n \times n$.

12 Определитель 2-го порядка - это число вида

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

13 Определители третьего порядка можно вычислять по правилу Саррюса, методом треугольника, разложением по строке или столбцу.

14 Пусть a_{ij}- элемент определителя Δ. Минором M_{ij} будем называть определитель, полученный из исходного вычеркиванием i- строки и j-го столбца.

15 Алгебраическим дополнением к элементу a_{ij} называется число вида $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

16 Обратную матрицу можно найти методом Гаусса $(A|E) \to \ldots \to (E|A^{-1})$ или по формуле $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A_{ij})^T$

17 Для того, чтобы матрица имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы определитель этой матрицы был отличен от нуля.

Задание

Даны матрицы A и B.

1 Выписать матрицу A^T, минор матрицы M_{21}, отвечающий элементу a_{21}.

2 Вычислить $|A|$ тремя способами.

3 Вычислить $3A$, $2A-3B$, $A \cdot B$, $B \cdot A$.

4 Вычислить B^{-1} двумя способами.

5 Вычислить $4A + 5B^{-1} + A \cdot B$

Пример выполнения:

Исходные данные:

Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 2\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 5 & 2\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix}$

Решение:

Задание 1 $A^T=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 1\\ 2 & 0 & 4\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ $\quad M_{21}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}$

Задание 2

а) $|A|=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 2\\ 1 & 4 & 3\end{vmatrix}=-1\cdot0\cdot3+2\cdot2\cdot1+1\cdot3\cdot4-1\cdot0\cdot1-(-1)\cdot2\cdot4-2\cdot3\cdot3=6;$

б) $|A|=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 2\\ 1 & 4 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 2 & 3 & 0\\ 1 & 4 & 3 & 1 & 4\end{vmatrix}=-1\cdot0\cdot3+2\cdot2\cdot1+1\cdot3\cdot4-1\cdot0\cdot1-$

$-(-1)\cdot2\cdot4-2\cdot3\cdot3=6;$

в) $|A|=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 2\\ 1 & 4 & 3\end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix}0 & 2\\ 4 & 3\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}3 & 0\\ 1 & 4\end{vmatrix}=-1\cdot(-8)-2\cdot(9-2)+12=6$

Задание 3

а) $3A=\begin{pmatrix}-3 & 6 & 3\\ 9 & 0 & 6\\ 3 & 12 & 9\end{pmatrix}$

б) $2A-3B=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 2\\ 6 & 0 & 4\\ 2 & 8 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6 & -3 & -3\\ 3 & 15 & 6\\ -9 & 3 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-6 & 4-(-3) & 2-(-3)\\ 6-3 & 0-15 & 4-6\\ 2-(-9) & 8-3 & 6-6\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}-8 & 7 & 5\\ 3 & -15 & -2\\ 11 & 5 & 0\end{pmatrix}$

в) $A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} -1\cdot 2+2\cdot 1+1\cdot(-3) & -1\cdot(-1)+2\cdot 5+1\cdot 1 & -1\cdot(-1)+2\cdot 2+1\cdot 2 \\ 3\cdot 2+0\cdot 1+2\cdot(-3) & 3\cdot(-1)+0\cdot 5+2\cdot 1 & 3\cdot(-1)+0\cdot 2+2\cdot 2 \\ 1\cdot 2+4\cdot 1+3\cdot(-3) & 1\cdot(-1)+4\cdot 5+3\cdot 1 & 1\cdot(-1)+4\cdot 2+3\cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 12 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \\ -3 & 22 & 13 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2\cdot(-1)+(-1)\cdot 3+(-1)\cdot 1 & 2\cdot 2+(-1)\cdot 0+(-1)\cdot 4 & 2\cdot 1+(-1)\cdot 2+(-1)\cdot 3 \\ 1\cdot(-1)+5\cdot 3+2\cdot 1 & 1\cdot 2+5\cdot 0+2\cdot 4 & 1\cdot 1+5\cdot 2+2\cdot 3 \\ (-3)\cdot(-1)+1\cdot 3+2\cdot 1 & (-3)\cdot 2+1\cdot 0+2\cdot 4 & (-3)\cdot 1+1\cdot 2+2\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 0 & -3 \\ 16 & 10 & 17 \\ 8 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Задание 4

а) $B^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 16 & 8 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{11} & \frac{16}{11} & \frac{1}{11} & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \frac{1}{8} & \frac{11}{8} \end{array}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{1}{8} & \frac{11}{8} \end{array}\right)$$

$$B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ -1 & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \\ 2 & \frac{1}{8} & \frac{11}{8} \end{pmatrix}$$

б) $|B|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=2\cdot5\cdot2+(-1)\cdot(-3)\cdot2+(-1)\cdot1\cdot1-(-1)\cdot5\cdot(-3)-(-1)\cdot1\cdot2-2\cdot1\cdot2=8$

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=8;\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=-8;\quad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}=16;$

$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1;\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=1;\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}=1;$

$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}=3;\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-5;\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=11;$

$$B^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}8 & 1 & 3\\ -8 & 1 & -5\\ 16 & 1 & 11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8}\\ -1 & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8}\\ 2 & \frac{1}{8} & \frac{11}{8}\end{pmatrix}$$

Задание 5

$$4A+5B^{-1}+A\cdot B=4\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 2\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}+5\cdot\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8}\\ -1 & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8}\\ 2 & \frac{1}{8} & \frac{11}{8}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & 12 & 7\\ 0 & -1 & 1\\ -3 & 22 & 13\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 20{,}625 & 12{,}875\\ 7 & -0{,}375 & 5{,}875\\ 11 & 38{,}625 & 31{,}875\end{pmatrix}$$

Задания к практической работе.

1	$A=\begin{pmatrix}2&-4&-3\\-7&3&-2\\1&1&2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}3&-4&-1\\1&-3&2\\2&1&-3\end{pmatrix}$	2	$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&-1&-2\\3&1&2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}8&-1&3\\4&1&6\\3&1&6\end{pmatrix}$
3	$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-2&-1&3\\2&4&-1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2&1&-1\\4&2&1\\-2&-5&-1\end{pmatrix}$	4	$A=\begin{pmatrix}4&-7&-2\\5&-3&-4\\3&-8&-1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2&3&-1\\0&10&5\\-2&-5&-1\end{pmatrix}$
5	$A=\begin{pmatrix}-1&4&-2\\6&10&-7\\-3&-2&2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&1&2\\-5&-3&-6\\3&2&-4\end{pmatrix}$	6	$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\4&7&-11\\2&3&-4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}5&3&-5\\9&4&-7\\14&6&-11\end{pmatrix}$
7	$A=\begin{pmatrix}4&1&-3\\8&3&-6\\2&2&-1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}3&1&2\\2&-3&4\\1&2&-3\end{pmatrix}$	8	$A=\begin{pmatrix}3&-5&3\\1&-2&1\\1&7&-2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}10&-6&2\\4&-3&-1\\2&-1&4\end{pmatrix}$
9	$A=\begin{pmatrix}4&-3&1\\1&1&-1\\2&1&0\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}6&-4&-5\\4&3&6\\-7&2&1\end{pmatrix}$	10	$A=\begin{pmatrix}3&-1&2\\-2&2&-3\\1&-5&8\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2&1&-1\\4&10&1\\-2&-5&-1\end{pmatrix}$
11	$A=\begin{pmatrix}-3&-4&2\\-2&3&-7\\2&1&1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}8&4&3\\-1&1&1\\3&6&6\end{pmatrix}$	12	$A=\begin{pmatrix}2&1&-3\\-1&1&-2\\1&3&2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}0&10&5\\2&3&-1\\-2&-5&-1\end{pmatrix}$
13	$A=\begin{pmatrix}-1&-2&1\\-2&-1&3\\2&4&-1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}5&3&6\\-1&-1&-2\\3&2&-4\end{pmatrix}$	14	$A=\begin{pmatrix}3&-8&-1\\5&-3&-4\\4&-7&-2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2&-1&4\\10&-6&2\\4&-3&-1\end{pmatrix}$
15	$A=\begin{pmatrix}-1&4&-2\\-3&-2&2\\6&10&-7\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&-3&2\\3&-4&-1\\2&1&3\end{pmatrix}$	16	$A=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\-4&7&-11\\-2&3&-4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}3&2&1\\1&-3&2\\2&4&-3\end{pmatrix}$
17	$A=\begin{pmatrix}4&8&2\\1&3&2\\-3&-6&-1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}14&6&-11\\5&3&-5\\9&4&-7\end{pmatrix}$	18	$A=\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&7&-2\\3&-5&3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}4&3&6\\6&-4&-5\\-7&2&1\end{pmatrix}$
19	$A=\begin{pmatrix}-3&-4&1\\1&-1&-1\\1&-2&0\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2&-1&1\\4&1&2\\-2&-1&-5\end{pmatrix}$	20	$A=\begin{pmatrix}2&-2&3\\3&-1&2\\1&-5&8\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}4&1&6\\8&-1&3\\3&1&6\end{pmatrix}$

Практическая работа №13: Вычисление определителей 2 и 3 порядка

Цель: сформировать умение вычислять определители второго, третьего и n-го порядка.

Теоретические сведения к практической работе

Определение. Определителем (детерминантом) второго порядка называют число, которое ставится в соответствие матрицы второго порядка, и вычисляется следующим образом (обозначается Δ, $|A|$, $\det A$):

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

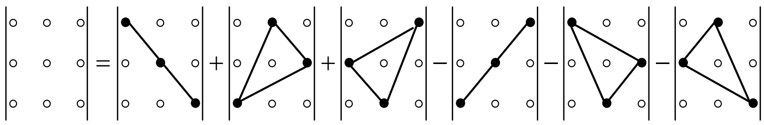
1) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - 4 \cdot 5 = 18 - 20 = -2$,

2) $\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = (-4) \cdot 6 - 1 \cdot (-5) = -24 + 5 = -19$.

Определение. Определителем (детерминантом) третьего порядка называют число, которое ставится в соответствие матрицы третьего порядка, и вычисляется по правилу:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Данный алгоритм называется «правилом треугольника», которое можно представить в виде схемы



Например, вычислим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot (-1) - 2 \cdot 5 \cdot 2 -$$

$$-3 \cdot (-1) \cdot 1 - (-1) \cdot 4 \cdot (-2) = -30 - 2 - 8 - 20 + 3 - 8 = -65.$$

Для вычисления определителя третьего порядка можно пользоваться алгоритмом Саррюса:

1) После записи определителя дописываем его первый и второй столбец и вычисляем по схеме

$$\begin{array}{ccccc} (+) & (+) & (+) & & \\ \end{array}$$
$$\left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$\begin{array}{ccccc} (-) & (-) & (-) & & \\ \end{array}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Например, вычислим определитель по алгоритму Саррюса

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -4 & 2\\ -2 & 5 & 4\\ 3 & 1 & -6\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & -4 & 2\\ -2 & 5 & 4\\ 3 & 1 & -6\end{vmatrix}\begin{matrix}1 & -4\\ -2 & 5\\ 3 & 1\end{matrix}=1\cdot 5\cdot(-6)+(-4)\cdot 4\cdot 3+$$

$$+2\cdot(-2)\cdot 1-2\cdot 5\cdot 3-1\cdot 4\cdot 1-(-4)\cdot(-2)\cdot(-6)=$$

$$=-30-48-4-30-4+48=-68.$$

Определение. Определителем (детерминантом) второго порядка называют число, которое ставится в соответствие матрицы второго порядка, и вычисляется следующим образом Минором элемента a_{ij} определителя n-го порядка (обозначается M_{ij}) называется определитель $(n-1)$-го порядка, *который получают из определителя* n*-го порядка вычеркиванием строки и столбца, в которых стоит элемент* a_{ij}.

Например, $\begin{vmatrix}2 & -1 & 5\\ -4 & 2 & 1\\ 0 & 3 & -2\end{vmatrix}$

$$M_{32}=\begin{vmatrix}2 & 5\\ -4 & 1\end{vmatrix}=2\cdot 1-5\cdot(-4)=22,$$

$$M_{21}=\begin{vmatrix}-1 & 5\\ 3 & -2\end{vmatrix}=(-1)\cdot(-2)-3\cdot 5=-13.$$

Определение. Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} *определителя* n*-го порядка (обозначается* A_{ij}*) называется соответствующий ему минор со знаком*

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}=\begin{cases}M_{ij},\ \textit{если}\ (i+j)-\textit{четное число};\\ -M_{ij},\ \textit{если}\ (i+j)-\textit{нечетное число}.\end{cases}$$

Например, для определителя $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}=M_{31}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 6\end{vmatrix}=2\cdot 6-3\cdot 5=12-15=-3,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-M_{12}=-\begin{vmatrix}4 & 6\\ 7 & 9\end{vmatrix}=-(4\cdot 9-6\cdot 7)=-(36-42)=-(-6)=6.$$

9) **(Теорема Лапласа)** Определитель равен сумме произведений элементов некоторого столбца (строки) на соответствующие им алгебраические дополнения.

Например, для определителя третьего порядка

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}.$$

Пример. $\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & -1 & 2\\ 4 & 5 & -2\end{vmatrix}$

Решение

1) Вычислим определитель.

а) по правилу треугольника.

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & -1 & 2\\ 4 & 5 & -2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & -1 & 2\\ 4 & 5 & -2\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & -1 & 2\\ 4 & 5 & -2\end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(-1)\cdot(-2) + (-3)\cdot 3\cdot 5 + 2\cdot 2\cdot 4 - (-3)\cdot(-1)\cdot 4 - 1\cdot 2\cdot 5 - 2\cdot 3\cdot(-2) =$$

$$= 2 - 45 + 16 - 12 - 10 + 12 = -37.$$

б) по алгоритму Саррюса.

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & -1 & 2\\ 4 & 5 & -2\end{vmatrix} = \left|\begin{matrix}1 & 2 & -3\\ 3 & -1 & 2\\ 4 & 5 & -2\end{matrix}\right|\begin{matrix}1 & 2\\ 3 & -1\\ 4 & 5\end{matrix} =$$

$$= 1\cdot(-1)\cdot(-2) + 2\cdot 2\cdot 4 + (-3)\cdot 3\cdot 5 - (-3)\cdot(-1)\cdot 4 - 1\cdot 2\cdot 5 - 2\cdot 3\cdot(-2) =$$

$$= 2 - 45 + 16 - 12 - 10 + 12 = -37.$$

в) по теореме Лапласа.

Разложим определитель по первому столбцу:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & -1 & 2\\ 4 & 5 & -2\end{vmatrix} = 1\cdot A_{11} + 3\cdot A_{21} + 4\cdot A_{31} = (-1)^{1+1}\cdot M_{11} + 3\cdot(-1)^{2+1}\cdot M_{21} +$$

$$+ 4\cdot(-1)^{3+1}\cdot A_{31} = \begin{vmatrix}-1 & 2\\ 5 & -2\end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix}2 & -3\\ 5 & -2\end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{vmatrix} = (-1)\cdot(-2) - 2\cdot 5 -$$

$$-3(2\cdot(-2) - (-3)\cdot 5) + 4(2\cdot 2 - (-3)\cdot(-1)) = 2 - 10 - 3(-4 + 15) + 4(4 - 3) =$$

$$= -8 - 33 + 4 = -37.$$

Содержание практической работы:

Задание. Вычислить определители

1) $\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & 5\end{vmatrix}$; **2)** $\begin{vmatrix}3 & 5\\ -2 & 8\end{vmatrix}$; **3)** $\begin{vmatrix}-5 & -6\\ 1 & 8\end{vmatrix}$; **4)** $\begin{vmatrix}-8 & -3\\ 4 & -5\end{vmatrix}$; **5)** $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 7\\ 2 & 6 & 13\end{vmatrix}$;

6) $\begin{vmatrix}7 & 8 & 3\\ -3 & 1 & 4\\ 2 & 6 & 5\end{vmatrix}$; **7)** $\begin{vmatrix}11 & 5 & 6\\ 1 & -2 & -3\\ 7 & 4 & 4\end{vmatrix}$; **8)** $\begin{vmatrix}3 & 1 & -2\\ 2 & 10 & 5\\ 4 & -1 & 3\end{vmatrix}$; **9)** $\begin{vmatrix}3 & 9 & 1\\ 7 & 12 & 5\\ 2 & -3 & -2\end{vmatrix}$;

10) $\begin{vmatrix}20 & 3 & 7\\ -5 & -6 & 1\\ 2 & 4 & -3\end{vmatrix}$; **11)** $\begin{vmatrix}1 & -2 & -3\\ 9 & 5 & 7\\ 8 & 4 & 3\end{vmatrix}$; **12)** $\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 7 & 4 & 8\\ -9 & 2 & -3\end{vmatrix}$;

13) $\begin{vmatrix}1 & 2 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 1 & 5\\ 1 & -2 & 0 & 3\\ -2 & -4 & 1 & 6\end{vmatrix}$; **14)** $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$; **15)** $\begin{vmatrix}-2 & -5 & -1 & 3\\ 2 & -5 & 9 & 1\\ 3 & -1 & 5 & -5\\ 2 & 18 & -7 & -10\end{vmatrix}$;

16) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 4\end{vmatrix}$; **17)** $\begin{vmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 3 & 5\\ 5 & 3 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 1 & 0\end{vmatrix}$; **18)** $\begin{vmatrix}4 & 3 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{vmatrix}$.

Практическая работа №14: Вычисление обратных матриц 2 и 3 порядков

Учебные цели: закрепить и систематизировать знания по данной теме; закрепить навыки вычисления обратных матриц второго и третьего порядка; определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

Методические указания по выполнению работы: изучить краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия; изучить условие задания практического занятия; при выполнении работы соблюдать последовательность действий; ответить на контрольные вопросы; оформить отчет по практической работе.

Порядок выполнения работы:

Краткий теоретический материал

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя D=$|a_{ij}|$, где i и j меняются от 1 до n, называется такой новый определитель, который получается из данного определителя вычеркиванием строки и столбца, содержащих данный элемент.

Например, минор M_{12} , соответствующий элементу a_{12} определителя $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ получается, если вычеркнуть из определителя D первую строку и второй столбец, т.е. $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя D называется минор M_{ij} этого элемента, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$

Т.о. $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

Пример 1

Найти алгебраические дополнения элементов a_{13}, a_{21}, a_{31} определителя $D = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

Решение:

$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 5 - 2 \cdot 3) = -4$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -6$

Квадратная матрица А *называется вырожденной, если е определитель равен 0 и невырожденной, если ее определитель отличен от нуля.*

Если А – квадратная матрица, то обратной по отношению к А называется матрица, которая будучи умноженной на А (как справа, так и слева), дает единичную матрицу.

A^{-1} – обратная матрица

$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$

При условии D=$|A|$≠0 обратная матрица находится по формуле

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{A_{11}}{D} & \frac{A_{12}}{D} & \cdots & \frac{A_{n1}}{D} \\ \frac{A_{12}}{D} & \frac{A_{22}}{D} & \cdots & \frac{A_{n2}}{D} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{A_{1n}}{D} & \frac{A_{2n}}{D} & \cdots & \frac{A_{nn}}{D} \end{vmatrix}$$

Вычисление обратных матриц второго и третьего порядка

Для нахождения обратной матрицы используют следующую схему:

1. Находят определитель матрицы А.
2. Находят алгебраические дополнения всех элементов a_{ij} матрицы А и записывают новую матрицу.

Меняют местами столбцы полученной матрицы (транспонируют матрицу)

3. Умножают полученную матрицу на $\frac{1}{D}$

Пример 2

Найти матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

Решение:

1. Найдем определитель матрицы А:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\ 7+2\cdot2\cdot3+0\cdot0\cdot3-3\cdot(-1)\cdot3-0\cdot2\cdot1-0\cdot2\cdot7 = -7+12+9 = 14$$

Поскольку D≠0, то матрица А невырожденная и, значит, можно найти обратную матрицу.

2. Найдем алгебраические дополнения всех элементов матрицы А

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -7$ $A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 6$

$A_{13} = (-1)^{1+3}|0| = 3$

$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -14$ $A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -2$

$A_{23} = 6$

$A_{31} = 7$ $A_{32} = -2$ $A_{33} = -1$

Запишем обратную матрицу $\begin{pmatrix} -7 & 6 & 3 \\ -14 & -2 & 6 \\ 7 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

3. Транспонируем матрицу:

$$\begin{pmatrix} -7 & -14 & 7 \\ 6 & -2 & -2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Умножим полученную матрицу на $\frac{1}{D} = \frac{1}{14}$

$$A^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -7 & -14 & 7 \\ 6 & -2 & -2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix}$$

Проверим полученный ответ

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Задания:

1. Найти матрицы, обратные данным:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

2. Найти матрицы, обратные данным:

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Контрольные вопросы:

1) Что такое минор?
2) Что такое алгебраическим дополнением?

Практическая работа №15,16: Применение формул Крамера к решению систем линейных уравнений. Решение линейных систем уравнений методом Гаусса

Задание к работе

1. Методом Крамера найти решение системы линейных алгебраических уравнений.

2. Установить, что система уравнений имеет единственное решение, и найти его с помощью обратной матрицы.

3. Методом Гаусса (или методом исключения неизвестных) найти решение системы линейных алгебраических уравнений.

4. Найти общее решение однородной системы линейных алгебраических уравнений.

Образец решения варианта.

1. Методом Крамера найти решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = 3 \\ 3x + 4y - 5z = -8 \\ 2y + 7z = 17 \end{cases}.$$

Решение.

Решение системы находим по формулам Крамера

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta},\ y=\frac{\Delta_2}{\Delta},\ z=\frac{\Delta_3}{\Delta}\ .$$

Вычислим определитель системы Δ

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -1 & -3\\ 3 & 4 & -5\\ 0 & 2 & 7\end{vmatrix}=56-18+20+21=79.$$

Последовательно заменив в Δ, первый, второй и третий столбцы столбцом свободных членов, получим соответственно

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}3 & -1 & -3\\ -8 & 4 & -5\\ 17 & 2 & 7\end{vmatrix}=395,\ x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{395}{79}=5\ ;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2 & 3 & -3\\ 3 & -8 & -5\\ 0 & 17 & 7\end{vmatrix}=-158,\ y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=-\frac{158}{79}=-2\ ;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 3 & 4 & -8\\ 0 & 2 & 17\end{vmatrix}=237,\ z=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{237}{79}=3.$$

Ответ : $x=5,\ y=-2,\ z=3$

2. Дана система из трех уравнений с тремя неизвестными. Установить, что система уравнений имеет единственное решение и найти его с помощью обратной матрицы

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=4\\ 3x_1\quad\ +2x_3=-8\\ 4x_1-2x_2+5x_3=0\end{cases}.$$

Решение.

Если определитель системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение (теорема Крамера).

Вычислим определитель данной системы :

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 2\\ 4 & -2 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 2\\ 5 & 0 & 4\end{vmatrix}=2\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix}=-2\cdot(12-10)=-4\neq 0,$$

следовательно, система имеет единственное решение.

Данную систему можно записать в матричной форме :

$$\boldsymbol{A\cdot X = B}\text{ , где } \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 2\\ 4 & -2 & 5\end{pmatrix},\ \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4\\ -8\\ 0\end{pmatrix}.$$

Так как $\det A = \Delta = -4 \neq 0$, то для матрицы A существует обратная матрица A^{-1}. Умножив матричное уравнение $A\cdot X = B$ слева на A^{-1}, получим $A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B$, откуда $E\cdot X = A^{-1}\cdot B$, или $X = A^{-1}\cdot B$.

Найдем обратную матрицу A^{-1} по формуле

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} .

$$A_{11}=\begin{vmatrix}0 & 2\\ -2 & 5\end{vmatrix}=4,\ A_{12}=-\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-7,\ A_{13}=\begin{vmatrix}3 & 0\\ 4 & -2\end{vmatrix}=-6,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ -2 & 5\end{vmatrix}=-8,\ A_{22}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 4 & 5\end{vmatrix}=9,\ A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & -2\end{vmatrix}=10,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4,\ A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-5,\ A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}=-6.$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-4}\cdot\begin{pmatrix}4 & -8 & 4\\ -7 & 9 & -5\\ -6 & 10 & -6\end{pmatrix}.$$

Тогда $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{-4}\cdot\begin{pmatrix}4 & -8 & 4\\ -7 & 9 & -5\\ -6 & 10 & -6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\ -8\\ 0\end{pmatrix}=$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}4\cdot 4+(-8)\cdot(-8)+4\cdot 0\\ (-7)\cdot 4+9\cdot(-8)+(-5)\cdot 0\\ (-6)\cdot 4+10\cdot(-8)+(-6)\cdot 0\end{pmatrix}=-\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}80\\ -100\\ -104\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-20\\ 25\\ 26\end{pmatrix}.$$

Ответ : $x_1=-20,\ x_2=25,\ x_3=26$.

3. Методом Гаусса (или методом исключения неизвестных) найти решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6\\ 2x_1-x_2-2x_3-3x_4=8\\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=4\\ 2x_1-3x_2+2x_3+x_4=-8\end{cases}.$$

Решение.

Выпишем расширенную матрицу $\boldsymbol{B}$ данной системы и приведем ее к ступенчатому виду

$$\boldsymbol{B} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & -2 & -3 & 8 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right).$$

Последовательно умножим первую строку на (–2) и прибавим ее ко второй строке, затем умножим на (–3) и прибавим к третьей строке, умножим на (–2) и прибавим к четвертой строке, получим

$$\boldsymbol{B} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array}\right).$$

Ко второй строке полученной матрицы прибавим третью строку, умноженную на (-1), затем во вновь полученной матрице умножим третью строку на $\left(-\frac{1}{2}\right)$, четвертую – на (–1), затем последовательно умножим вторую строку на 2 и прибавим ее к третьей строке, умножим на 7 и прибавим к четвертой строке, получим

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & -7 & 10 \\ 0 & 2 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 7 & 4 & -5 & 20 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 9 & -18 & 27 \\ 0 & 0 & 18 & -54 & 90 \end{array}\right).$$

Третью строку полученной матрицы умножим на $\frac{1}{9}$, четвертую – на $\frac{1}{18}$, затем третью строку умножим на (–1) и прибавим к четвертой строке, получим

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Найденная матрица имеет треугольный вид; по этой матрице запишем систему уравнений, эквивалентную исходной системе,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ \quad - x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 10 \\ \qquad x_3 - 2x_4 = 3 \\ \qquad\quad - x_4 = 2 \end{cases}.$$

Последовательно находим неизвестные, начиная с последнего уравнения, $x_4 = -2$; подставим в третье уравнение найденное x_4, вычислим x_3, $x_3 = -1$; затем из второго уравнения находим x_2, $x_2 = 2$; из первого уравнения получим x_1, $x_1 = 1$.

Ответ: $x_1 = 1\,,\ x_2 = 2\,,\ x_3 = -1\,,\ x_4 = -2$.

4. Найти общее решение однородной системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 5x + 3y = 0 \\ 10x + 6y = 0 \end{cases}.$$

Решение.

Элементарными преобразованиями строк приведем матрицу системы $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$ к эквивалентной матрице $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, которой соответствует уравнение $5x + 3y = 0$, эквивалентное исходной системе. Таким образом, общее решение может быть записано в форме $y = -\frac{5}{3}x\,,\ x \in R$, или $x = -\frac{3}{5}y\,,\ y \in R$. Решений бесчисленное множество – любая пара, связанная указанной зависимостью, обращает левые части уравнений данной системы в нуль. В системе $n = 2$ - число неизвестных и число уравнений. $rangA = rangB = 1 < n$, $A -$ матрица системы, $B -$ расширенная матрица системы. В силу теоремы Кронекера-Капелли система имеет бесчисленное множество решений, зависящих от одного параметра $(n - r = 2 - 1 = 1)$. Иногда общее решение удобнее использовать в форме

$$x = 3t\,,\ y = -5t\,,\ t \in R\,.$$

Практическая часть

1. Методом Крамера найти решение системы линейных алгебраических уравнений.

2. Установить, что система уравнений имеет единственное решение, и найти его с помощью обратной матрицы.

3. Методом Гаусса (или методом исключения неизвестных) найти решение системы линейных алгебраических уравнений.

4. Найти общее решение однородной системы линейных алгебраических уравнений

Вариант 1

1.1 $\begin{cases} 2x - y - 2z = -1 \\ 2y + z = 3 \\ -2x - 2y + 2z = -2 \end{cases}$ 1.2 $\begin{cases} 2x + y - 3z = 7 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 3x + 2y + z = 6 \end{cases}$

1.3 $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 11 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 - 4x_2 + 8x_3 + x_4 = 15 \end{cases}$ 1.4 $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases}$

Вариант 2

2.1 $\begin{cases} 3x + y - 3z = 8 \\ 3y - z = 7 \\ 3x - y - 3z = 4 \end{cases}$ 2.2 $\begin{cases} 4x + y + 4z = -3 \\ x + y + 2z = -4 \\ 2x - y + 2z = 3 \end{cases}$

2.3 $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 6 \\ 2x - y + 3z = -4 \\ x + 3y - 2z = 5 \\ 3x + 2y + z = 1 \end{cases}$ 2.4 $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases}$

Вариант 3

3.1 $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 4 \\ 4x + 9y + 16z = 6 \\ 8x + 27y + 64z = -2 \end{cases}$ 3.2 $\begin{cases} 3x - y + z = 12 \\ x + 2y + 4z = 6 \\ 5x + y + 2z = 3 \end{cases}$

3.3 $\begin{cases} 3x - 2y + 4z + 5t = 5 \\ x - y - z + t = 0 \\ 2x - 2y + 3z - 3t = 1 \\ 4x + 2y - 6z - t = 0 \end{cases}$ 3.4 $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 2y - 6x = 0 \end{cases}$

Вариант 4

4.1 $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$ 4.2 $\begin{cases} 2x - y + 3z = -4 \\ x + 3y - z = 11 \\ x - 2y + 2z = -7 \end{cases}$

4.3 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_1 - 7x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$ 4.4 $\begin{cases} 3y - x = 0 \\ 6y - 2x = 0 \end{cases}$

Практическая работа №17: Решение дифференциального уравнения первого порядка с разделёнными и разделяющимися переменными Решение линейных дифференциальных уравнений 1 порядка
1 порядка

Цель работы: научиться решать дифференциальные уравнения первого порядка.

Содержание работы.

Основные понятия.

1 Дифференциальные уравнения – это уравнения, содержащие искомые функции, их производные различных порядков и независимые переменные.

2 Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок, входящих в него производных.

3 Решить дифференциальное уравнение – это значит, найти множество функций $y = f(x) + C$, которые удовлетворяют данному уравнению. Такое множество функций называется общим решением дифференциального уравнения.

4 Частное решение дифференциального уравнения — это решение, не содержащее произвольных постоянных

5 Обыкновенным дифференциальным уравнением 1-го порядка с одной неизвестной функцией называется соотношение $F(x, y, y') = 0$ между независимым переменным x, искомой функцией y и её производной

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

6 Если уравнение может быть разрешено относительно производной, то получается уравнение $y' = f(x, y)$, разрешенное относительно производной.

7 Дифференциальные уравнения $f(y)\,dy = g(x)\,dx$ называют уравнениями с разделенными переменными

8 Линейное уравнение первого порядка – это уравнение вида: $y' + p(x) \cdot y = q(x)$

9 Если $q(x) = 0$, то уравнение называется однородным, если $q(x) \neq 0$, то уравнение неоднородное

Задание

Исходные данные:

Решить дифференциальное уравнение $y'\cos^2 x + y = tgx$.

Решение:

а) Решим уравнение методом вариации постоянных (методом Лагранжа):

– найдем общее решение однородного уравнения

$$y'\cos^2 x + y = 0$$

$$y'\cos^2 x = -y; \quad \frac{dy}{dx}\cos^2 x = -y;$$

$$dy\cos^2 x = -y\,dx; \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$\int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dx}{\cos^2 x}; \quad \ln|y| = -tgx + C$$

$$y = e^{-tgx+C}; \quad y = e^{-tgx}e^{C}; \quad y = Ce^{-tgx}$$

– теперь полагаем $y = C(x)e^{-tgx}$; $y' = C'(x)e^{-tgx} - C(x)\dfrac{e^{-tgx}}{\cos^2 x}$, подставляем y и y' в исходное уравнение: $C'(x)e^{-tgx}\cos^2 x - C(x)\dfrac{e^{-tgx}}{\cos^2 x}\cos^2 x + C(x)e^{-tgx} = tgx$

$$C'(x)e^{-tgx}\cos^2 x = tgx; \quad C(x) = \int\frac{e^{tgx}tgx}{\cos^2 x}dx$$

$$\int \frac{e^{tgx} tgx}{\cos^2 x} dx = \begin{vmatrix} t = tgx \\ dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{vmatrix} = \int te^t dt = \begin{vmatrix} u = t;\ du = dt \\ dv = e^t dt;\ v = e^t \end{vmatrix} =$$
$$te^t - \int e^t dt = te^t - e^t + C = e^{tgx}(tgx - 1) + C$$

– находим общее решение дифференциального уравнения

$$y = e^{-tgx}\left(e^{tgx}(tgx-1) + C\right) = tgx - 1 + Ce^{-tgx}$$

б) Решим это уравнение методом подстановки (методом Бернулли):

– для этого представим $y = u(x) \cdot v(x)$; $\quad y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

– подставим у и у' в исходное уравнение:

$$u'(x)v(x)\cos^2 x + u(x)v'(x)\cos^2 x + u(x) \cdot v(x) = tgx$$
$$u'(x)v(x)\cos^2 x + u(x) \cdot \left(v'(x)\cos^2 x + v(x)\right) = tgx$$

– найдем частное решение уравнения:

$$v'(x)\cos^2 x + v(x) = 0; \quad v'(x) = -\frac{v(x)}{\cos^2 x}; \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{\cos^2 x}$$
$$\ln|v| = -tgx; \quad v = e^{-tgx}$$

– найдем общее решение уравнения:

$$u'(x)v(x)\cos^2 x = tgx; \quad u'(x)e^{-tgx}\cos^2 x = tgx$$

$$u(x) = \int \frac{e^{tgx} tgx}{\cos^2 x} dx = \begin{vmatrix} t = tgx \\ dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{vmatrix} = \int te^t dt = \begin{vmatrix} u = t;\ du = dt \\ dv = e^t dt;\ v = e^t \end{vmatrix} =$$
$$te^t - \int e^t dt = te^t - e^t + C = e^{tgx}(tgx - 1) + C$$

– находим общее решение дифференциального уравнения

$$y = e^{-tgx}\left(e^{tgx}(tgx-1) + C\right) = tgx - 1 + Ce^{-tgx}$$

Ответ: $y = tgx - 1 + Ce^{-tgx}$

Задания к практической работе.

1 $y' = x + y$

2 $xy' - y = x^2 \cos x$

3 $y' = x + \frac{y}{x} - y$

4 $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

5 $y' - 2y + 3e^{2x} = 0$

6 $y' + \frac{2y}{x} = 3x^2 y^{\frac{4}{3}}$

7 $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$

8 $xy' + 2y = x^3$

9 $y' \cos x + y = 1 - \sin x$

10 $xy' + y - 2x = 0$

11 $y' + x^2 y = x^2$

12 $xy' + y = 3$

13 $y' \sin x - y \cos x = 1$

14 $(1 + x^2) y' - xy = 2x$

15 $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$

16 $y' + y \cos x = \sin 2x$

17 $xy' + y = \ln x + 1$

18 $xy' - 2y = 3x^5$

19 $y' + x^2 y = 2e^{-\frac{x^3}{3}}$

20 $y' + 3y\, tg 3x = \sin 6x$

21 $y' - y\, tgx = \frac{1}{\cos^3 x}$

22 $y' + 5x^4 y = -10x^9$

23 $y' - \frac{y}{x} = x$

24 $xy' + y - 4x = 0$

25 $y' + 2y\, tgx = \cos^4 x$

26 $y' - y = e^x$

27 $xy' + y - 2x = 0$

28 $xy' - 2y = 3x^5$

29 $y' + 5x^4 y = -10x^9$

30 $y' + x^2 y = x^2$

Практическая работа №11 Решение задач на перестановки, сочетания, размещения

1) **Теоретический этап.**

Опорный конспект.

Определение.

Произведение всех натуральных чисел от **1** до **n** включительно называют ***n – факториалом*** и пишут $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.

Перестановки	Размещения	Сочетания
n элементов n мест	n элементов m мест	n элементов m мест
порядок имеет значение	порядок имеет значение	порядок не имеет значение
P = n!	1) $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ 2) A_n^m = n· (n – 1)·(n – 2) · …·(n – m +1)	$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

0!=1
1!=1

2)

Подготовительный этап.

Перепишите и заполните пропуски:

Пример 1. За столом пять мест. Сколькими способами можно расставить пятерых гостей?

Решение: $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = \ldots$ способов

Ответ: 120 способов.

Пример 2. а) Сколько трехзначных чисел можно записать, используя цифры 1,3,6,7,9, если каждая их них может быть использована в записи только один раз?

Решение: Искомое число вариантов равно числу размещений из 5 элементов по 3 элемента, т.е. по формуле получаем: $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = \ldots$ чисел.

Ответ: 60 чисел.

б) Из 20 студентов надо выбрать старосту, его заместителя и редактора газеты. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: Искомое число вариантов равно числу размещений из 20 элементов по 3 элемента, т.е. по формуле получаем: $A_{20}^3 = 20 \cdot 19 \cdot 18 = \ldots$ способов.

Ответ: 6840 способов.

Пример 3. а) Из 15 членов туристической группы надо выбрать трех дежурных. Сколькими способами можно сделать этот выбор?

Решение: каждый выбор отличается от другого хотя бы одним дежурным. Значит, здесь речь идет о сочетаниях из 15 элементов по 3. Следовательно, по формуле получаем

$$C_{15}^3 = \frac{15!}{3! \cdot (15-3)!} = \frac{15!}{3! \cdot 12!} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 13 \cdot 7 \cdot 5 = \ldots \textit{способов}$$

Ответ: 455 способов.

б) Студентам дали список из 10 книг, которые рекомендуется прочитать во время каникул. Сколькими способами студент может выбрать из них 6 книг?

Решение: Выбор 6 из 10 без учёта порядка: $C_{10}^6 = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 = \ldots$ способов.

Ответ: 210 способов.

3) Практический этап.

1. За столом семь мест. Сколькими способами можно расставить семерых гостей?
2. а) Сколько трехзначных чисел можно записать, используя цифры 1,2,4,6,7,9, если каждая их них может быть использована в записи только один раз?

   б) Из 15 учащихся надо выбрать старосту, его заместителя и редактора газеты. Сколькими способами это можно сделать?

3. а) Из 25 членов туристической группы надо выбрать трех дежурных. Сколькими способами можно сделать этот выбор?

   б) Учащимся дали список из 10 книг, которые рекомендуется прочитать во время каникул. Сколькими способами ученик может выбрать из них 7 книг?

Пример 4. Вычислить $\frac{6!-4!}{3!}$

Пример 5. Упростить $\frac{(n-1)!}{(n+2)!}$

Пример 6. Вычислить $\frac{P_6 - P_5}{P_4}$

Пример 7. Вычислить A_8^4; C_{10}^4

4) Дополнительные задания*.

Вариант 1

1.Вычислить $\frac{5!3!}{6!}$

2.Упростить $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$

3.Вычислить $\frac{P_4 + P_6}{P_3}$

4.Вычислить A_{13}^5; C_8^4

Вариант 2

1.Вычислить $\frac{5!}{3!+4!}$

2.Упростить $\frac{n!}{(n-2)!}$

3.Вычислить $\frac{P_{20}}{P_4 \cdot P_{16}}$

4.Вычислить A_{25}^2; C_{36}^5

Практическая работа №18,19,20: Вычисление вероятности событий с применением теорем

Цель: Отработка навыков вычисления вероятности событий с применением теорем

Классическое определение вероятности

Вероятностью события А называется отношение числа благоприятных для А исходов к числу всех равновозможных исходов: **Р (А) =** $\boldsymbol{\frac{m}{n}}$

где n — общее число равновозможных исходов, m — число исходов, благоприятствующих событию А.

Противоположные события

Событие, противоположное событию А, обозначают Ā. При проведении испытания всегда происходит ровно одно из двух противоположных событий и

Объединение несовместных событий

Два события A и B называют несовместными, если отсутствуют исходы, благоприятствующие одновременно как событию A, так и событию B.

Если события A и B несовместны, то вероятность их объединения равна сумме вероятностей событий A и B: **P(A U B) =P(A) + P(B)**

Пересечение независимых событий

Два события A и B называют независимыми, если вероятность каждого из них не зависит от появления или непоявления другого события.

Событие C называют пересечением событий A и B (пишут C = A∩B), если событие C означает, что произошли оба события A и B.

Если события A и B независимы, то вероятность их пересечения равна произведению вероятностей событий A и B:

P(A∩B) = P(A) • P(B)

Формула сложения вероятностей совместных событий:

P(A U B) =P(A) + P(B) – P(A∩B)

1. Из 1000 собранных на заводе телевизоров 5 штук бракованных. Эксперт проверяет один наугад выбранный телевизор из этой 1000. Найдите вероятность того, что проверяемый телевизор окажется бракованным.

Решение. При выборе телевизора наугад возможны 1000 исходов, событию A «выбранный телевизор — бракованный» благоприятны 5 исходов. По определению вероятности P(A) = 5÷1000 = 0,005. Ответ: 0,005.

2. В урне 9 красных, 6 жёлтых и 5 зелёных шаров. Из урны наугад достают один шар. Какова вероятность того, что этот шар окажется жёлтым?

Решение. Общее число исходов равно числу шаров: 9 + 6 + 5 = 20. Число исходов, благоприятствующих данному событию, равно 6. Искомая вероятность равна 6÷20 = 0,3. Ответ: 0,3.

3. Петя, Вика, Катя, Игорь, Антон, Полина бросили жребий — кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должен будет мальчик.

Решение. Вероятность события равна отношению количества благоприятных случаев к количеству всех случаев. Благоприятными случаями являются 3 случая, когда игру начинает Петя, Игорь или Антон, а количество всех случаев 6. Поэтому искомое отношение равно 3:6=0,5. Ответ: 0,5.

4. В чемпионате мира участвуют 16 команд. С помощью жребия их нужно разделить на четыре группы по четыре команды в каждой. В ящике вперемешку лежат

карточки с номерами групп: 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4. Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда России окажется во второй группе?

Решение: Обозначим через А событие «команда России во второй группе». Тогда количество благоприятных событий $m = 4$ *(четыре карточки с номером 2), а общее число равновозможных событий* $n = 16$ *(16 карточек) по определению вероятности P= 4: 16 = 0,25.* *Ответ:0,25*

5. В лыжных гонках участвуют 11 спортсменов из России, 6 спортсменов из Норвегии и 3 спортсмена из Швеции. Порядок, в котором спортсмены стартуют, определяется жребием. Найдите вероятность того, что первым будет стартовать спортсмен не из России.

Решение. Всего спортсменов 11 + 6 + 3 = 20 человек. Поэтому вероятность того, что первым будет стартовать спортсмен не из России равна 9:20 = 0,45. Ответ: 0,45.

6. На каждые 1000 электрических лампочек приходится 5 бракованных. Какова вероятность купить исправную лампочку?

Решение. На каждые 1000 лампочек приходится 5 бракованных, всего их 1005. Вероятность купить исправную лампочку будет равна доле исправных лампочек на каждые 1005 лампочек, то есть 1000:1005=0,995.Ответ: 0,995.

7. В группе туристов 8 человек. С помощью жребия они выбирают шестерых человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин? *6 : 8=0,75.*

8. В чемпионате по футболу участвуют 16 команд, которые жеребьевкой распределяются на 4 группы: A, B, C и D. Какова вероятность того, что команда России не попадает в группу А?

Решение. Каждая команда попадет в группу с вероятностью 0,25. Таким образом, вероятность того, что команда не попадает в группу равна 1-0,25=0,75. Ответ:0,75

9. На турнир по шахматам прибыло 26 участников в том числе Коля и Толя. Для проведения жеребьевки первого тура участников случайным образом разбили на две группы по 13 человек. Найти вероятность того, что Коля и Толя попадут в разные группы. *Решение. Всего 26 мест. Пусть Коля займет случайное место в любой группе. Останется 25 мест, из них в другой группе 13. Исходом считаем выбор места для Толи. Благоприятных исходов 13. P=13/25 = 0,52. Ответ:0,52*

10. В классе 16 учащихся, среди них два друга —Вадим и Сергей. Учащихся случайным образом разбивают на 4 равные группы. Найдите вероятность того, что Вадим и Сергей окажутся в одной группе.

Решение. Если Сергею первому досталось некоторое место, то Олегу остаётся 15 мест. Из них 3 — в той же группе, где Сергей. Искомая вероятность равна 3/15. Ответ:0,2

11. В классе 21 учащийся, среди них два друга — Вадим и Олег. Класс случайным образом разбивают на 3 равные группы. Найдите вероятность того, что Вадим и Олег окажутся в одной группе.

Решение. Пусть один из друзей находится в некоторой группе. Вместе с ним в группе окажутся 6 человек из 20 оставшихся учащихся. Вероятность того, что друг окажется среди этих 6 человек, равна 6 : 20 = 0,3. Ответ: 0,3

12. Перед началом первого тура чемпионата по настольному теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 16 спортсменов, среди которых 7 участников из России, в том числе Платон Карпов. Найдите вероятность того, что в первом туре Платон Карпов будет играть с каким-либо спортсменом из России? 6:15=0,4. *Ответ:0,4.*

13. Перед началом первого тура чемпионата по шашкам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 шашистов, среди которых 3 участника из России, в том числе Василий Лукин. Найдите вероятность того, что в первом туре Василий Лукин будет играть с каким-либо шашистом из России? *2: 25=0,08. Ответ: 0,08.*

14. В классе 26 учащихся, среди них два друга — Сергей и Андрей. Учащихся случайным образом разбивают на 2 равные группы. Найдите вероятность того, что Сергей и Андрей окажутся в одной группе. *Ответ 12 : 25 = 0,48.*

15. В классе 21 ученик, среди них 2 друга – Тоша и Гоша. На уроке физкультуры класс случайным образом разбивают на 3 равные группы. Найдите вероятность того, что Тоша и Гоша попали в одну группу. *Ответ 6 : 20 = 0,3.*

16. В классе 21 учащийся, среди них две подруги - Аня и Нина. Класс случайным образом делят на семь групп, по 3 человека в каждой. Найдите вероятность того, что Аня и Нина окажутся в одной группе. *Ответ: 2: 20 = 0,1.*

17. Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали идти. Найдите вероятность того, что часовая стрелка остановилась, достигнув отметки 7, но не дойдя до отметки 1. *Ответ. 6 : 12= 0,5 (6 делений между 12 и 7, всего 12 делений)*

18. Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали ходить. Найдите вероятность того, что часовая стрелка застыла, достигнув отметки 6, но не дойдя до отметки 9 часов. *3:12 = 0,25*

При решении задач с монетами число всех возможных исходов можно посчитать по формуле $n=2^{\alpha}$, где α –количество бросков

19. В случайном эксперименте симметричную монету бросают 2 раза. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно 1 раз.

Решение. Всего возможны четыре исхода: решка-решка, решка-орёл, орёл-решка, орёл-орёл. Орёл выпадает ровно один раз в двух случаях, поэтому вероятность того, что орёл выпадет ровно один раз равна 2:4=0,5. Ответ: 0,5.

20. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что орёл не выпадет ни разу. *Ответ: 1:4=0,25*

21. В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что орёл не выпадет ни разу. *Решение. 1:8=0,125 Ответ. 0,125*

22. В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет ровно 2 раза.

Решение. *Составим список возможных вариантов. Бросают 2 раза может выпасть*
О - Орел, Р - Решка:
ОО, ОР, РО, РР. Всего 4 исхода из них только один случай удовлетворяет условию.
Вероятность (Р) = 1 / 4 = 0.25. ***Ответ: 0.25***

23. В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что решка не выпадет ни разу.

Решение. Всего исходов 2^4 = 16, благоприятных 1 (ОООО). 1:16 = 0,0625. Ответ: 0,0625

При решении задач с кубиками число всех возможных исходов можно посчитать по формуле $n=6^{\alpha}$, где α –количество бросков

24. Определите вероятность того, что при бросании игрального кубика (правильной кости) выпадет нечетное число очков.

Решение. При бросании кубика равновозможных шесть различных исходов. Событию *"выпадет нечётное число очков" удовлетворяют три случая: когда на кубике выпадает 1, 3 или 5 очков. Поэтому вероятность того, что на кубике выпадет нечётное число очков равна 3:6=0,5. Ответ: 0,5.*

25. Определите вероятность того, что при бросании кубика выпало число очков, не большее 3.

Решение. При бросании кубика равновозможны шесть различных исходов. Событию "выпадет не больше трёх очков" удовлетворяют три случая: когда на кубике выпадает 1, 2, или 3 очка. Поэтому вероятность того, что на кубике выпадет не больше трёх очков равна 3:6=0,5 Ответ: 0,5.

26. Игральную кость бросают дважды. Найдите вероятность того, что оба раза выпало число, большее 3.

Решение. При бросании кубика 6^2= 36 различных исходов. Событию "выпадет больше трёх очков" удовлетворяют три случая: когда на кубике выпадает 4, 5, или 6 очков, благоприятных исходов 9 (4,4; 4,5; 4,6; 5,4; 5,5; 5,6; 6,4; 6,5; 6,6.) Ответ: 9: 36 = 0,25.

27. В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 7 очков. Результат округлите до сотых.

Решение. При бросании кубика 6^3= 216 различных исходов, благоприятных 14. 14 : 216 = 0,07. Ответ: 0,07.

28. Коля выбирает трехзначное число. Найдите вероятность того, что оно делится на 5.

Решение. Всего трехзначных чисел 900. На пять делится каждое пятое их них, то есть таких чисел 900:5=180. Вероятность того, что Коля выбрал трехзначное число, делящееся на 5, определяется отношением количества трехзначных чисел, делящихся на 5, ко всему количеству трехзначных чисел: 180:900=0,2. Ответ: 0,2.

29. Для экзамена подготовили билеты с номерами от 1 до 50. Какова вероятность того, что наугад взятый учеником билет имеет однозначный номер?

Решение. Всего было подготовлено 50 билетов. Среди них 9 были однозначными. Таким образом, вероятность того, что наугад взятый учеником билет имеет однозначный номер равна 9:50=0,18. Ответ: 0,18.

30. В мешке содержатся жетоны с номерами от 5 до 54 включительно. Какова вероятность, того, что извлеченный наугад из мешка жетон содержит двузначное число?

Решение. Всего в мешке жетонов - 50. Среди них 45 имеют двузначный номер. Таким образом, вероятность, того, что извлеченный наугад из мешка жетон содержит двузначное число равна 45 : 50 = 0,9. Ответ: 0.9.

31. Какова вероятность того, что случайно выбранное натуральное число от 10 до 19 делится на 3? *3 : 10 = 0,3. Ответ: 0,3.*

Противоположные события.

32. Вероятность того, что новая шариковая ручка пишет плохо (или не пишет), равна 0,19. Покупатель в магазине выбирает одну такую ручку. Найдите вероятность того, что эта ручка пишет хорошо.

Решение. Вероятность того, что ручка пишет хорошо, равна 1 − 0,19 = 0,81. Ответ: 0,81.

33. Вероятность того, что в случайный момент времени температура тела здорового человека окажется ниже 36,8°С равна 0,87. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени у здорового человека температура тела окажется 36,8°С или выше. *Ответ. 1-0,87=0,13*

34. При изготовлении подшипников диаметром 67 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного не больше, чем на 0,01 мм, равна 0,965. Найдите вероятность того, что случайный подшипник будет иметь диаметр меньше чем 66,99 мм или больше чем 67,01 мм.
Решение. По условию, диаметр подшипника будет лежать в пределах от 66,99 до 67,01 мм с вероятностью 0,965. Поэтому искомая вероятность противоположного события равна 1 − 0,965 = 0,035. Ответ: 0,035.

Несовместные и независимые события. **35. На экзамене по геометрии школьнику достаётся одна задача из сборника. Вероятность того, что эта задача по теме «Углы», равна 0,1. Вероятность того, что это окажется задача по теме «Параллелограмм», равна 0,6. В сборнике нет задач, которые одновременно относятся к этим двум темам. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется задача по одной из этих двух тем.** *Решение. Суммарная вероятность несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: P=0,6+ 0,1 = 0,7. Ответ: 0,7.*

36. Вероятность того, что на тесте по биологии учащийся О. верно решит больше 11 задач, равна 0,67. Вероятность того, что О. верно решит больше 10 задач, равна 0,74. Найдите вероятность того, что О. верно решит ровно 11 задач.
Решение. Рассмотрим события А = «учащийся решит 11 задач» и В = «учащийся решит больше 11 задач». Их сумма — событие А + В = «учащийся решит больше 10 задач». События А и В несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий: P(А + В) = P(А) + P(В). Тогда, используя данные задачи, получаем: 0,74 = P(А) + 0,67, откуда P(А) = 0,74 − 0,67 = 0,07. Ответ: 0,07.

37. Вероятность того, что на тесте по химии учащийся П. верно решит больше 8 задач, равна 0,48. Вероятность того, что П. верно решит больше 7 задач, равна 0,54. Найдите вероятность того, что П. верно решит ровно 8 задач. *Решение. Вероятность решить несколько задач складывается из суммы вероятностей решить каждую из этих задач. Больше 8: решить 9-ю, 10-ю ... Больше 7: решить 8-ю, 9-ю, 10-ю ...Вероятность решить 8-ю = 0,54-0,48=0,06. Ответ:0.06*

38. На клавиатуре телефона 10 цифр, от 0 до 9. Какова вероятность того, что случайно нажатая цифра будет меньше 4? *Ответ: 4 : 10 = 0,4.*

39. Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые три раза попал в мишени, а последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.
Решение. Поскольку биатлонист попадает в мишени с вероятностью 0,8, он промахивается с вероятностью 1 − 0,8 = 0,2. События попасть или промахнуться при каждом выстреле независимы, вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей. Тем самым, вероятность события «попал, попал, попал, промахнулся, промахнулся» равна 0,8•0,8•0,8•0,2•0,2=0,02048. Ответ:0.02048.

40. Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания лампы в течение года равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Решение. Найдем вероятность того, что перегорят обе лампы. Эти события независимые, вероятность их произведения равно произведению вероятностей этих событий: 0,3·0,3 = 0,09. Событие, состоящее в том, что не перегорит хотя бы одна лампа, противоположное. Следовательно, его вероятность равна 1 − 0,09 = 0,91. *Ответ: 0,91.*

41. Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,06. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две таких батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.
Решение. Вероятность того, что батарейка исправна, равна 0,94. Вероятность произведения независимых событий (обе батарейки окажутся исправными) равна произведению вероятностей этих событий: 0,94·0,94 = 0,8836. *Ответ: 0,8836.*

42. Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью 0,52. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Гроссмейстеры А. и Б. играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.
Решение. Возможность выиграть первую и вторую партию не зависят друг от друга. Вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей: 0,52 · 0,3 = 0,156. *Ответ: 0,156.*

43. В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,3. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно (считайте, что клиенты заходят независимо друг от друга).
Решение. Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий. Поэтому вероятность того, что все три продавца заняты равна $(0,3)^3 = 0,027$. *Ответ: 0,027.*

44. Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 20 пассажиров, равна 0,94. Вероятность того, что окажется меньше 15 пассажиров, равна 0,56. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 15 до 19.
Решение. Рассмотрим события А = «в автобусе меньше 15 пассажиров» и В = «в автобусе от 15 до 19 пассажиров». Их сумма — событие А + В = «в автобусе меньше 20 пассажиров». События А и В несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий: P(A + B) = P(A) + P(B).
Тогда, используя данные задачи, получаем: 0,94 = 0,56 + P(B), откуда P(B) = 0,94 − 0,56 = 0,38. *Ответ: 0,38.*

45. На экзамене по геометрии школьнику достаётся один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Вписанная окружность», равна 0,2. Вероятность того, что это вопрос на тему «Параллелограмм», равна 0,15. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.
Решение. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: 0,2 + 0,15 = 0,35.
Ответ: 0,35.

46.Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна 0,97. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,89. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Решение. Пусть A = «чайник прослужит больше года, но меньше двух лет», B = «чайник прослужит больше двух лет», C = «чайник прослужит ровно два года», тогда A + B + C = «чайник прослужит больше года». События A, B и C несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий. Вероятность события C, состоящего в том, что чайник выйдет из строя ровно через два года — строго в тот же день, час и секунду — равна нулю. Тогда: $P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) = P(A) + P(B)$ *откуда, используя данные из условия, получаем* $0{,}97 = P(A) + 0{,}89$. *Тем самым, для искомой вероятности имеем:* $P(A) = 0{,}97 - 0{,}89 = 0{,}08$. *Ответ: 0,08.*

47. В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,8 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 3 июля, погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 6 июля в Волшебной стране будет отличная погода.

Решение. Для погоды на 4, 5 и 6 июля есть 4 варианта: ХХО, ХОО, ОХО, ООО (здесь Х — хорошая, О — отличная погода). Найдем вероятности наступления такой погоды: P(XXO) = 0,8·0,8·0,2 = 0,128; P(XOO) = 0,8·0,2·0,8 = 0,128; P(OXO) = 0,2·0,2·0,2 = 0,008; P(OOO) = 0,2·0,8·0,8 = 0,128. *Указанные события несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:*

P(XXO) + P(XOO) + P(OXO) + P(OOO) = 0,128 + 0,128 + 0,008 + 0,128 = 0,392.

Ответ: 0,392.

48. В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,05 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

Решение. Найдем вероятность того, что неисправны оба автомата. Эти события независимые, вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий: $0{,}05 \cdot 0{,}05 = 0{,}0025$. *Событие, состоящее в том, что исправен хотя бы один автомат, противоположное. Следовательно, его вероятность равна* $1 - 0{,}0025 = 0{,}9975$. *Ответ: 0,9975.*

49. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Решение. Рассмотрим событиеA = кофе закончится в первом автомате, B = кофе закончится во втором автомате.

Вероятность того, что кофе останется в первом автомате равна $1 - 0{,}3 = 0{,}7$. *Вероятность того, что кофе останется во втором автомате равна* $1 - 0{,}3 = 0{,}7$. *Вероятность того, что кофе останется в первом или втором автомате равна* $1 - 0{,}12 = 0{,}88$. *Поскольку* $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$, *имеем:* $0{,}88 = 0{,}7 + 0{,}7 - x$, *откуда искомая вероятность* $x = 0{,}52$. *Ответ: 0,9975.*

50. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая — 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая — 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Решение. Вероятность того, что стекло куплено на первой фабрике и оно бракованное: $0{,}45 \cdot 0{,}03 = 0{,}0135$. *Вероятность того, что стекло куплено на второй фабрике и оно бракованное:* $0{,}55 \cdot 0{,}01 = 0{,}0055$. *Поэтому по формуле полной вероятности вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным равна* $0{,}0135 + 0{,}0055 = 0{,}019$. *Ответ: 0,019.*

51. Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,2. На столе лежит 10 револьверов, из них только 4 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.

Решение. Джон попадает в муху, если схватит пристрелянный револьвер и попадет из него, или если схватит непристрелянный револьвер и попадает из него. По формуле условной вероятности, вероятности этих событий равны соответственно 0,4·0,9 = 0,36 и 0,6·0,2 = 0,12. Эти события несовместны, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий: 0,36 + 0,12 = 0,48. Событие, состоящее в том, что Джон промахнется, противоположное. Его вероятность равна 1 − 0,48 = 0,52. Ответ. 0,52

52. Чтобы поступить в институт на специальность «Лингвистика», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность «Коммерция», нужно набрать не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и обществознание.

Вероятность того, что абитуриент З. получит не менее 70 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку — 0,8, по иностранному языку — 0,7 и по обществознанию — 0,5.

Найдите вероятность того, что З. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

Решение. В силу независимости событий, вероятность успешно сдать экзамены на лингвистику: 0,6·0,8·0,7 = 0,336, вероятность успешно сдать экзамены на коммерцию: 0,6·0,8·0,5 = 0,24, вероятность успешно сдать экзамены и на «Лингвистику», и на «Коммерцию»: 0,6·0,8·0,7·0,5 = 0,168. Успешная сдача экзаменов на «Лингвистику» и на «Коммерцию» — события совместные, поэтому вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий, уменьшенной на вероятность их произведения. Тем самым, поступить на одну из этих специальностей абитуриент может с вероятностью 0,336 + 0,24 − 0,168 = 0,408. Ответ: 0,408.

53. По отзывам покупателей Иван Иванович оценил надёжность двух интернет- магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,8. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,9. Иван Иванович заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар. *Решение. Вероятность того, что первый магазин не доставит товар равна 1 − 0,9 = 0,1. Вероятность того, что второй магазин не доставит товар равна 1 − 0,8 = 0,2. Поскольку эти события независимы, вероятность их произведения (оба магазина не доставят товар) равна произведению вероятностей этих событий: 0,1 · 0,2 = 0,02. Ответ: 0,02.*

54. Перед началом волейбольного матча капитаны команд тянут честный жребий, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Статор» по очереди играет с командами «Ротор», «Мотор» и «Стартер». Найдите вероятность того, что «Статор» будет начинать только первую и последнюю игры. *Решение. Требуется найти вероятность произведения трех событий: «Статор» начинает первую игру, не начинает вторую игру, начинает третью игру. Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий. Вероятность каждого из них равна 0,5, откуда находим: 0,5·0,5·0,5 = 0,125. Ответ: 0,125.*

55. Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется *положительным*. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,9. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,01. Известно, что 5% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

Решение. Анализ пациента может быть положительным по двум причинам: А) пациент болеет гепатитом, его анализ верен; В) пациент не болеет гепатитом, его анализ ложен. Это несовместные события, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий. Имеем: Р(А)=0,9•0.05=0,045; Р(В)= 0,01•0,95=0,0095 ,Р(А+В)=Р(А)(В)=0,045+0,0095=0,0545.

Ответ: 0,0545.

56. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,02. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,99. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная батарейка будет забракована системой контроля.

Решение. Ситуация, при которой батарейка будет забракована, может сложиться в результате событий: А = батарейка действительно неисправна и забракована справедливо или В = батарейка исправна, но по ошибке забракована. Это несовместные события, вероятность их суммы равна сумме вероятностей эти событий. Имеем: Р(А+В)=Р(А)+Р(В)=0,02•0,99+0,98•0,01=0,0198+0,0098=0,0296 Ответ: 0,0296.

57. Стрелок стреляет по мишени один раз. В случае промаха стрелок делает второй выстрел по той же мишени. Вероятность попасть в мишень при одном выстреле равна 0,7. Найдите вероятность того, что мишень будет поражена (либо первым, либо вторым выстрелом).

Решение. Пусть A — событие, состоящее в том, что мишень поражена стрелком с первого выстрела, B — событие, состоящее в том, что мишень поражена со второго выстрела. Вероятность события A равна P(A) = 0,7. Событие B наступает, если, стреляя первый раз, стрелок промахнулся, а, стреляя второй раз, попал. Это независимые события, их вероятность равна произведению вероятностей этих событий: P(B) = 0,3·0,7 = 0,21. События A и B несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий: P (A + B) = P(A) + P(B) = 0,7 + 0,21 = 0,91. Ответ: 0,91.

58. Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд будет первой владеть мячом. Команда *А* должна сыграть два матча — с командой *В* и с командой *С*. Найдите вероятность того, что в обоих матчах первой мячом будет владеть команда *А*.

Решение. Рассмотрим все возможные исходы жеребьёвки.

· КомандаА в матче в обоих матчах первой владеет мячом.

· КомандаА в матче в обоих матчах не владеет мячом первой.

· КомандаА в матче с командой В владеет мячом первой, а в матче с командой С — второй.

· КомандаА в матче с командой С владеет мячом первой, а в матче с командой В — второй.

Из четырех исходов один является благоприятным, вероятность его наступления равна 1:4=0,25. Ответ: 0,25.

59. Стрелок 4 раза стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,5. Найдите вероятность того, что стрелок первые 3 раза попал в мишени, а последний раз промахнулся.

Решение. Вероятность промаха равна $1 - 0{,}5 = 0{,}5$. *Вероятность того, что стрелок первые три раза попал в мишени равна* $0{,}5^3 = 0{,}125$. *Откуда, вероятность события, при котором стрелок сначала три раза попадает в мишени, а четвёртый раз промахивается равна* $0{,}125 \cdot 0{,}5 = 0{,}0625$. *Ответ: 0,0625.*

60. Перед началом матча по футболу судья бросает монету, чтобы определить, какая из команд будет первой владеть мячом. Команда «Байкал» играет по очереди с командами «Амур», «Енисей», «Иртыш». Найти вероятность того, что команда «Байкал» будет первой владеть мячом только в игре с «Амуром».

Решение. Монету бросают 3 раза.

Для команды «Байкал» возможные исходы в трех бросках {О О О},{Р О О}, {О Р О}, {О О Р}, {Р Р О},{Р О Р}, {О Р Р},{Р Р Р}. Всего исходов 8, благоприятных1(выпадение орла в первой игре) {О Р Р, 1:8=0,125.Ответ 0,125.

61.У Пети в кармане лежат шесть монет: четыре монеты по рублю и две монеты по два рубля. Петя, не глядя, переложил какие-то три монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что теперь две двухрублевые монеты лежат в одном кармане.

Решение. Пронумеруем монеты: рублевые – 1, 2, 3, 4; двухрублевые – 5, 6. {123} {124} {125} {126} {134} {135} {136} {145} {146} {156} {234} {235} {236} {245} {246} {256} {345} {346} {356} {456}

n = 20 – число всех исходов .Взять три монеты можно так: (числа в порядке возрастания,чтобы не пропустить комбинацию) m = 8 – число благоприятных исходов (комбинации, в которых монеты 5 и 6 (двухрублевые) не взяты или взяты обе. 8:20=0,4

Практическая работа №21: Вычисление вероятностей событий по классической формуле вероятности

Цель: формирование умений решать задачи, используя классическую формулу вероятности;

закрепление умений решать задачи, используя определения и формулы разных видов комбинаций без повторений и с повторениями; решать задачи, используя правила комбинаторики.

В результате выполнения практической работы студент будет:

- ***знать***:
    1. классическое определение вероятности и формулу классического определения вероятности;
    2. статистическое определение вероятности и соответствующую формулу;
    3. определения разных видов комбинаций с повторениями: размещения, перестановки, сочетания;
    4. формулы для вычисления количества размещений, перестановок, сочетаний с повторениями и без повторений;
    5. основные правила комбинаторики (правило суммы, правило произведения);

- ***уметь***:
    1. решать задачи, используя классическое и статистическое определения вероятности и соответствующие формулы;
    2. решать задачи, используя определения и формулы разных видов комбинаций без повторений и с повторениями;
    3. решать задачи, используя правила комбинаторики.

Методические указания и теоретические сведения к практической работе

Классическое определение вероятности

Пример 1. Пусть в урне содержится ***6*** одинаковых шаров, причем ***2*** из них - красные, ***3*** - синие и ***1*** - белый. Какова возможность вынуть наудачу из урны цветной шар? Можно ли охарактеризовать эту возможность числом? Оказывается можно. Это число и называется вероятностью события ***A*** (появления цветного шара). Таким образом, ***вероятность есть число, характеризующее степень возможности появления события***.

Каждый из возможных результатов испытания (в примере 4, испытание состоит в извлечении шара из урны) называется ***элементарным исходом***.

Те элементарные исходы, в которых интересующее нас событие наступает, называются ***благоприятствующими*** этому событию. В примере 4 благоприятствуют событию ***A*** (появление цветного шара) 5 исходов.

События называются ***равновозможными***, если есть основания считать, что не одно из них не является более возможным, чем другое.

Пример 2. Появление того или иного числа очков на брошенном игральном кубике – равновозможные события.

Вероятностью P(A) события ***A*** называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу. ***Вероятность P(A)*** события ***A*** определяется по формуле

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где ***m*** – число элементарных исходов, благоприятствующих ***A***; ***n*** – число всех возможных элементарных исходов испытания.
В примере 4 всего элементарных исходов ***6***; из них ***5*** благоприятствуют событию ***A***.
Следовательно, вероятность того что взятый шар окажется цветным, равна ***P(A) = 5/6***.

Пример 3. Определить вероятность выпадения нечётного числа очков на кости.

Решение. При бросании кости событие ***A*** – «выпало нечётное число очков» можно записать как подмножество {1, 3, 5} пространства исходов {1, 2, 3, 4, 5, 6} (рис. 1).

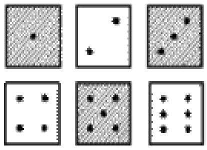


Рис. 1. Пространство исходов при бросании кости

Число всех равновозможных исходов $n = 6$, а число благоприятных событию A – $m = 3$. Следовательно,

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

<u>Пример 4</u>. В урне находится ***7*** шаров: ***2*** белых, ***4*** черных и 1 красный. Вынимается один шар наугад. Какова вероятность того, что вынутый шар будет чёрным?

Решение. Занумеруем шары. Пусть, например, шары с номерами ***1*** и ***2*** – белые, с номерами ***3, 4, 5*** и ***6*** – чёрные, а красному шару присвоим номер ***7***. Так как мы можем вынуть только один из семи шаров, то общее число равновозможных исходов равно семи (***n = 7***). Из них ***4*** исхода – появление шаров с номерами ***3, 4, 5*** и***6*** – приведут к тому, что вынутый шар будет чёрным (***m = 4***). Тем самым, вероятность события ***A***, состоящего в появлении чёрного шара, равна $P(A) = \frac{4}{7}.$

Вычислите вероятность того, что вынутый шар будет белым.

<u>Пример 5</u>. Вычислить вероятность выпадения в сумме ***10*** очков при бросании пары костей.

Решение. Рассмотрим все равновозможные исходы в результате бросания двух костей (их число равно ***36*** - рекомендуем записать в виде таблицы). Выпадение в сумме ***10*** очков (событие ***A***) возможно в трёх случаях – ***4*** очка на первой кости и ***6*** на второй, ***5*** очков на первой и ***5*** на второй, ***6*** очков на первой и ***4*** на второй. Поэтому вероятность события А (выпадения в сумме ***10*** очков) равна $P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$

<u>Пример 6.</u> Из 60 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент подготовил 50. Какова вероятность того, что взятый наудачу студентом билет, содержащий 2 вопроса, будет состоять из подготовленных им вопросов?

Решение.
1) Обозначим событие А - «Вытянутый студентом билет состоит из подготовленных им билетов». Для вычисления вероятности появления данного события воспользуемся классическим определением вероятности события, согласно которому вероятность определяется по формуле: $P(A) = \frac{m}{n}$,

где m – число исходов, при которых появляется событие А,
n – общее число элементарных несовместных равновозможных исходов.
2) Определим n. Общее число билетов определяется сочетанием по 2 из 60:

$$n = C^2_{60} = \frac{60!}{58! \cdot 2!} = \frac{60 \cdot 59}{2} = 1770$$

3) Количество билетов, вопросы которых студент знает, определяется сочетанием по 2 из 50:

$$m = C^2_{50} = \frac{50!}{48! \cdot 2!} = \frac{50 \cdot 49}{2} = 1225$$

4) Определим вероятность события А:

$$P(A) = \frac{1225}{1770} = 0{,}69.$$

Ответ: Вероятность того, что взятый наудачу студентом билет, содержащий 2 вопроса, будет состоять из подготовленных им вопросов равна P(A) = 0,69. То есть, если будет, например, 100 таких студентов, то 69 из них вытянут билеты, к вопросам которых они подготовлены.

Свойство 1. Вероятность ***достоверного*** события ***А*** равна единице: ***P(A) = 1***.

Свойство 2. Вероятность ***невозможного*** события ***А*** равна нулю: ***P(A) = 0***.

Свойство 3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между ***нулем*** и ***единицей***: $0 < P(A) < 1$

Пример 7. Так как вероятность выпадения ***13*** очков при бросании пары костей – невозможное событие, его вероятность равна ***нулю***.

Классическое определение вероятности предполагает, что число элементарных исходов испытания конечно. На практике же часто встречаются испытания, число возможных исходов которых бесконечно. Кроме этого, часто невозможно представить результат испытания в виде совокупности элементарных событий. Еще труднее указать основания, позволяющие считать элементарные события равновозможными. По этой причине, наряду с классическим определением вероятности используют и другие определения, в частности ***статистическое определение***.

Статистическое определение вероятности

Относительная частота наряду с вероятностью принадлежит к основным понятиям теории вероятностей.
Относительной частотой события ***А*** называют отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний:

$$W(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число появлений события A, n – общее число испытаний.

Классическая вероятность вычисляется до опыта, а относительная частота – после опыта.

Длительные наблюдения показали, что если в одинаковых условиях производят опыты, в каждом из которых число испытаний велико, то ***относительная частота обнаруживает свойство устойчивости***. Это свойство состоит в том, что в различных опытах относительная частота изменяется мало (тем меньше, чем больше произведено испытаний), колеблясь около некоторого постоянного числа. Это постоянное число и есть вероятность появления события.

Таким образом, при достаточно большом количестве испытаний в качестве ***статистической вероятности события*** принимают ***относительную частоту*** или число, близкое к ней.

Пример 7. Естествоиспытатель К. Пирсон терпеливо подбрасывал монету и после каждого бросания не ленился записывать полученный результат. Проделав эту операцию 24 000 раз, он обнаружил, что герб выпадал в 12 012 случаях. Вычисляя относительную частоту выпадения герба, он получил ,
что практически равно 1/2.

$$\frac{12012}{24000} = 0{,}5005$$

Содержание практической работы

1. ***Решите задачу:***

Задача 1. В урне находится 15 белых, 5 красных и 10 чёрных шаров. Наугад извлекается 1 шар, найти вероятность того, что он будет: а) белым, б) красным, в) чёрным.

Задача 2. В коробке лежат 8 зеленых, 7 синих и 15 красных карандашей. Вычислить вероятность того, что взятый наугад карандаш будет, синим или зеленым.

Задача 3. В одной коробке находится 4 белых и 8 черных шаров, а в другой – 3 белых и 9 черных. Из каждой коробки вынули по шару. Вычислить вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

Задача 4. В магазин поступило 30 холодильников, пять из которых имеют заводской дефект. Случайным образом выбирают один холодильник. Какова вероятность того, что он будет без дефекта?

Задача 5. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наугад. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

Задача 6. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и поэтому набирает её наугад. Определить вероятность того, что ему придётся звонить не более чем в 3 места.
Задача 7. Абонент забыл последние 2 цифры телефонного номера, но помнит, что они различны и образуют двузначное число, меньшее 30. С учетом этого он набирает наугад 2 цифры. Найти вероятность того, что это будут нужные цифры.