Государственное бюджетное
профессиональное образовательное учреждение
«Кунгурский колледж агротехнологий и управления»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ ЕН.01 Математика

по специальности 23.02.04 Техническая эксплуатация подъемно-транспортных, строительных, дорожных машин и оборудования (по отраслям)

углублённой подготовки

2023 г.

Рассмотрено и одобрено
на заседании методической комиссии
естественнонаучных дисциплин
Протокол № __1_
от 30 августа 2023 г.
Председатель МК
____________ В.Н. Чернышёва

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора
____

Методические рекомендации по выполнению практических работ составлены в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины ЕН.01 Математика

Организация-разработчик: **государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение «Кунгурский сельскохозяйственный колледж»**

Составитель:
Волкова О.В. преподаватель

Ф.И.О., должность

	ОГЛАВЛЕНИЕ	Стр.

Пояснительная записка

Методические рекомендации к выполнению практических работ по дисциплине «ЕН.01 Математика» предназначены для организации самостоятельной работы обучающихся второго курса очного отделения специальности 23.02.04 Техническая эксплуатация подъемно-транспортных, строительных, дорожных машин и оборудования (по отраслям) (техник) на уроке.

Учебным планом на изучение дисциплины отводится 76 часов, в том числе практические занятия – 18 часов. Практические занятия являются важной формой образовательного процесса и направлены на экспериментальное подтверждение теоретических положений и формирование учебных и профессиональных практических умений, они составляют важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки.

Перед выполнением практической работы преподавателем проводится инструктаж, который включает цель задания, его содержание, время выполнения, основные требования к результатам работы, критерии оценки выполнения задания. Выполнению практических занятий предшествует проверка знаний студентов - их теоретической готовности к выполнению задания. Практические занятия носят репродуктивный характер. Работы, носящие репродуктивный характер, отличаются тем, что при их проведении студенты пользуются подробными инструкциями, в которых указаны: цель работы, пояснения (теория, основные характеристики), порядок выполнения работы.

Критерии оценивания при выполнении практической работы:

Процент результативности (%)	**Оценка уровня подготовки**	**Оценка**
91 – 100	отлично	5
70 - 90	хорошо	4
50 - 69	удовлетворительно	3
Менее 50	неудовлетворительно	2

Время выполнения практической работы составляет 90 минут.
В процессе инструктажа преподаватель обращает внимание обучающихся на возможные встречающиеся типичные ошибки.

Практическая работа №1: Линейные операции над матрицами

Операции над матрицами

Цель: закрепить навыки выполнения действий над матрицами

Содержание работы:

Основные понятия

1 Матрицей размерности m x n называется прямоугольная таблица $m \times n$ чисел a_{ij}, $i=1,\ldots, m$, $j=1,\ldots, n$, расположенных в m строках и n столбцах:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2 Матрица называется квадратной, если m=n (n - порядок матрицы).

3 Матрица называется единичной, если все элементы на ее главной диагонали равны 1. (Все остальные элементы при этом равны 0.) Единичная матрица чаще всего обозначается буквой E или E_n, где n - порядок матрицы.

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

4 Две матрицы A и B равны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый размер $m\times n$ и их соответствующие элементы равны. Пусть заданы две матрицы A и B, причем размерность первой из них равна размерности второй.

5 Чтобы умножить матрицу на число, нужно умножить на это число все элементы матрицы.

6 Суммой двух матриц одинаковой размерности, называется матрица той же размерности, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов слагаемых.

7 Произведением матриц называется матрица, элементы которой вычисляются по формуле: $c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj}$, $i=1, \ldots, m$, $j=1, \ldots, k$. Произведение матриц A и B обозначается AB, т.е. $C=AB$.. Пусть заданы две матрицы A и B, причем число столбцов первой из них равно числу строк второй.

8 Произведение матриц существует тогда и только тогда, когда число столбцов в первой матрице равно числу строк во второй.

9 Матрица, получающаяся из матрицы A заменой строк столбцами, называется транспонированной по отношению к матрице и обозначается A^T

10 Матрица называется обратной к матрице A и обозначается A^{-1}, т.е. $A A^{-1} = A^{-1}A = E$.

11 Определителем n-го порядка называется число, полученное из квадратной таблицы размерности $n \times n$.

12 Определитель 2-го порядка - это число вида

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

13 Определители третьего порядка можно вычислять по правилу Саррюса, методом треугольника, разложением по строке или столбцу.

14 Пусть a_{ij}- элемент определителя Δ. Минором M_{ij} будем называть определитель, полученный из исходного вычеркиванием i- строки и j-го столбца.

15 Алгебраическим дополнением к элементу a_{ij} называется число вида $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

16 Обратную матрицу можно найти методом Гаусса $(A|E) \to \ldots \to (E|A^{-1})$ или по формуле $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A_{ij})^T$

17 Для того, чтобы матрица имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы определитель этой матрицы был отличен от нуля.

Задание

Даны матрицы А и В.

1 Выписать матрицу A^T, минор матрицы M_{21}, отвечающий элементу a_{21}.

2 Вычислить $|A|$ тремя способами.

3 Вычислить $3A$, $2A-3B$, $A \cdot B$, $B \cdot A$.

4 Вычислить B^{-1} двумя способами.

5 Вычислить $4A + 5B^{-1} + A \cdot B$

Пример выполнения:

Исходные данные:

Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Решение:

Задание 1 $A^T = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad M_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

Задание 2

а) $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1\cdot 0\cdot 3 + 2\cdot 2\cdot 1 + 1\cdot 3\cdot 4 - 1\cdot 0\cdot 1 - (-1)\cdot 2\cdot 4 - 2\cdot 3\cdot 3 = 6;$

б) $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -1\cdot 0\cdot 3 + 2\cdot 2\cdot 1 + 1\cdot 3\cdot 4 - 1\cdot 0\cdot 1 -$

$-(-1)\cdot 2\cdot 4 - 2\cdot 3\cdot 3 = 6;$

в) $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1\cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 2\cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1\cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -1\cdot(-8) - 2\cdot(9-2) + 12 = 6$

Задание 3

а) $3A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 \\ 9 & 0 & 6 \\ 3 & 12 & 9 \end{pmatrix}$

б) $2A - 3B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & 4 \\ 2 & 8 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 3 & 15 & 6 \\ -9 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-6 & 4-(-3) & 2-(-3) \\ 6-3 & 0-15 & 4-6 \\ 2-(-9) & 8-3 & 6-6 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -8 & 7 & 5 \\ 3 & -15 & -2 \\ 11 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

в) $A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} -1\cdot 2+2\cdot 1+1\cdot(-3) & -1\cdot(-1)+2\cdot 5+1\cdot 1 & -1\cdot(-1)+2\cdot 2+1\cdot 2 \\ 3\cdot 2+0\cdot 1+2\cdot(-3) & 3\cdot(-1)+0\cdot 5+2\cdot 1 & 3\cdot(-1)+0\cdot 2+2\cdot 2 \\ 1\cdot 2+4\cdot 1+3\cdot(-3) & 1\cdot(-1)+4\cdot 5+3\cdot 1 & 1\cdot(-1)+4\cdot 2+3\cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 12 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \\ -3 & 22 & 13 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2\cdot(-1)+(-1)\cdot 3+(-1)\cdot 1 & 2\cdot 2+(-1)\cdot 0+(-1)\cdot 4 & 2\cdot 1+(-1)\cdot 2+(-1)\cdot 3 \\ 1\cdot(-1)+5\cdot 3+2\cdot 1 & 1\cdot 2+5\cdot 0+2\cdot 4 & 1\cdot 1+5\cdot 2+2\cdot 3 \\ (-3)\cdot(-1)+1\cdot 3+2\cdot 1 & (-3)\cdot 2+1\cdot 0+2\cdot 4 & (-3)\cdot 1+1\cdot 2+2\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 0 & -3 \\ 16 & 10 & 17 \\ 8 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Задание 4

а) $$B^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 16 & 8 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{11} & \frac{16}{11} & \frac{1}{11} & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&-1&0&-1\\0&1&\frac{5}{11}&-\frac{1}{11}&\frac{2}{11}&0\\0&0&1&2&\frac{1}{8}&\frac{11}{8}\end{array}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&\frac{1}{8}&\frac{3}{8}\\0&1&0&-1&\frac{1}{8}&-\frac{5}{8}\\0&0&0&2&\frac{1}{8}&\frac{11}{8}\end{array}\right)$$

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{8}&\frac{3}{8}\\-1&\frac{1}{8}&-\frac{5}{8}\\2&\frac{1}{8}&\frac{11}{8}\end{pmatrix}$$

б) $|B|=\begin{vmatrix}2&-1&-1\\1&5&2\\-3&1&2\end{vmatrix}=2\cdot5\cdot2+(-1)\cdot(-3)\cdot2+(-1)\cdot1\cdot1-(-1)\cdot5\cdot(-3)-(-1)\cdot1\cdot2-2\cdot1\cdot2=8$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}5&2\\1&2\end{vmatrix}=8;\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&2\\-3&2\end{vmatrix}=-8;\quad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&5\\-3&1\end{vmatrix}=16;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-1&-1\\1&2\end{vmatrix}=1;\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2&-1\\-3&2\end{vmatrix}=1;\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2&-1\\-3&1\end{vmatrix}=1;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1&-1\\5&2\end{vmatrix}=3;\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2&-1\\1&2\end{vmatrix}=-5;\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2&-1\\1&5\end{vmatrix}=11;$$

$$B^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}8&1&3\\-8&1&-5\\16&1&11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{8}&\frac{3}{8}\\-1&\frac{1}{8}&-\frac{5}{8}\\2&\frac{1}{8}&\frac{11}{8}\end{pmatrix}$$

Задание 5

$$4A+5B^{-1}+A\cdot B=4\cdot\begin{pmatrix}-1&2&1\\3&0&2\\1&4&3\end{pmatrix}+5\cdot\begin{pmatrix}1&\frac{1}{8}&\frac{3}{8}\\-1&\frac{1}{8}&-\frac{5}{8}\\2&\frac{1}{8}&\frac{11}{8}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3&12&7\\0&-1&1\\-3&22&13\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2&20{,}625&12{,}875\\7&-0{,}375&5{,}875\\11&38{,}625&31{,}875\end{pmatrix}$$

Задания к практической работе.

1	$A=\begin{pmatrix}2&-4&-3\\-7&3&-2\\1&1&2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}3&-4&-1\\1&-3&2\\2&1&-3\end{pmatrix}$	2	$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&-1&-2\\3&1&2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}8&-1&3\\4&1&6\\3&1&6\end{pmatrix}$
3	$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-2&-1&3\\2&4&-1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2&1&-1\\4&2&1\\-2&-5&-1\end{pmatrix}$	4	$A=\begin{pmatrix}4&-7&-2\\5&-3&-4\\3&-8&-1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2&3&-1\\0&10&5\\-2&-5&-1\end{pmatrix}$
5	$A=\begin{pmatrix}-1&4&-2\\6&10&-7\\-3&-2&2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&1&2\\-5&-3&-6\\3&2&-4\end{pmatrix}$	6	$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\4&7&-11\\2&3&-4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}5&3&-5\\9&4&-7\\14&6&-11\end{pmatrix}$
7	$A=\begin{pmatrix}4&1&-3\\8&3&-6\\2&2&-1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}3&1&2\\2&-3&4\\1&2&-3\end{pmatrix}$	8	$A=\begin{pmatrix}3&-5&3\\1&-2&1\\1&7&-2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}10&-6&2\\4&-3&-1\\2&-1&4\end{pmatrix}$
9	$A=\begin{pmatrix}4&-3&1\\1&1&-1\\2&1&0\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}6&-4&-5\\4&3&6\\-7&2&1\end{pmatrix}$	10	$A=\begin{pmatrix}3&-1&2\\-2&2&-3\\1&-5&8\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2&1&-1\\4&10&1\\-2&-5&-1\end{pmatrix}$
11	$A=\begin{pmatrix}-3&-4&2\\-2&3&-7\\2&1&1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}8&4&3\\-1&1&1\\3&6&6\end{pmatrix}$	12	$A=\begin{pmatrix}2&1&-3\\-1&1&-2\\1&3&2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}0&10&5\\2&3&-1\\-2&-5&-1\end{pmatrix}$
13	$A=\begin{pmatrix}-1&-2&1\\-2&-1&3\\2&4&-1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}5&3&6\\-1&-1&-2\\3&2&-4\end{pmatrix}$	14	$A=\begin{pmatrix}3&-8&-1\\5&-3&-4\\4&-7&-2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2&-1&4\\10&-6&2\\4&-3&-1\end{pmatrix}$
15	$A=\begin{pmatrix}-1&4&-2\\-3&-2&2\\6&10&-7\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&-3&2\\3&-4&-1\\2&1&3\end{pmatrix}$	16	$A=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\-4&7&-11\\-2&3&-4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}3&2&1\\1&-3&2\\2&4&-3\end{pmatrix}$
17	$A=\begin{pmatrix}4&8&2\\1&3&2\\-3&-6&-1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}14&6&-11\\5&3&-5\\9&4&-7\end{pmatrix}$	18	$A=\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&7&-2\\3&-5&3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}4&3&6\\6&-4&-5\\-7&2&1\end{pmatrix}$
19	$A=\begin{pmatrix}-3&-4&1\\1&-1&-1\\1&-2&0\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2&-1&1\\4&1&2\\-2&-1&-5\end{pmatrix}$	20	$A=\begin{pmatrix}2&-2&3\\3&-1&2\\1&-5&8\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}4&1&6\\8&-1&3\\3&1&6\end{pmatrix}$

Практическая работа №2: Применение формул Крамера к решению систем линейных уравнений. Решение линейных систем уравнений методом Гаусса

Задание к работе

1. Методом Крамера найти решение системы линейных алгебраических уравнений.

2. Установить, что система уравнений имеет единственное решение, и найти его с помощью обратной матрицы.

3. Методом Гаусса (или методом исключения неизвестных) найти решение системы линейных алгебраических уравнений.

4. Найти общее решение однородной системы линейных алгебраических уравнений.

Образец решения варианта.

1. Методом Крамера найти решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = 3 \\ 3x + 4y - 5z = -8 \\ 2y + 7z = 17 \end{cases}.$$

Решение.

Решение системы находим по формулам Крамера

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ y = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ z = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Вычислим определитель системы Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 56 - 18 + 20 + 21 = 79.$$

Последовательно заменив в Δ, первый, второй и третий столбцы столбцом свободных членов, получим соответственно

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -8 & 4 & -5 \\ 17 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 395,\ x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{395}{79} = 5;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & -8 & -5 \\ 0 & 17 & 7 \end{vmatrix} = -158,\ y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{158}{79} = -2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -8 \\ 0 & 2 & 17 \end{vmatrix} = 237,\ z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{237}{79} = 3.$$

Ответ: $x = 5,\ y = -2,\ z = 3$

2. Дана система из трех уравнений с тремя неизвестными. Установить, что система уравнений имеет единственное решение и найти его с помощью обратной матрицы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 \quad + 2x_3 = -8 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}.$$

Решение.

Если определитель системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение (теорема Крамера).

Вычислим определитель данной системы :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -2 \cdot (12 - 10) = -4 \neq 0,$$

следовательно, система имеет единственное решение.

Данную систему можно записать в матричной форме :

$$A \cdot X = B \text{, где } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\det A = \Delta = -4 \neq 0$, то для матрицы A существует обратная матрица A^{-1}. Умножив матричное уравнение $A \cdot X = B$ слева на A^{-1}, получим $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$, откуда $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$, или $X = A^{-1} \cdot B$.

Найдем обратную матрицу A^{-1} по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где $A_{ij} -$ алгебраическое дополнение элемента a_{ij} .

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 4,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -7,\ A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -6,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -8,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 9,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 10,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix}.$$

Тогда $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$$= -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 \cdot 4 + (-8) \cdot (-8) + 4 \cdot 0 \\ (-7) \cdot 4 + 9 \cdot (-8) + (-5) \cdot 0 \\ (-6) \cdot 4 + 10 \cdot (-8) + (-6) \cdot 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 80 \\ -100 \\ -104 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 25 \\ 26 \end{pmatrix}.$$

Ответ : $x_1 = -20,\ x_2 = 25,\ x_3 = 26$.

3. Методом Гаусса (или методом исключения неизвестных) найти решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases}.$$

Решение.

Выпишем расширенную матрицу B данной системы и приведем ее к ступенчатому виду

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & -2 & -3 & 8 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right).$$

Последовательно умножим первую строку на (–2) и прибавим ее ко второй строке, затем умножим на (–3) и прибавим к третьей строке, умножим на (–2) и прибавим к четвертой строке, получим

$$B \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array}\right).$$

Ко второй строке полученной матрицы прибавим третью строку, умноженную на (-1), затем во вновь полученной матрице умножим третью строку на $(-\frac{1}{2})$, четвертую – на (–1), затем последовательно умножим вторую строку на 2 и прибавим ее к третьей строке, умножим на 7 и прибавим к четвертой строке, получим

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & -7 & 10 \\ 0 & 2 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 7 & 4 & -5 & 20 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 9 & -18 & 27 \\ 0 & 0 & 18 & -54 & 90 \end{array}\right).$$

Третью строку полученной матрицы умножим на $1/9$, четвертую – на $1/18$, затем третью строку умножим на (–1) и прибавим к четвертой строке, получим

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Найденная матрица имеет треугольный вид; по этой матрице запишем систему уравнений, эквивалентную исходной системе,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ \quad -x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 10 \\ \qquad x_3 - 2x_4 = 3 \\ \qquad\quad -x_4 = 2 \end{cases}.$$

Последовательно находим неизвестные, начиная с последнего уравнения, $x_4 = -2$; подставим в третье уравнение найденное x_4, вычислим x_3, $x_3 = -1$; затем из второго уравнения находим x_2, $x_2 = 2$; из первого уравнения получим x_1, $x_1 = 1$.

<u>Ответ</u>: $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -1,\ x_4 = -2$.

4. Найти общее решение однородной системы линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} 5x + 3y = 0 \\ 10x + 6y = 0 \end{cases}$.

<u>Решение.</u>

Элементарными преобразованиями строк приведем матрицу системы $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$ к эквивалентной матрице $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, которой соответствует уравнение $5x + 3y = 0$, эквивалентное исходной системе. Таким образом, общее решение может быть записано в форме $y = -\frac{5}{3}x,\ x \in R$, или $x = -\frac{3}{5}y$, $y \in R$. Решений бесчисленное множество – любая пара, связанная указанной зависимостью, обращает левые части уравнений данной системы в нуль. В системе $n = 2$ - число неизвестных и число уравнений. $rangA = rangB = 1 < n$, $A -$ матрица системы, $B -$ расширенная матрица системы. В силу теоремы Кронекера-Капелли система имеет бесчисленное множество решений, зависящих от одного параметра $(n - r = 2 - 1 = 1)$. Иногда общее решение удобнее использовать в форме

$$x = 3t\ ,\ y = -5t\ ,\ t \in R\ .$$

<u>Практическая часть</u>

1. Методом Крамера найти решение системы линейных алгебраических уравнений.

2. Установить, что система уравнений имеет единственное решение, и найти его с помощью обратной матрицы.

3. Методом Гаусса (или методом исключения неизвестных) найти решение системы линейных алгебраических уравнений.

4. Найти общее решение однородной системы линейных алгебраических уравнений

Вариант 1

1.1 $\begin{cases} 2x - y - 2z = -1 \\ 2y + z = 3 \\ -2x - 2y + 2z = -2 \end{cases}$ 1.2 $\begin{cases} 2x + y - 3z = 7 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 3x + 2y + z = 6 \end{cases}$

1.3 $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 11 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 - 4x_2 + 8x_3 + x_4 = 15 \end{cases}$ 1.4 $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases}$

Вариант 2

2.1 $\begin{cases} 3x + y - 3z = 8 \\ 3y - z = 7 \\ 3x - y - 3z = 4 \end{cases}$ 2.2 $\begin{cases} 4x + y + 4z = -3 \\ x + y + 2z = -4 \\ 2x - y + 2z = 3 \end{cases}$

2.3 $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 6 \\ 2x - y + 3z = -4 \\ x + 3y - 2z = 5 \\ 3x + 2y + z = 1 \end{cases}$ 2.4 $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases}$

Вариант 3

3.1 $\begin{cases} 2x+3y+4z=4 \\ 4x+9y+16z=6 \\ 8x+27y+64z=-2 \end{cases}$ 3.2 $\begin{cases} 3x - y+z=12 \\ x+2y+4z=6 \\ 5x+y+2z=3 \end{cases}$

3.3 $\begin{cases} 3x-2y+4z+5t=5 \\ x-y-z+t \quad =0 \\ 2x-2y+3z-3t=1 \\ 4x+2y-6z-t=0 \end{cases}$ 3.4 $\begin{cases} 3x - y=0 \\ 2y - 6x=0 \end{cases}$

Вариант 4

4.1 $\begin{cases} x - y+z=1 \\ x+y - z=3 \\ x - y - z=1 \end{cases}$ 4.2 $\begin{cases} 2x - y+3z=-4 \\ x+3y - z=11 \\ x - 2y+2z=-7 \end{cases}$

4.3 $\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3+4x_4=0 \\ 2x_1+5x_2-2x_3+4x_4=0 \\ 4x_1-7x_2+6x_3+4x_4=0 \end{cases}$ 4.4 $\begin{cases} 3y - x=0 \\ 6y - 2x=0 \end{cases}$

Практическая работа №3,4,5: вычисление интегралов методом непосредственного интегрирования

Цель: проверить знание определения неопределённого интеграла, его свойства, табличные интегралы; формулы интегрирования при помощи замены переменной, умения вычислять неопределённые интегралы методом замены переменной.

Задание:

1. Найти неопределённые интегралы

1.

1.1. $\int x^3(3x+1)^2dx$ 1.11. $\int 4x^2(4x+2)^2dx$ 1.21. $\int 3\sqrt{x}(2-3x)^2dx$

1.2. $\int -2\sqrt{x}(4-3x)^2dx$ 1.12. $\int \frac{x^2-3x^3+2x^7}{x}dx$ 1.22. $\int \frac{2x^3+3x^4-5x^6}{x^2}dx$

1.3. $\int \frac{4x^3+x^4--8x^5}{x^3}dx$ 1.13. $\int \frac{7x^4-4x^4+6x^4}{x^2}dx$ 1.23. $\int \frac{x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{4}{7}}-x^{\frac{1}{2}}}{x}dx$

2.1. $\int \frac{\sqrt{3}}{9x^2-3}dx$

2.2. $\int \frac{1}{\sqrt{9x^2+3}}dx$

2.3. $\int \frac{1}{9x^2+3}dx$

2.4. $\int \frac{9}{\sqrt{9x^2-3}}dx$

2.5. $\int \frac{1}{\sqrt{3-9x^2}}dx$

2.6. $\int \frac{1}{7x^2-4}dx$

2.7. $\int \frac{3}{\sqrt{7x^2-4}}dx$

2.8. $\int \frac{1}{5x^2+3}dx$

2.9. $\int \frac{1}{5x^2-3}dx$

2.10. $\int \frac{1}{\sqrt{3-5x^2}}dx$

2.11. $\int \frac{1}{\sqrt{5x^2+3}}dx$

2.12. $\int \frac{1}{\sqrt{4-7x^2}}dx$

2.13. $\int \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3-4x^2}}dx$

2.14. $\int \frac{1}{\sqrt{2x^2-9}}dx$

2.15. $\int \frac{1}{2x^2+7}dx$

2.16. $\int \frac{1}{\sqrt{3x^2+1}}dx$

2.17. $\int \frac{1}{3x^2+2}dx$

2.18. $\int \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7-2x^2}}dx$

2.19. $\int \frac{\sqrt{14}}{2x^2-7}dx$

2.20. $\int \frac{1}{8x^2+9}dx$

2.21. $\int \frac{1}{3x^2-2}dx$

2.22. $\int \frac{1}{4x^2+3}dx$

2.23. $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+3}}dx$

2.24. $\int \frac{1}{\sqrt{3-4x^2}}dx$

2.25. $\int \frac{1}{4x^2-3}dx$

2.26. $\int \frac{2}{4+3x^2}dx$

2.27. $\int \frac{2}{\sqrt{4x^2-3}}dx$

2.28. $\int \frac{1}{4x^2+7}dx$

2.29. $\int \frac{1}{8x^2-9}dx$

2.30. $\int \frac{1}{\sqrt{9-8x^2}}dx$

Найти интегралы методом интегрирования по частям

1.$\int x\cos 6x\,dx$	11.$\int x\cos(x-7)dx$	1.21.$\int arctg\frac{x}{5}dx$
2.$\int x\sin(x-5)dx$	12.$\int \ln(x+12)dx$	22.$\int \arcsin\frac{x}{5}dx$
3.$\int \arcsin 3x\,dx$	13.$\int (x-4)e^x\,dx$	23.$\int \arccos 2x\,dx$
4.$\int arctg\,8x\,dx$	14.$\int xe^{-6x}\,dx$	1.24.$\int \ln(2x-1)dx$
5.$\int x\sin(x-2)dx$	15.$\int arctg\,7x\,dx$	1.25.$\int \ln(2x+3)dx$
6.$\int \arcsin 8x\,dx$	1.16.$\int \arcsin 5x\,dx$	1.26.$\int \arccos\frac{x}{5}dx$
7.$\int x\sin(x+3)dx$	1.17.$\int \ln(x-7)dx$	1.27.$\int arctg\frac{x}{4}dx$
8.$\int x\cos(x+4)dx$	1.18.$\int x\cos(x+6)dx$	1.28.$\int \arcsin\frac{x}{7}dx$
9.$\int \arccos 7x\,dx$	1.19.$\int arctg\frac{x}{2}dx$	1.29.$\int arctg\,6x\,dx$
10.$\int \ln(2x-4)dx$	1.20.$\int \ln(x+8)dx$	1.30.$\int \arccos\frac{x}{3}dx$

Контрольные вопросы

1. Таблица неопределенных интегралов.

2. Свойства неопределенного интеграла.

3. Непосредственное интегрирование.

4. Интегрирование заменой переменной.

5. Какие интегралы находятся методом по частям?

6. Алгоритм решения методом по частям

Практическая работа №5: Вычисление определённого интеграла

Цель: закрепить навыки вычисления определенных интегралов

Основные понятия.

1 Определенный интеграл – это предел интегральных сумм:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \quad i \in \overline{0, n-1}, \quad x_i$ - точки из отрезка $[a,b]$

$a = x_0, \quad b = x_n, \qquad c_i \in [x_i, x_{i+1}] \quad i \in \overline{0, n-1}$

2 Формула Ньютона-Лейбница: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$,

где $F(x)$- первообразная для $f(x)$.

3 Свойства определенных интегралов

– $\int_a^a f(x)dx = 0$

– $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

– $\int_a^b C\cdot f(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$

– $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

– $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

4 Замена переменных в определенном интеграле:

$$\int_\alpha^\beta f(u(x))u' dx = \int_a^b f(u)du;$$

где $du = u'(x)dx, \; a = u(\alpha), \; b = u(\beta)$.

5 Интегрирование по частям в определенном интеграле:

$$\int_{\alpha}^{\beta} udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Задание

1 Найти определенный интеграл, используя свойства интегралов
2 Найти интегралы методом замены переменной
3 Найти интегралы методом интегрирования по частям

Пример выполнения:

Исходные данные:

Вычислить интегралы.

Задание 1 $\int_1^3 \left(3\sqrt{x} + \frac{1}{x^3} - 4\right)dx$

Задание 2 $\int_0^1 \sqrt{x+32}dx;\ \int_0^{\frac{\pi}{3}} sin^{15} x\, cos\, xdx$

Задание 3 $\int_0^e x\, ln\, xdx$

Решение.

Задание 1

$$\int_1^4 \left(3\sqrt{x} + \frac{1}{x^3} - 4\right)dx = 3\int_1^4 \sqrt{x}dx + \int_1^4 x^{-3}dx - 4\int_1^4 dx = 3\left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_1^4 + \left.\frac{x^{-2}}{-2}\right|_1^4 - 4x\Big|_1^4 =$$

$$= 2\sqrt{x^3}\Big|_1^4 - \left.\frac{1}{2x^2}\right|_1^4 - 4x\Big|_1^4 = 2\left(\sqrt{4^3} - \sqrt{1^3}\right) - \left(\frac{1}{2\cdot 4^2} - \frac{1}{2\cdot 1^2}\right) - 4(4-1) =$$

$$= 2(8-1) - \left(\frac{1}{32} - \frac{1}{2}\right) - 4\cdot 3 = 14 + \frac{15}{32} - 12 = 2\frac{15}{32}.$$

Задание № 2.

$$\int_0^1 \sqrt{x+32}dx = \begin{vmatrix} u = x+32 & du = dx \\ 0 \mapsto 0 & 1 \mapsto 33 \end{vmatrix} = \int_0^{33} \sqrt{u}du = \left.\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^{33} = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{33} = \frac{2}{3}\left(33^{\frac{3}{2}} - 1\right).$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} sin^{15} x \cos x dx = \begin{vmatrix} u = \sin x & du = \cos x dx \\ 0 \mapsto 0 & \frac{\pi}{3} \mapsto \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} u^{15} du = \left.\frac{u^{16}}{16}\right|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \frac{1}{16}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{16} - 0\right) = \frac{3^8}{2^{20}}.$$

Задание № 3

$$\int_0^e x \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & dv = xdx \\ du = \frac{dx}{x} & v = \frac{x^2}{2} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_0^e + \int_0^e \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_0^e +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^e xdx = \frac{e}{2}\ln e - \frac{1}{2}\ln 1 + \left.\frac{x^2}{4}\right|_0^e = \frac{e}{2} + \frac{e^2 - 0^2}{2} = \frac{e^2 + e}{2}.$$

Задания к практической работе.

Задание 1

1 $\int_{1}^{2}\left(x^{2}+\frac{1}{x^{4}}\right)dx;$

2 $\int_{2}^{3.5}\left(\frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^{2}}}\right)$

3 $\int_{0}^{2}x(3-x)dx;$

4 $\int_{0}^{9}(3\sqrt{x}-x)dx;$

5 $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^{2}-x-6}$

6 $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x^{2}-6x+8}}$

7 $\int_{1}^{4}\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx;$

8 $\int_{0}^{2}\frac{dx}{x^{2}+4x-32}\ dx$

9 $\int_{1}^{5}\left((x-3)^{2}-4\right)dx;$

10 $\int_{3}^{4}\frac{dx}{x^{2}-3x+2}$

11 $\int_{0}^{1}\frac{1}{x+2}dx;$

12 $\int_{-3}^{-2}\frac{dx}{x^{2}-1}\ dx$

13 $\int_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt{x^{2}+2x+2}}$

14 $\int_{0}^{1/2}\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}dx;$

15 $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^{2}+x-6}$

16 $\int_{1}^{8}\sqrt[3]{x^{2}}dx;$

17 $\int_{0}^{2}x^{2}(3-x)dx;$

18 $\int_{-1}^{1}\left(\frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^{2}}}\right)$

19 $\int_{3}^{4}\frac{dx}{x^{2}-4x+5}$

20 $\int_{0}^{2}x(4x^{2}+3x-2)dx;$

21 $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x^{2}+2x-8}}$

22 $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^{2}+2x+2}$

23 $\int_{0}^{2}x(x^{2}+4x-1)dx;$

24 $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^{2}+4x+5}$

25 $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x^{2}+6x+10}}$

26 $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x^{2}+2x+2}}$

27 $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^{2}+4x+5}$

28 $\int^{5}\left((x-2)^{2}-1\right)dx;$

29 $\int^{4}\left((x-2)^{2}-1\right)dx;$

30 $\int_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt{x^{2}+2x+2}}$

Задание 2

1 $\int_{0}^{2}3^{2x+5}dx$

2 $\int_{0}^{1}x(7x^{2}-5)^{4}dx$

3 $\int_{-1}^{0}4^{8x+7}dx$

4 $\int_{1}^{4}\sqrt{x^{2}-1}\cdot x\ dx$

5 $\int_{0}^{\pi/4}sin\ (4x)\ dx$

6 $\int_{0}^{1}\left(\frac{dx}{\sqrt{4+5x}}\right)$

7 $\int_{0}^{1}\left(\frac{dx}{\sqrt{4-3x}}\right)$

8 $\int_{0}^{1}\left(\frac{dx}{\sqrt{10-3x}}\right)$

9 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}ctg\ x\ dx$

10 $\int_{1}^{e}\frac{\sin\ln x}{x}\ dx$

11 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{3}x\ dx$

12 $\int_{0}^{\pi/3}cos\ (3x)\ dx$

13 $\int\limits_{2}^{6} \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx$ | 14 $\int_{-1}^{1} tg\,x\,dx$ | 15 $\int\limits_{2}^{3} \frac{2x+4}{x^2+4x-3}\,dx$

16 $\int_0^1 5^{2x-1}dx$ | 17 $\int_{-2}^{0} 5^{2x+9}dx$ | 18 $\int_{-2}^{2} e^{2x+1}dx$

19 $\int_{-1}^{1} 9^{6x-1}dx$ | 20 $\int_0^1 2^{2x+1}dx$ | 21 $\int_1^e \frac{\cos\ln x}{x}\,dx$

22 $\int_1^2 3^{7x+1}dx$ | 23 $\int_0^2 3^{3x-2}dx$ | 24 $\int_{-1}^{1} 5^{3x+1}dx$

25 $\int_{-2}^{1} 7^{2x+5}dx$ | 26 $\int\limits_{0}^{3} \frac{2x-3}{x^2-3x+1}\,dx$ | 27 $\int_{-1}^{2} 2^{2x-1}dx$

28 $\int_{-1}^{1} 5^{9x+4}dx$ | 29 $\int_1^2 5^{3x-4}dx$ | 30 $\int_1^2 e^{3x+2}dx$

Задание 3

1 $\int\limits_0^1 \arcsin x dx;$ | 2 $\int\limits_1^e \frac{dx}{x(\ln^2 x-9)};$ | 3 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx;$

4 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx;$ | 5 $\int\limits_0^1 x arctg x dx;$ | 6 $\int\limits_0^{e-1} \ln(x+1)dx;$

7 $\int\limits_0^1 xe^{-x}dx;$ | 8 $\int\limits_0^1 x\arcsin x dx;$ | 9 $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x dx;$

10 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} x\sin 3x dx;$ | 11 $\int\limits_{-\pi/2}^{3\pi/2} x\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)dx;$ | 12 $\int\limits_0^1 (x^2-1)e^x dx;$

13 $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{xdx}{\sin^2 x};$ | 14 $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{xdx}{\cos^2 x};$ | 15 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x dx;$

16 $\int\limits_0^1 5xe^{2x}dx;$ | 17 $\int\limits_0^1 (x^2-1)e^{2x}dx;$ | 18 $\int\limits_0^1 x arctg 2x dx;$

19 $\int_0^1 3x^2e^{2x}dx;$ 20 $\int_0^{\pi/8}\frac{xdx}{\cos^2 2x};$ 21 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin xdx;$

22 $\int_0^1 xarctg3xdx;$ 23 $\int_0^{\pi} x\sin xdx;$ 24 $\int_0^{\pi} x^2\sin xdx;$

25 $\int_0^1 x^2arctg3xdx;$ 26 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{3}\right)dx;$ 27 $\int_{-1}^1 x\arcsin xdx;$

28 $\int_0^1 (x^2-1)e^{3x}dx;$ 29 $\int_0^1 (x^2-1)e^{x}dx;$ 30 $\int_0^1 \arcsin xdx$

ИНСТРУКЦИОННАЯ КАРТА для проведения практической

Цель: выполнения задания: привить навыки нахождения определенных интегралов методом замены переменной и интегрированием по частям

Необходимо знать: основные формулы и правила вычисления определенных интегралов
Необходимо уметь: применять основные формулы и правила вычисления определенных интегралов

Теория: для выполнения заданий по данной теме необходимо предварительно изучить теоретические материалы, а также методические рекомендации к выполнению работы
Порядок выполнения задания, методические указания: - ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме; - изучить схему решения задач; - выполнить задания практической работы; - сформулировать вывод

Дополнительные задания: могут быть сформулированы по ходу занятия

Содержание отчета: отчет по практической работе должен содержать: основные определения, рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ; вывод по работе

Контрольные вопросы:

1 Что называется определенным интегралом?

2 В чем принципиальное отличие определенного интеграла от неопределенного?

3 Формула Ньютона-Лейбница

4 Формула интегрирования по частям в определенном интеграле

5 Свойства определенного интеграла

Практическая работа №6: Решение линейных дифференциальных уравнений 1 порядка

Цель работы: научиться решать дифференциальные уравнения первого порядка.

Содержание работы.

Основные понятия.

1 Дифференциальные уравнения – это уравнения, содержащие искомые функции, их производные различных порядков и независимые переменные.

2 Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок, входящих в него производных.

3 Решить дифференциальное уравнение – это значит, найти множество функций $y = f(x) + C$, которые удовлетворяют данному уравнению. Такое множество функций называется общим решением дифференциального уравнения.

4 Частное решение дифференциального уравнения — это решение, не содержащее произвольных постоянных

5 Обыкновенным дифференциальным уравнением 1-го порядка с одной неизвестной функцией называется соотношение $F(x, y, y') = 0$ между независимым переменным x, искомой функцией y и её производной

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

6 Если уравнение может быть разрешено относительно производной, то получается уравнение $y' = f(x, y)$, разрешенное относительно производной.

7 Дифференциальные уравнения $f(y)\, dy = g(x)\, dx$ называют уравнениями с разделенными переменными

8 Линейное уравнение первого порядка – это уравнение вида: $y' + p(x) \cdot y = q(x)$

9 Если $q(x) = 0$, то уравнение называется однородным, если $q(x) \neq 0$, то уравнение неоднородное

Задание

Исходные данные:

Решить дифференциальное уравнение $y'\cos^2 x + y = tgx$.

Решение:

а) Решим уравнение методом вариации постоянных (методом Лагранжа):

– найдем общее решение однородного уравнения

$$y'\cos^2 x + y = 0$$

$$y'\cos^2 x = -y; \quad \frac{dy}{dx}\cos^2 x = -y;$$

$$dy\cos^2 x = -y\,dx; \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$\int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dx}{\cos^2 x}; \quad \ln|y| = -tgx + C$$

$$y = e^{-tgx+C}; \quad y = e^{-tgx}e^{C}; \quad y = Ce^{-tgx}$$

– теперь полагаем $y = C(x)e^{-tgx}$; $y' = C'(x)e^{-tgx} - C(x)\dfrac{e^{-tgx}}{\cos^2 x}$, подставляем y и y' в исходное уравнение: $C'(x)e^{-tgx}\cos^2 x - C(x)\dfrac{e^{-tgx}}{\cos^2 x}\cos^2 x + C(x)e^{-tgx} = tgx$

$$C'(x)e^{-tgx}\cos^2 x = tgx; \quad C(x) = \int\frac{e^{tgx}tgx}{\cos^2 x}dx$$

$$\int\frac{e^{tgx}tgx}{\cos^2 x}dx = \begin{vmatrix} t = tgx \\ dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{vmatrix} = \int te^t\,dt = \begin{vmatrix} u = t;\ du = dt \\ dv = e^t dt;\ v = e^t \end{vmatrix} =$$

$$te^t - \int e^t dt = te^t - e^t + C = e^{tgx}(tgx - 1) + C$$

– находим общее решение дифференциального уравнения

$$y = e^{-tgx}\left(e^{tgx}(tgx - 1) + C\right) = tgx - 1 + Ce^{-tgx}$$

б) Решим это уравнение методом подстановки (методом Бернулли):

– для этого представим $y = u(x)\cdot v(x)$; $y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

– подставим y и y' в исходное уравнение:

$$u'(x)v(x)\cos^2 x + u(x)v'(x)\cos^2 x + u(x)\cdot v(x) = tgx$$
$$u'(x)v(x)\cos^2 x + u(x)\cdot\left(v'(x)\cos^2 x + v(x)\right) = tgx$$

– найдем частное решение уравнения:

$$v'(x)\cos^2 x + v(x) = 0; \quad v'(x) = -\frac{v(x)}{\cos^2 x}; \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$\ln|v| = -tgx; \quad v = e^{-tgx}$$

– найдем общее решение уравнения:

$$u'(x)v(x)\cos^2 x = tgx; \quad u'(x)e^{-tgx}\cos^2 x = tgx$$

$$u(x) = \int \frac{e^{tgx} tgx}{\cos^2 x} dx = \begin{vmatrix} t = tgx \\ dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{vmatrix} = \int te^t dt = \begin{vmatrix} u = t; du = dt \\ dv = e^t dt; v = e^t \end{vmatrix} =$$

$$te^t - \int e^t dt = te^t - e^t + C = e^{tgx}(tgx - 1) + C$$

– находим общее решение дифференциального уравнения

$$y = e^{-tgx}\left(e^{tgx}(tgx - 1) + C\right) = tgx - 1 + Ce^{-tgx}$$

Ответ: $y = tgx - 1 + Ce^{-tgx}$

Задания к практической работе.

1 $y' = x + y$

2 $xy' - y = x^2 \cos x$

3 $y' = x + \frac{y}{x} - y$

4 $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

5 $y' - 2y + 3e^{2x} = 0$

6 $y' + \frac{2y}{x} = 3x^2 y^{\frac{4}{3}}$

7 $y'\cos x - y\sin x = \sin 2x$

8 $xy' + 2y = x^3$

9 $y'\cos x + y = 1 - \sin x$

10 $xy' + y - 2x = 0$

11 $y' + x^2 y = x^2$

12 $xy' + y = 3$

13 $y'\sin x - y\cos x = 1$

14 $(1 + x^2)y' - xy = 2x$

15 $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$

16 $y' + y\cos x = \sin 2x$

17 $xy' + y = \ln x + 1$

18 $xy' - 2y = 3x^5$

19 $y'+x^2y=2e^{-\frac{x^3}{3}}$

20 $y'+3y\,tg3x=\sin 6x$

21 $y'-y\,tgx=\frac{1}{\cos^3 x}$

22 $y'+5x^4y=-10x^9$

23 $y'-\frac{y}{x}=x$

24 $xy'+y-4x=0$

25 $y'+2y\,tgx=\cos^4 x$

26 $y'-y=e^x$

27 $xy'+y-2x=0$

28 $xy'-2y=3x^5$

29 $y'+5x^4y=-10x^9$

30 $y'+x^2y=x^2$

Практическая работа №7 Решение задач на перестановки, сочетания, размещения

1) **Теоретический этап.**

Опорный конспект.

Определение.

Произведение всех натуральных чисел от **1** до **n** включительно называют ***n – факториалом*** и пишут $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$.

Перестановки	Размещения	Сочетания
n элементов n мест	n элементов m мест	n элементов m мест
порядок имеет значение	порядок имеет значение	порядок не имеет значение
P = n!	1) $A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$ 2) A_n^m = n· (n – 1)·(n – 2) · …·(n – m +1)	$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$

0!=1
1!=1

2) **Подготовительный этап.**

Перепишите и заполните пропуски:

Пример 1. За столом пять мест. Сколькими способами можно расставить пятерых гостей?

Решение: $P_5 = 5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=\ldots$ способов

Ответ: 120 способов.

Пример 2. а) Сколько трехзначных чисел можно записать, используя цифры 1,3,6,7,9, если каждая их них может быть использована в записи только один раз?

Решение: Искомое число вариантов равно числу размещений из 5 элементов по 3 элемента, т.е. по формуле получаем: $A_5^3 = 5\cdot\ 4\cdot\ 3 =$ … чисел.

Ответ: 60 чисел.

б) Из 20 студентов надо выбрать старосту, его заместителя и редактора газеты. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: Искомое число вариантов равно числу размещений из 20 элементов по 3 элемента, т.е. по формуле получаем: $A_{20}^3 = 20 \cdot 19 \cdot 18 = \ldots$ способов.

Ответ: 6840 способов.

Пример 3. а) Из 15 членов туристической группы надо выбрать трех дежурных. Сколькими способами можно сделать этот выбор?

Решение: каждый выбор отличается от другого хотя бы одним дежурным. Значит, здесь речь идет о сочетаниях из 15 элементов по 3. Следовательно, по формуле получаем

$$C_{15}^3 = \frac{15!}{3! \cdot (15-3)!} = \frac{15!}{3! \cdot 12!} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 13 \cdot 7 \cdot 5 = \ldots \textit{способов}$$

Ответ: 455 способов.

б) Студентам дали список из 10 книг, которые рекомендуется прочитать во время каникул. Сколькими способами студент может выбрать из них 6 книг?

Решение: Выбор 6 из 10 без учёта порядка: $C_{10}^6 = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 = \ldots$ способов.

Ответ: 210 способов.

3) Практический этап.

1. За столом семь мест. Сколькими способами можно расставить семерых гостей?
2. а) Сколько трехзначных чисел можно записать, используя цифры 1,2,4,6,7,9, если каждая их них может быть использована в записи только один раз?

б) Из 15 учащихся надо выбрать старосту, его заместителя и редактора газеты. Сколькими способами это можно сделать?

3. а) Из 25 членов туристической группы надо выбрать трех дежурных. Сколькими способами можно сделать этот выбор?

б) Учащимся дали список из 10 книг, которые рекомендуется прочитать во время каникул. Сколькими способами ученик может выбрать из них 7 книг?

Пример 4. Вычислить $\frac{6! - 4!}{3!}$

Пример 5. Упростить $\frac{(n-1)!}{(n+2)!}$

Пример 6. Вычислить $\frac{P_6 - P_5}{P_4}$

Пример 7. Вычислить A_8^4; C_{10}^4

4) Дополнительные задания*.

Вариант 1

1.Вычислить $\frac{5! 3!}{6!}$

2.Упростить $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$

3.Вычислить $\frac{P_4 + P_6}{P_3}$

4.Вычислить A_{13}^5; C_8^4

Вариант 2

1.Вычислить $\frac{5!}{3! + 4!}$

2.Упростить $\frac{n!}{(n-2)!}$

3.Вычислить $\frac{P_{20}}{P_4 \cdot P_{16}}$

4.Вычислить A_{25}^{2}; C_{36}^{5}

Практическая работа №8: Преобразование прямоугольных координат в полярные и обратно

Цель работы: Ознакомиться с полярной системой координат. Изучить формулы, связывающие прямоугольные координаты Х и У точки М и ее полярные координаты.

Теоретическая часть

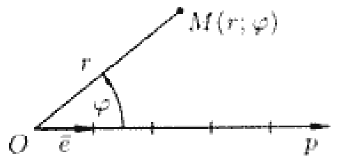
1.Прямоугольные (декартовы) координаты на прямой, плоскости и в пространстве. Косоугольные системы координат.

Система координат – способ, позволяющий численно описать положение точки на плоскости.

Прямоугольная система координат (декартова)задается 2 взаимно перпендикулярными прямыми - осями, на каждой из которых выбрано положительное направление и задан единичный (масштабный) отрезок. Единицу масштаба обычно берут одинаковой для обеих осей. Эти оси наз. осями координат, точку их пересечения О – началом координат. Ось абсцисс – Ох, ось ординат – Оу. Оси делят плоскость на 4 области – четверти или квадранты. Единичные векторы осей обозначают i и j(|i | =| j | = 1, i ⊥j) .

Произвольный вектор ОМ называется радиус-вектором точки М. Координатами точки М в системе координат Оху (Оij) наз. координаты радиуса-вектора ОМ. Если ОМ (х; у), то М (х; у). Эти два числа х и у полностью определяют положение точки на плоскости – каждой паре х и у соответствует единственная точка, и наоборот.

Полярная система координат задается точкой О, называемой полюсом, лучом Ор, называемым полярной осью, и единичным вектором е того же направления, что и луч Ор.



Возьмем на плоскости точку М, не совпадающую с О. Положение точки М определяется двумя числами: ее расстоянием r от полюса О и углом φ, образованным отрезком ОМ с полярной осью (отсчет углов против движению часовой стрелки). Числа r и φ называются полярными координатами точки М, пишут М(r; φ), при этом r называют полярным радиусом, φ — полярным углом.

Полярный угол φ ограничивают промежутком (—π; π] (или 0< φ< 2πr), а полярный радиус — [0;∞).

Прямоугольные координаты точки М выражаются через полярные координаты точки следующим образом: $\begin{cases} x = r * cos\varphi \\ y = r * sin\varphi \end{cases}$

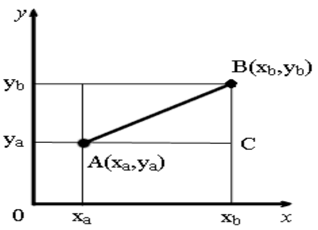
Полярные же координаты точки М выражаются через ее декартовы координаты такими формулами: $\begin{cases} r = \sqrt{(x^2 + y^2)} \\ tg\varphi = \frac{y}{x} \end{cases}$

Декартова система координат в пространстве:

Прямоугольная система координат в пространстве образуется тремя взаимно перпендикулярными осями координат Ох, Оу и Оz. Оси координат пересекаются в точке О, которая называется началом координат, на каждой оси выбрано положительное направление, указанное стрелками, и единица измерения отрезков на осях. Единицы измерения обычно одинаковы для всех осей. Ох — ось абсцисс, Оу — ось ординат, Оz — ось аппликат.

2. Расстояние между двумя точками прямой, плоскости и в пространстве.

Расстояние между двумя точками — это длина отрезка, что соединяет эти точки.
Формулы вычисления расстояния между двумя точками:
1)Формула вычисления расстояния между двумя точками A(x_a, y_a) и B(x_b, y_b) на плоскости:
AB = $\sqrt{(xb - xa)^2 + (yb - ya)^2}$
2)Формула вычисления расстояния между двумя точками A(x_a, y_a, z_a) и B(x_b, y_b, z_b) в пространстве: AB = $\sqrt{(xb - xa)^2 + (yb - ya)^2 + (zb - za)^2}$



Вывод формулы для вычисления расстояния между двумя точками на плоскости.
Из точек A и B опустим перпендикуляры на оси координат.
Рассмотрим прямоугольный треугольник ΔABC. Катеты этого треугольника равны:
AC = $x_b - x_a$;
BC = $y_b - y_a$.
Воспользовавшись теоремой Пифагора, вычислим длину отрезка AB:
AB = $\sqrt{AC^2 + BC^2}$.
Подставив в это выражение длины отрезков AC и BC, выраженные через координаты точек A и B, получим формулу для вычисления расстояния между точками на плоскости.
Формула для вычисления расстояния между двумя точками в пространстве выводится аналогично.

3. Деление отрезка в заданном отношении.

Понятие деления отрезка в данном отношении
рассмотрим пару точек A,B и, – отрезок AB :

Рассматриваемая задача справедлива, как для отрезков плоскости, так и для отрезков пространства. То есть, демонстрационный отрезок можно как угодно разместить на плоскости или в пространстве.
Отрезок AB делится на две части с помощью некоторой точки M , которая, понятно, расположена прямо на нём:

В данном примере точка M делит отрезок ТАКИМ образом, что отрезок AM в два раза короче отрезка MB . ЕЩЁ можно сказать, что точка M делит отрезок AB в отношении 1:2 считая от вершины A .записывают следующим образом: $AM : BM = 1 : 2$, или чаще в виде привычной пропорции: $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$. Отношение отрезков принято стандартно обозначать греческой буквой «лямбда», в данном случае: $\lambda = \frac{1}{2}$.

Пропорцию несложно составить и в другом порядке: $\lambda = \frac{BM}{AM} = 2$ –запись означает, что отрезок ВМ в два раза длиннее отрезка АМ , но какого-то принципиального значения для решения задач это не имеет. Можно так, а можно так.
Разумеется, отрезок легко разделить в каком-нибудь другом отношении, и в качестве закрепления понятия второй пример:

Здесь справедливо соотношение: $\lambda = \frac{AM}{BM} = \frac{5}{4}$. Если составить пропорцию наоборот, тогда получаем: $\lambda = \frac{BM}{AM} = \frac{4}{5}$.

Формулы деления отрезка в данном отношении на плоскости

Если известны две точки плоскости $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$, то координаты точки $M(x_M; y_M)$, которая делит отрезок АВ в отношении $\lambda = \frac{AM}{BM}$, выражаются формулами:

$$x_M = \frac{x_A + \lambda \cdot x_B}{1+\lambda}, \quad y_M = \frac{y_A + \lambda \cdot y_B}{1+\lambda}$$

В курсе аналитической геометрии эти формулы строго выводятся с помощью векторов Кроме того, они справедливы не только для декартовой системы координат, но и для произвольной аффинной системы координат . Такая вот универсальная задача.

Формулы координат середины отрезка

Задача деления отрезка на две равные части – это частный случай деления отрезка в данном отношении .

Знаменательную пропорцию $\lambda = \frac{AM}{BM} = \frac{1}{1} = 1$. И общие формулы $x_M = \frac{x_A + \lambda \cdot x_B}{1+\lambda}, \quad y_M = \frac{y_A + \lambda \cdot y_B}{1+\lambda}$ преображаются в нечто знакомое и простое:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Удобным моментом является тот факт, что координаты концов отрезка можно безболезненно переставить:

$$x_M = \frac{x_B + x_A}{2}, \quad y_M = \frac{y_B + y_A}{2}$$

В общих формулах не проходит. Да и здесь в нём нет особой надобности, так, приятная мелочь.
Для пространственного случая справедлива очевидная аналогия. Если даны концы отрезка $A(x_A; y_A; z_A),\ B(x_B; y_B\ z_B)$, то координаты его середины M выражаются формулами:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$$

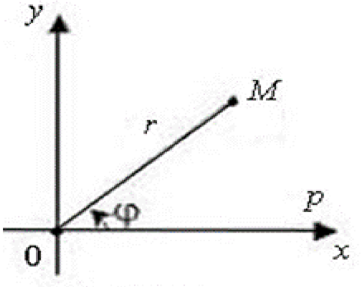
4. Полярная система координат. Сферическая система координат.

Полярная система координат — двумерная система координат, в которой каждая точка на плоскости определяется двумя числами — полярным углом и полярным радиусом. Полярная система координат задаётся лучом, который называют нулевым или полярной осью. Точка, из которой выходит этот луч, называется началом координат или полюсом. Любая точка на плоскости определяется двумя полярными координатами: радиальной и угловой. Радиальная координата (обычно обозначается r) соответствует расстоянию от точки до начала координат. Угловая координата, также называется полярным углом и обозначается φ, равна углу, на который нужно повернуть против часовой стрелки полярную ось для того, чтобы попасть в эту точку.

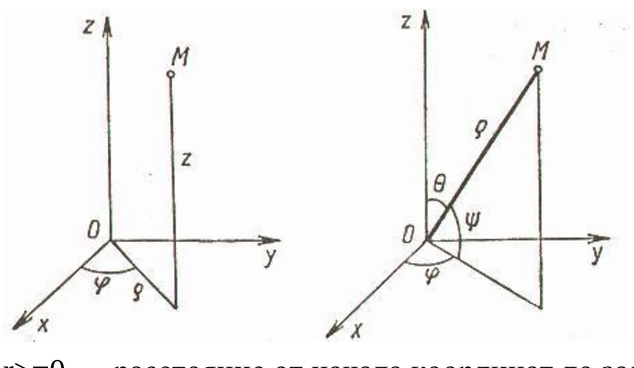
x=r cosφ, y=r sinφ , (r≥0, 0≤φ≤2π)

Обобщённые полярные координаты.

x=arcosφ   y=brsinφ, (r≥0,0≤φ≤2π)



Сферическую систему координат удобно определять, соотносясь с декартовой прямоугольной системой координат (см. рисунок):



Сферическими координатами называют систему координат для отображения геометрических свойств фигуры в трёх измерениях посредством задания трёх координат $(r,\ \theta,\ \varphi)$, где r — расстояние до начала координат, а θ и φ — зенитный и азимутальный угол соответственно.

Три координаты $(r,\ \theta,\ \varphi)$ определены как:

r>=0 — расстояние от начала координат до заданной точки P.

$0 \leqslant \theta \leqslant 180^\circ$ — угол между осью Z и отрезком, соединяющим начало координат и точку P.

$0 \leqslant \varphi \leqslant 360^\circ$ — угол между осью X и проекцией отрезка, соединяющего начало координат с точкой P, на плоскость XY (в Америке углы θ и фи меняются ролями).

Угол θ называется зенитным, или полярным, или нормальным, а также он может быть назван английским словом colatitude, а угол фи — азимутальным. Углы θ и фи не имеют значения при r = 0, а фи не имеет значения при sin(θ) = 0 (то есть при θ = 0 или $\theta = 180^\circ$).

Главные значения ϕ,θ,ρ : $0 \le \rho < +\infty, \quad -\pi < \varphi \le \pi, \quad 0 \le \theta \le \pi.$

Иногда вместо θ рассматривают Ψ : $-\pi/2 \le \psi \le \pi/2.$

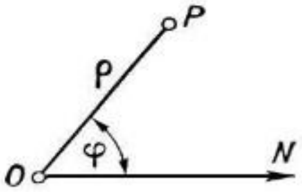
Связь между декартовыми прямоугольными и сферическими координатами

$x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \qquad x = \rho \cos\psi \cos\varphi,$

$y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \qquad y = \rho \cos\psi \sin\varphi,$

$z = \rho \cos\theta$ или $z = \rho \sin\psi.$

5. Переход от декартовой к полярной системе координат и обратно.



O — полюс, *ρ* — полярный радиус, *φ* — полярный угол

Переход от полярной системы координат к декартовой

Если полюс полярной системы координат совместить с началом прямоугольной системы координат, а полярную ось с положительной полуосью Ox, то по известным полярным координатам точки А(ρ; φ) ее прямоугольные координаты вычисляются по формулам:

$x1=\rho*\cos\varphi$

$y1=\rho*\sin\varphi$

Переход от декартовой системы координат к полярной

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \ \mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x}$$

6. Преобразование координат для прямоугольной системы координат методом сдвига и поворота.

Преобразование декартовых прямоугольных координат при параллельном сдвиге осей определяется формулами

x = x'+ a, y=y'+ b.

Здесь x, y суть координаты произвольной точки М плоскости относительно старых осей, x', y' — координаты той же точки относительно новых осей, a, b — координаты нового начала O' относительно старых осей (говорят также, что a есть величина сдвига в направлении оси абсцисс, b — величина сдвига в направлении оси ординат).

Преобразование декартовых прямоугольных координат при повороте осей на угол α (который надо понимать, как в тригонометрии) определяется формулами

x = x' cos α — y sin α,y = x' sin α — y' cos α.

Здесь x, y суть координаты произвольной точки М плоскости относительно старых осей, x’, y’ — координаты той же точки относительно новых осей.

Формулы x = x' cos α — y sin α + a, y = x' sin α + y cos α + b

определяют преобразование координат при параллельном сдвиге системы осей на величину a в направлении Ox, на величину b в направлении Oy и последующем повороте осей на угол α.

Все указанные формулы соответствуют преобразованию координат при неизменном масштабе

Полярные координаты

285. Построить точки по их полярным координатам:

$A\ (5, 0)$; $B\ (2, \frac{\pi}{4})$; $C\ (3, -\frac{\pi}{2})$; $D\ (1, \pi)$.

286. Определить полярные координаты точек, симметричных относительно полярной оси точкам $A\ (3, \frac{\pi}{4})$; $B\ (2, -\frac{\pi}{2})$; $C\ (3, -\frac{\pi}{3})$.

287. Определить полярные координаты точек, симметричных относительно полюса точкам $A\ (1, \frac{\pi}{4})$; $B\ (5, \frac{\pi}{2})$; $C\ (2, -\frac{2\pi}{3})$; $D\ (4, \frac{5\pi}{6})$.

288. Определить полярные координаты вершин и точек пересечения диагоналей правильного шестиугольника *ABCDEF*, сторона которого равна *A*, приняв за полюс одну его вершину *A*, а за полярную ось – направленную прямую *AB*.

289. Определить полярные координаты вершин и точки пересечения медиан правильного треугольника *ABC*, сторона которого равна *A*, приняв за полюс одну его вершину *A*, а за полярную ось – направленную прямую *AB*.

Практическая работа №9: Составление уравнений кривых второго порядка

Цель: Сформировать навыки составления уравнений кривых второго порядка

Ход работы

1) Изучить торетический материал и рассмотренные примеры, применяя теоретические знания для составления уравнений кривых второго порядка (всю теорию и примеры законспектировать в рабочую тетрадь).
2) Практическую часть выполнить в тетрадях для практических занятий.
3) Ответы на контрольные вопросы законспектировать в тетрадях для практических занятий.

1) Теоретический материал:

Определение. Уравнение второй степени относительно x и y

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (1)$$

называется *общим уравнением линии второго порядка*.

в уравнении (1) можно освободиться от члена с произведением координат, и общее уравнение примет вид

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \qquad (2)$$

Уравнение (2)определяет на плоскости xOy эллипс, гиперболу или параболу:

1. $AC > 0$ - эллипс,
2. $AC < 0$ - гипербола,
3. $AC = 0$ - парабола.

Окружность

Определение. *Окружностью* называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от ее центра.

Пусть точка $C(x_0; y_0)$ - *центр окружности*. Расстояние любой точки окружности до центра обозначим через R - *радиус окружности* (рис.1). Пусть $M(x; y)$ текущая точка окружности. Из определения окружности следует, что расстояние от точки $M(x; y)$ до центра окружности $C(x_0; y_0)$ будет равно радиусу этой окружности. Используя формулу для расстояния между двумя точками, получим каноническое уравнение окружности

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \qquad (4)$$

Этому уравнению будут удовлетворять координаты точек, лежащих на окружности. Уравнение (4) называется *нормальным* уравнением окружности.

Если центр окружности лежит в начале координат, то есть $a = b = 0$, то уравнение (4) принимает вид:

$$x^2 + y^2 = R^2. \qquad (5)$$

Этот простейший вид уравнения окружности называется *каноническим*.

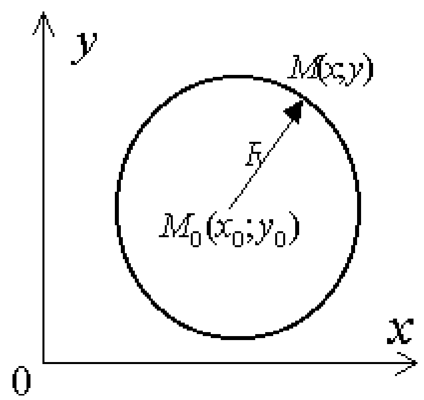


Рис. 2.11.1.

Пример. Составить уравнение окружности, проходящей через точку $A(2; 6)$, если центр окружности совпадает с точкой $C(-1; 2)$.

Решение. Поскольку окружность проходит через точку $A(2; 6)$, координаты этой точки удовлетворяют уравнению $(x+1)^2 + (y-2)^2 = R^2$, то есть $R^2 = (2+1)^2 + (6-2)^2 = 25$, откуда $R = 5$, тогда уравнение окружности принимает вид $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5^2$.

Эллипс. Эксцентриситет и директрисы эллипса

Определение. *Эллипсом* называется геометрическое место точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек плоскости F_1 и F_2, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Постоянную сумму расстояний произвольной точки эллипса до фокусов принято обозначать через $2a$. Расстояние между фокусами - $2c$.

Если фокусы эллипса совпадают, то он представляет собой окружность.

Расположим эллипс так, чтобы его фокусы лежали на оси абсцисс симметрично относительно оси ординат, то есть $F_1(c; 0)$, $F_2(-c; 0)$ (Рис. 2). Пусть $M(x; y)$ текущая точка эллипса. В этой системе координат уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (6)$$

где $a=|OA|$ - *большая*, $b=|OB|$ - *малая полуоси* эллипса, $b^2=a^2-c^2$. Центр симметрии эллипса, определяемого уравнением (6), совпадает с началом координат. Уравнение вида (6) называется каноническим уравнением эллипса. Это уравнение второй степени, следовательно, эллипс – кривая второго порядка.

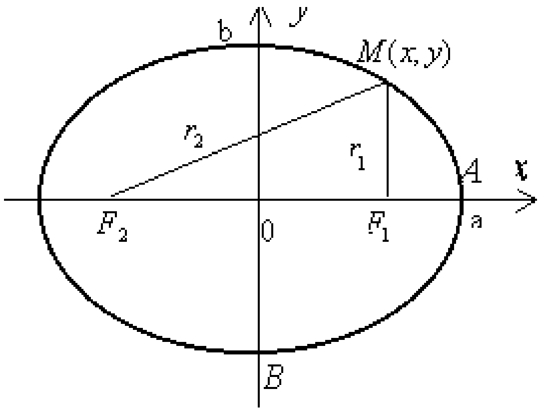


Рис. 2.

Эксцентриситетом эллипса называется число $e=c/a$, равное отношению фокусного расстояния к большой полуоси эллипса. Для эллипса - $0\le e<1$ (для окружности - $e=0$). Отрезки $F_1M=r_1$ и $F_2M=r_2$ называются фокальными радиусами точки $\boldsymbol{M}$ и могут быть вычислены по формулам $r_1=a-e\,x$ и $r_2=a+e\,x$. Если эллипс определен уравнением (6) и $a>b$, то прямые $x=-\frac{a}{e}$, $x=\frac{a}{e}$ называются *директрисами эллипса* (если $b>a$, то директрисы определяются уравнениями $y=-\frac{b}{e}$, $y=\frac{b}{e}$).

Если центр эллипса перенесен в точку $A(x_0,y_0)$, то его *каноническое уравнение* принимает вид

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1\cdot$$

► **Пример 1.** Дано уравнение эллипса $25x^2+169y^2=4225$. Вычислить длину осей, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса.

Решение. Разделим обе части уравнения на 4225: $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$. Сравнивая полученное уравнение с выражением , заключаем, что $a^2=169$, то есть $a=13$, $b^2=25$, то есть $b=5$, $c^2=a^2-b^2=169-25=12^2$. Тогда $c=12$, а $e=c/a=12/13$.
◄

Гипербола, ее эксцентриситет, директриса и асимптоты

Определение. *Гиперболой* называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых абсолютное значение разности расстояний до двух данных точек плоскости F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$.

Расстояние между фокусами - $2c$.

Если оси декартовой прямоугольной системы координат выбраны так, что фокусы данной гиперболы располагаются на оси абсцисс симметрично относительно начала координат (Рис. 2.13.1), то каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (7)$$

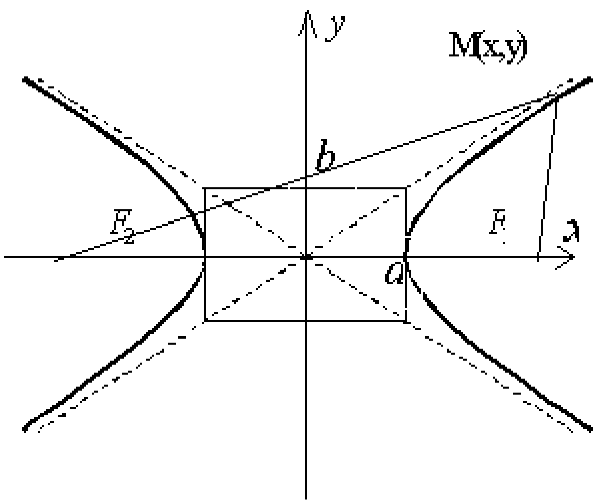


Рис. 3.

где $b^2=c^2-a^2$. Уравнение вида (7) называется *каноническим уравнением гиперболы*. При указанном выборе системы координат оси координат являются *осями симметрии гиперболы*, а начало координат – ее *центром симметрии*. Ось Ox называется *действительной осью*, а Oy - *мнимой осью гиперболы*. Точки пересечения гиперболы с осью называются *вершинами гиперболы*.

Прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$, расположенный симметрично относительно осей гиперболы и касающийся ее в вершинах, называется основным прямоугольником гиперболы. Диагонали основного прямоугольника (неограниченно продолженные) являются асимптотами гиперболы и определяются уравнениями

$$y=\frac{b}{a}x,\ y=-\frac{b}{a}x. \qquad (8)$$

Эксцентриситетом гиперболы (как и эллипса) называется число $e=c/a$, где a - расстояние от центра гиперболы до ее вершины. Очевидно, что для любой гиперболы $e>1$.

Если гипербола задана уравнением (8), то прямые, определяемые уравнениями

$x=-\frac{a}{e}$, $\quad x=\frac{a}{e}$, называются ее *директрисами*.

▸ **Пример 1.** Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, если точка $M_1(4.5; -1)$ лежит на гиперболе и известны уравнения асимптот $y = \pm 2/3x$.

Решение. Из уравнений для асимптот находим $b/a = \pm 2/3$, или $b = \pm 2a/3$. Поскольку точка M_1 принадлежит гиперболе, ее координаты удовлетворяют уравнению (2.13.1): $\frac{9^2}{(2a)^2} - \frac{1}{b^2} = 1$, где $b^2 = 4a^2/9$ или $\frac{81}{4a^2} - \frac{9}{4a^2} = 1$. Отсюда находим $a^2 = 18$, тогда $b^2 = 8$, следовательно, уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{8} = 1$.

▸ **Пример 2.** Дана гипербола $16x^2 - 9y^2 = 144$. Найти ее полуоси a и b, фокусы, эксцентриситет, уравнения асимптот.

Решение. Разделим обе части этого уравнения на 144. Получим $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. Значит $a = 3,\quad b = 4$, следовательно оси гиперболы соответственно равны $2a = 6$ и $2b = 8$. Так как $c = \sqrt{9+16} = 5$, то фокусы гиперболы находятся в точках $F_1(5; 0)$ и $F_2(-5; 0)$. Эксцентриситет гиперболы вычисляется по формуле $e = c/a = 5/3$. В соответствии с (8), уравнения асимптот имеют вид: $y = \pm \frac{4}{3}x$.

◂

Парабола, ее директриса

Определение. *Параболой* называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых расстояние до некоторой фиксированной точки плоскости F, называемой *фокусом*, равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, называемой *директрисой*.

Пусть дана некоторая парабола. Введем декартову прямоугольную систему координат так, чтобы ось абсцисс проходила через фокус данной параболы перпендикулярно директрисе и была направлена от директрисы к фокусу. Начало координат расположим посредине между фокусом и директрисой (Рис. 4). В этой системе координат данная парабола будет определяться уравнением:

$$y^2 = 2px, \tag{9}$$

где p - расстояние от фокуса до директрисы (*параметр параболы*). Уравнение (9) есть *каноническое* уравнение параболы.

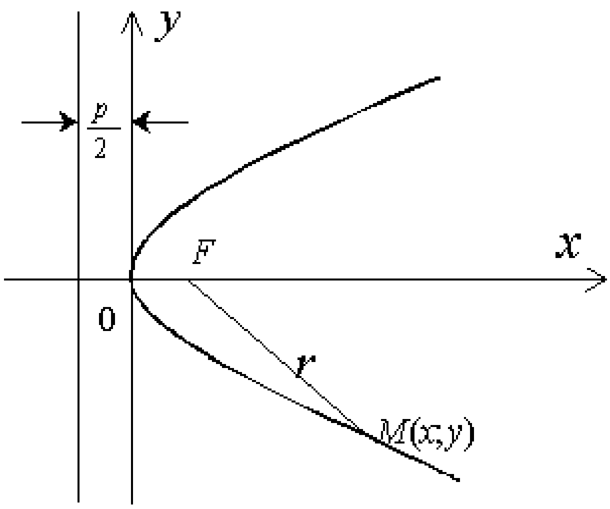


Рис. 4.

Директриса данной параболы определяется уравнением $x = -p/2$. Фокальный радиус произвольной точки $M(x, y)$ параболы может быть вычислен по формуле

$$r = x + \frac{p}{2}. \tag{10}$$

Парабола имеет одну ось симметрии, называемую *осьюпараболы,* с которой она пересекается в единственной точке. Точка, в которой парабола пересекается с осью симметрии, называется *вершиной* параболы. При указанном выше выборе системы координат ось параболы совмещена с осью абсцисс, вершина находится в начале координат, а вся парабола лежит в правой полуплоскости.

Если вершину параболы (10) перенести в точку $A(x_0; y_0)$, то ее каноническое уравнение примет вид $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$.

▸ **Пример 1.** Найти фокус F и уравнение директрисы параболы $y^2 = 24x$.

Решение. Параметр данной параболы $p = 12$. Поскольку расстояние от фокуса до директрисы равно $p/2$, то фокус имеет координаты $F(6;0)$, а уравнение директрисы $x = -12/2$, то есть $x + 6 = 0$.
◂

▸ **Пример 2.** Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат и фокусом в точке $F(0; -8)$.

Решение. Поскольку фокус параболы лежит на оси ординат, а ее вершина - в начале координат, то уравнение параболы можно записать в виде $x^2 = \pm 2py$. Так как ордината фокуса отрицательна, то уравнение параболы следует искать в виде $x^2 = -2py$.

Фокусное расстояние $|OF| = p/2 = 8$, откуда $2p = 32$. Следовательно, уравнение параболы имеет вид $x^2 = -32y$.

2) **<u>Практическая часть</u>**

Задача 1. Составить каноническое уравнение эллипса, зная, что расстояние между фокусами равно 8, а малая полуось $b = 3$.

Задача 2. Найти координаты фокусов и вершин гиперболы $16x^2 - 9y^2 = 144$. Написать уравнение её асимптот и вычислить эксцентриситет.

Задача 3. Составить уравнение параболы и её директрисы, зная, что она симметрична относительно оси OY, фокус находится в точке $F(0;2)$, вершина совпадает с началом координат.

Задача 4. Найдите координаты центра и радиус окружности:

$$x^2 + y^2 - 8x + 16y - 41 = 0$$

Задача 5. Установить вид кривой второго порядка, заданной уравнением

$$x^2 + 10x - 2y + 11 = 0.$$

Задача 6. Установить вид кривой второго порядка, заданной уравнением

$$4x^2 - y^2 + 8x - 8y - 12 = 0 \quad (A \cdot C = -4 < 0).$$

3) **Контрольные вопросы:**

1. *Каноническое уравнение эллипса*
2. *Что такое эксцентриситет?*
3. *Каноническое уравнение окружности*
4. *Каноническое уравнение гиперболы*
5. *Асимптоты гиперболы*
6. *Каноническое уравнение параболы, симметричной относительно оси абсцисс Каноническое уравнение параболы, симметричной относительно оси ординат?*
7. *Что такое директриса?*