Государственное бюджетное
профессиональное образовательное учреждение
«Кунгурский колледж агротехнологий и управления»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
К ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
ООД.07 Математика
по профессии 35.01.27 Мастер сельскохозяйственного производства

базовой подготовки

Рассмотрено и одобрено
на заседании методической комиссии
естественнонаучных дисциплин
Протокол № __1_
от 30 августа 2023 г.
Председатель МК
_____________ В.Н. Чернышёва

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора
____

Методические рекомендации по выполнению практических работ составлены в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины ООД. 07 Математика

Организация-разработчик: **государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение «Кунгурский сельскохозяйственный колледж»**

Составитель:
Волкова О.В. преподаватель
Ф.И.О., должность

Пояснительная записка

Методические рекомендации к выполнению практических работ по дисциплине «Математика» предназначены для организации самостоятельной работы обучающихся первого курса очного отделения специальности 35.01.27 Мастер сельскохозяйственного производства на уроке.

Учебным планом на изучение дисциплины отводится 334 часа, в том числе практические занятия – 334 часа. Практические занятия являются важной формой образовательного процесса и направлены на экспериментальное подтверждение теоретических положений и формирование учебных и профессиональных практических умений, они составляют важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки.

Перед выполнением практической работы преподавателем проводится инструктаж, который включает цель задания, его содержание, время выполнения, основные требования к результатам работы, критерии оценки выполнения задания. Выполнению практических занятий предшествует проверка знаний студентов - их теоретической готовности к выполнению задания. Практические занятия носят репродуктивный характер. Работы, носящие репродуктивный характер, отличаются тем, что при их проведении студенты пользуются подробными инструкциями, в которых указаны: цель работы, пояснения (теория, основные характеристики), порядок выполнения работы.

Критерии оценивания при выполнении практической работы:

Процент результативности (%)	**Оценка уровня подготовки**	**Оценка**
91 – 100	отлично	5
70 - 90	хорошо	4
50 - 69	удовлетворительно	3
Менее 50	неудовлетворительно	2

Время выполнения практической работы составляет 90 – 180 минут.
В процессе инструктажа преподаватель обращает внимание обучающихся на возможные встречающиеся типичные ошибки.

Практическая работа №1
Входной контроль по математике на базе 9 классов
1 вариант

1.Вычислить: $5\frac{5}{8} * \frac{8}{9}$ -12;

А) 7	Б) -7	В) 17	Г) -17

2.Найти 15% от 48

А) 72	Б) 7,2	В) 0,72	Г) 3,2

3. Сократить дробь $\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}$;

А) $\frac{a+b}{a-b}$	Б) 2 $\frac{a+b}{a-b}$	В) $\frac{a-b}{a+b}$	Г) $2\frac{a-b}{a+b}$

4.Упростить выражение $\sqrt{25}$-2$\sqrt{16}$+3$\sqrt{64}$;

А) 21	Б) 27	В) 16	Г) 10

5. Вычислить: $\frac{7^{-10} * 7^{-8}}{7^{-20}}$;

А) 49	Б) $\frac{1}{49}$;	В) - 49	Г) -7 $\frac{1}{7}$;

6.Решить уравнение 2-3(х+2) =5-2х;

А) 10	Б) 9	В) 10	Г) -9

7.Найти произведение корней уравнения $2x^2$-9х+4=0;

А) 2	Б) - 2	В) $\frac{1}{8}$	Г) 8

8.Указать наибольшее целое решение неравенства 3(3х-1)>2(5х-7);

А)11	Б) 10	В) - 11	Г) - 10

9.Найти площадь прямоугольника, одна из сторон которого 6 см, а диагональ 10 см

А) 60см^2;	Б) 28см^2;	В) 48см^2;	Г) 16см^2;

10.Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ (2; -3) и $\vec{b}$ (-1;4).

А) - 10	Б) - 3	В) 2	Г) -14

Входной контроль по математике на базе 9 классов
2 вариант

1.Вычислить: $5\frac{5}{6} * \frac{6}{7}$ -10

А) 5	Б) - 5	В) 12	Г) -12

2.Найти 35% от 12

А) 42	Б) 8,2	В) 0,42	Г) 4,2

3.Сократить дробь $\frac{(b+c)^2}{b^2-c^2}$

А) $\frac{b+c}{b-c}$;	Б) 2 $\frac{b+c}{b-c}$;	В) $\frac{bc}{b+c}$;	Г) 2(b+c);

4.Упростить выражение $3\sqrt{16}$-$4\sqrt{81}$+$\sqrt{64}$

А) -14	Б) 2	В) -16	Г) 10

5.Вычислить: $\frac{6^{-5}*6^{-7}}{6^{-13}}$

А) 6	Б) - 6	В) 36	Г) $\frac{1}{6}$;

7.Найти произведение корней уравнения $7x^2$-9х+2=0

А) -$\frac{2}{7}$	Б) $\frac{7}{2}$	В) $\frac{2}{7}$	Г) 7

8.Указать наибольшее целое решение неравенства 5(х+4) <2(4х-5);

А) 10	Б) - 10	В) 11	Г) 12

9.Найти площадь прямоугольника, одна из сторон которого 5 см, а диагональ 13 см.

А) 60$см^2$;	Б) 65$см^2$;	В) 18$см^2$;	Г) 34$см^2$;

10.Найти скалярное произведение векторов: $\vec{a}$(2;3) и $\vec{b}$(1; -4).

А) 10	Б) - 2	В) 2	Г) -10

Входной контроль по математике на базе 9 классов
3 вариант

1.Вычислить: $5\frac{5}{9} * \frac{9}{10}$ -14

А) -19	Б) 19	В) 14	Г) -9

2.Найти 18% от 15

А) 1,2	Б) 2,7	В) 0,27	Г) 27

3.Сократить дробь: $\frac{x^2-y^2}{(x-y)^2}$

А)) $\frac{x-y}{x+y}$;	Б) 2 $\frac{x-y}{x+y}$;	В) $\frac{x+y}{x-y}$	Г) $\frac{x+y}{2(x-y)}$;

4.Упростить выражение $44\sqrt{36}$-$5\sqrt{81}$+$\sqrt{16}$

А) -17	Б) 17	В) -69	Г) 73

5.Вычислить: $\frac{9^{-5} * 9^{-10}}{9^{-17}}$

А) - $\frac{1}{81}$	Б) $\frac{1}{81}$	В) -81	Г) 81

6.Решить уравнение 7-4(x+2) =10-3x

А) 11	Б) -11	В) 9	Г) -9

7.Найти произведение корней уравнения: $2x^2$-7x+3=0

А) 1,5	Б) 3,5	В) $\frac{1}{6}$;	Г) -1,5

8.Указать наибольшее целое решение неравенства 4(2x-3)>9x-11

А) 2	Б) 0	В) -2	Г) 1

9.Найти площадь прямоугольника, одна из сторон которого 12 см, а диагональ 20 см

А) 192$см^2$;	Б) 240$см^2$;	В) 64$см^2$;	Г) 56$см^2$;

10.Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$(-5;2) и $\vec{b}$(4; -3)

А) 26	Б) -2	В) 0	Г) -26

Практическая работа №2

Повторение: «Действительные числа»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

Повторить и закрепить знания обучающихся по теме: «Преобразование числовых и буквенных выражений».

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

1. С помощью справочных пособий по алгебре повторить:

   а) правила действий над обыкновенными дробями;

   б) формулы сокращенного умножения;

   в) способы разложения выражения на множители;

   г) правило сокращения дробей.

2. Изучить условие заданий для практической работы.
3. Оформить отчет о работе.

Правила действий над обыкновенными дробями:

$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$; $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$; $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$

Формулы сокращенного умножения:

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$; $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$;

$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$; $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

Практическая часть

Вариант 1.1. Вычислите значение выражения: $\left(\left(2{,}15 - 1\frac{5}{16}\right) : 33{,}5 + 5\frac{1}{7} \cdot 3{,}85 - 15{,}7\right) \cdot \frac{8}{11} + 2{,}25$.

2. Упростите выражение: $\left(\frac{x+10}{5x+25} - \frac{1}{x+5}\right)\frac{5}{x-5} - \frac{10}{x^2-25}$.

Вариант 2.1. Вычислите значение выражения:

$\left(75 : 4\frac{1}{6} - 3\frac{9}{23} \cdot 3\right)\left(1\frac{5}{18} + 0{,}35 - \frac{11}{15}\right) : 1{,}4$.

2. Упростите выражение: $\frac{y^2}{y^2-1} + \frac{1}{y^2-1} : \left(\frac{2}{2y-y^2} - \frac{1}{2-y}\right)$.

Вариант 3.

1. Вычислите значение выражения:

   $45{,}09 : 1{,}5 - \left(2\frac{1}{3} \cdot 4\frac{1}{2} - 2{,}5 \cdot 2\frac{1}{2}\right) : 4\frac{1}{4}$.

2. Упростите выражение:

$\frac{2m}{m^2-4} - \frac{2}{m^2-4} : \left(\frac{m+1}{2m-2} - \frac{1}{m-1}\right)$.

Практическая работа №3

Тема: Уравнения и неравенства. (Повторение)

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

- обновить и закрепить знания школьного курса по теме

Ход работы;

1. Повторить теоретический материал
2. Выполнить назначенный вариант

Теоретический материал:

Уравнение – это равенство, содержащее неизвестную величину (X).

Решить уравнение – это значит найти все его корни, или доказать их отсутствие.

Корень уравнения – это значение неизвестной величины X, при которой уравнение обращается в верное равенство.

Типы уравнений:

Тип уравнения	Общий вид	Примечание	Примеры
Линейное	$ax = b$	Содержит неизвестную величину X в первой степени.	$x + 2 = 3$; $2(x + 1) + 3(2x - 1) = 0$
Квадратное	$ax^2 + bx + c = 0$	Содержит неизвестную величину X во второй степени.	$3x^2 + 2x - 1 = 0$; $(x - 1)(x + 2) = 3$.
Дробно - рациональное	$\frac{Q(x)}{R(x)} = 0$	Содержит неизвестную величину X в знаменателе дробного выражения.	$\frac{3}{x} = 5$; $\frac{x+1}{2x} = 1$; $3(x+2) + \frac{x-5}{2x+4} = 6$
Иррациональное	$\sqrt[n]{Q(x)} = R(x)$	Содержит неизвестную величину X под знаком корня.	$\sqrt[3]{3x+2} = 2$; $\sqrt{2x-5} = (x + 1)$.

Свойства равенств:

Свойство	Применение к уравнению
Если, $a = b$, то $b = a$	Части уравнения можно поменять местами, не изменяя знаки.

Если, a = b, m – любое число, то $a \pm m = b \pm m$	Слагаемые можно переносить из одной части уравнения в другую, поменяв знак слагаемого на противоположный.
Если, a = b, $m \neq 0$, то $a\,m = b\,m$, $\frac{a}{m} = \frac{b}{m}$	Обе части уравнения можно умножить, или разделить на одно и тоже число, отличное от нуля, равенство при этом не изменится.

Линейные уравнения

Содержат **неизвестную величину Х в первой степени;**

Имеют **единственный корень**.

Общий вид: **$a\,x = b$, $a \neq 0$.**

Примеры: $2x + 3 = 5$; $2(x + 1) – 3(2x – 1) = 5$; $2(x + 4) – 5 = 3(x - 4)$.

Алгоритм решения уравнения ***Q(x) = R(x):***

1. Привести уравнение **Q(x) = R(x)** к виду **ax = b**:
   а) раскрыть скобки;
   б) собрать слагаемые с Х в левой части уравнения, свободные слагаемые – в правой части;
   в) привести подобные слагаемые;
2. Найти корень уравнения по формуле: **$x = \frac{b}{a}$.**

Примеры решения линейных уравнений:

$x + 3 = 0$; $x = -3$;	$2x + 1 = 0$; $2x = -1$; $x = -\frac{1}{2}$;	$2(x + 1) = 5$; $2x + 2 = 5$; $2x = 5 - 2$; $x = \frac{3}{2}$; $x = 1{,}5$;	$2(x + 1) = 3(x - 1)$; $2x + 2 = 3x – 3$; $2x – 3x = -3 – 2$; $-x = -5$; $x = 5$;

Квадратные уравнения

Содержат **неизвестную величину Х во второй степени**

Общий вид: **$ax^2 + bx + c = 0$**, где а – коэффициент при x^2, b – коэффициент при х, с – свободный коэффициент.

Типы квадратных уравнений:
полное - **$ax^2 + bx + c = 0$**
неполное - **$ax^2 + bx = 0$; $c = 0$;**
$ax^2 + c = 0$; $b = 0$;

приведенное – **$x^2 + px + q = 0$; $a = 1$;**

Примеры: $3x^2 + 2x - 1 = 0$; $(x + 1)(x – 2) = 0$; $3x^2 – 1 = 0$; $3x^2 + x = 0$.
Алгоритм решения квадратного уравнения: привести уравнение к виду:

$ax^2 + bx + c = 0$,	**$ax^2 + bx = 0$, $c = 0$**	**$ax^2 - c = 0$; в = 0;**	**$x^2 + px + q = 0$;**

найти дискриминант **D = b² – 4ac;** если D > 0, то $x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$; если D = 0, то $x = \frac{-b}{2a}$; если D<0, то корней нет	если **a + b + c = 0**, то $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a}$. (если **a = 1**, то $x_1 = 1$, $x_2 = c$)	вынести **x** за скобки: **x (ax + b) = 0;** $x_1 = 0$; и решить уравнение **ax + b = 0;** $x_2 = -\frac{b}{a}$	$ax^2 = c$; $x^2 = \frac{c}{a}$; $x = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$, где $\frac{c}{a} > 0$	**по теореме Виета**: $x_1 \cdot x_2 = q$, $x_1 + x_2 = -p$

Дробно – рациональные уравнения

Содержат **неизвестную величину X в знаменателе дробного выражения.**

Общий вид: $\frac{Q(x)}{R(x)} = 0$, $R(x) \neq 0$.

Примеры: $\frac{3}{x} = 5$; $\frac{3x}{x+1} = \frac{x-2}{x}$; $\frac{3x+6}{x} = 0$.

Алгоритм решения уравнения

$$\frac{S(x)}{P(x)} = \frac{B(x)}{T(x)}$$

I способ:

1. Привести уравнение к общему виду $\frac{Q(x)}{R(x)} = 0$ для этого:

а) перенести дробное выражение из правой части в левую;
б) привести дроби к общему знаменателю;

2. Числитель дроби приравнять к нулю, решить уравнение: Q(x) =0;
3. Найти ОДЗ: R(x) ≠ 0.

Алгоритм решения

$$\frac{S(x)}{P(x)} = \frac{B(x)}{T(x)}$$

II способ

По свойству пропорции, перемножить крест на крест:
числитель левой дроби на знаменатель правой дроби, а знаменатель левой дроби на числитель правой дроби;

2. Решить уравнение S(x) · T(x) = P(x) · B(x).
3. Найти ОДЗ: P(x) ≠ 0. T(x) ≠ 0;

Примеры решения уравнений:

$\frac{3}{x} = 5$

5x = 3

x = $\frac{3}{5}$;

ОДЗ: x ≠ 0.

Ответ: x = 0,6.

$\frac{3x+6}{x-2} = 0$.

3x + 6 = 0;

3x = - 6;

x = -2;

ОДЗ: x – 2 ≠ 0.

x ≠ 2;

Ответ: x = -2.

$\frac{3x}{x+1} = \frac{x+2}{x}$; ⇔ 3x · x = (x + 1) · (x + 2);

$3x^2 = x^2 + 2x + x + 2$;

$3x^2 – x^2 - 3x - 2 = 0$;

$2x^2 – 3x – 2 = 0$;

D = 3^2 – 4 ·2 · (-2) = 9 + 16 = 25;

$x_1 = \frac{3+5}{2 \cdot 2} = 2$; $x_2 = \frac{3-5}{2 \cdot 2} = -1$.

ОДЗ : $\begin{cases} x + 1 \neq 0 \\ x \neq 0. \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq -1; \\ x \neq 0. \end{cases}$

Ответ: x = 2.

Формулы сокращенного умножения:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
$(a + b)(a – b) = a^2 – b^2$;

$(a + b)^3 = a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3$;
$(a - b)^3 = a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3$;

$a^3 – b^3 = (a – b)(a^2 + ab + b^2)$;
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$;

Решение систем уравнений

Метод сложение

При решении системы двух линейных уравнений с двумя переменными способом сложения поступают следующим образом:

- умножают почленно уравнения системы, подбирая множители так, чтобы коэффициенты при одной из переменных стали противоположными числами, складывают почленно левые и правые части уравнений системы, решают получившееся уравнение с одной переменной

Метод подстановки

Суть метода подстановки:

Выразить одну переменную через другую из любого уравнения системы.

Подставить полученное выражение в другое уравнение системы и решить, как одно уравнение с одной неизвестной переменной. Зная одну переменную, найти другую из исходного уравнения. Метод позволяет свести решение системы к решению одного уравнения с одним неизвестным.

Решение неравенств

Неравенство – это выражение, содержащее неизвестную величину (Х) и знаки неравенств >, <, ≤, ≥.

Решить неравенство – это значит найти все его решения, или доказать их отсутствие.

Решение неравенства – это все значения неизвестной величины Х, при которых неравенство обращается в верное неравенство.

Типы неравенств:

Тип неравенства	Общий вид	Примечание	Примеры
Линейное	$\mathbf{ax > b}$	Содержит неизвестную величину Х в первой степени.	x + 2 < 3; 2 (x + 1) +3 (2x – 1) > 0
Квадратное	$\mathbf{ax^2 + bx + c < 0}$	Содержит неизвестную величину Х во второй степени.	$3x^2 + 2x - 1 \geq 0$; (x – 1) (x + 2) > 3.
Дробно - рациональное	$\frac{Q(x)}{R(x)}$ **< 0**	Содержит неизвестную величину Х в знаменателе дробного выражения.	$\frac{3}{x} < 5$; $\frac{x+1}{2x} > 1$; $3\ (x+2) + \frac{x-5}{2x+4} \leq 6$

Свойства неравенств:

Свойство	Применение к неравенству
Если, a > b, то b < a.	Части неравенства можно поменять местами, изменив знак.
Если, a > b, m – любое число, то a ± m > b ± m.	Слагаемые можно переносить из одной части неравенства в другую, поменяв знак слагаемого на противоположный.
Если, a > b, **m>0, то a m > b m,** $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$ **;** **m<0, то a m < b m,** $\frac{a}{m} < \frac{b}{m}$ **;**	Если обе части неравенства умножить, или разделить на одно и тоже положительное число, неравенство при этом не изменится. Если обе части неравенства умножить, или разделить на одно и тоже отрицательное число, знак неравенства при этом изменится на противоположный.

Линейные неравенства

Содержат **неизвестную величину Х в первой степени;**

Общий вид: **a x > b, a x < b, a x ≥ b, a x ≤ b, a ≠ 0.**

Примеры: 2x + 3 > 5; 2 (x + 1) – 3 (2x – 1) < 5; 2(x + 4) – 5 ≥ 3(x -4).

Алгоритм решения неравенства ***Q(x) > R(x):***

3. Привести неравенство **Q(x)** > **R(x)** к виду **ax** > **b**:
   а) раскрыть скобки;
   б) собрать слагаемые с Х в левой части неравенства, свободные слагаемые – в правой части;
   в) привести подобные слагаемые;
4. разделить обе части неравенства на коэффициент **а,**

если а > 0, то знак неравенства не меняется: $\mathbf{x > \frac{b}{a}}$**;**

если а < 0, то знак неравенства меняется: $\mathbf{x < \frac{b}{a}}$**.**

5. запишите ответ в виде интервала: $x \in (\frac{b}{a}; \infty)$, или $x \in (-\infty; \frac{b}{a})$.

Примеры решения линейных неравенств:

$x + 3 < 0$; $x < -3$; $x \in (-\infty; -3)$.	$1 - 2x < 0$; $- 2x < -1$; $x > \frac{1}{2}$; $x \in (0{,}5; \infty)$.	$2(x + 1) \geq 5$; $2x + 2 \geq 5$; $2x \geq 5 - 2$; $x \geq 1{,}5$; $x \in [1{,}5; \infty)$;	$2(x + 1) \leq 3(x - 1)$; $2x + 2 \leq 3x - 3$; $2x - 3x \leq -3 - 2$; $-x \leq -5$; $x \geq 5$; $x \in (5; \infty)$.

Квадратные неравенства

Содержат **неизвестную величину X во второй степени.**

Общий вид: $\mathbf{ax^2 + bx + c \geq 0}$,
где a – коэффициент при x^2, b – коэффициент при x, c – свободный коэффициент.

полное **-** $\mathbf{ax^2 + bx + c < 0}$;

неполное **-** $\mathbf{ax^2 + bx > 0}$; $\mathbf{ax^2 + c < 0}$;

приведенное **–** $\mathbf{x^2 + px + q > 0}$;

Примеры: $3x^2 + 2x - 1 \geq 0$; $(x + 1)(x - 2) > 0$; $3x^2 - 1 < 0$; $3x^2 + x \leq 0$.

Алгоритм решения квадратного неравенства $ax^2 + bx + c \geq 0$:

Решить квадратное Неравенство $ax^2 + bx + c = 0$;

2. Отметить на луче корни квадратного уравнения $x_1 > x_2$, x_2 x_1

4. Выбрать интервал, соответствующий знаку неравенства:

+ - +

… > 0 - интервал со знаком «+»;

… < 0 - интервал со знаком «-».

Примеры решения квадратных неравенств:

$3x^2 + 6x \leq 0$;	$9 - x^2 > 0$;	$-2x^2 + 3x + 2 \leq 0$;
$3x^2 + 6x = 0$; $3x(x + 2) = 0$; $x_1 = 0$; $x + 2 = 0$; $x_2 = -2$; + - + -2 0 Ответ: $x \in [-2; 0]$;	$9 - x^2 = 0$; $x^2 = 9$; $x = \pm 3$; - + - -3 3 Ответ: $x \in (-3; 3)$;	$-2x^2 + 3x + 2 = 0$; $D = b^2 - 4ac = 9 + 16 = 25$; $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-3 + 5}{-4} = -\frac{1}{2}$; $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-3 - 5}{-4} = 2$; - + - -0,5 2 Ответ: $x \in (-\infty; -0{,}5) \cup (2; \infty)$.

Практическая работа №3

Решение рациональных уравнений и неравенств

	1	**2**	4	5	**5**	**6**
	Решите квадратное уравнение	Решите дробно-линейное уравнение	Решить дробно-линейное уравнение	Решите дробно-линейное неравенство	Решите систему линейных неравенств	Решите систему неравенств
1	$x^2+8x-33=0$	$\frac{3x}{x-1}=\frac{2}{x+2}$	$\frac{x}{x-2}+\frac{5}{x+2}=\frac{8}{x^2-4}$	$\frac{36x-x^2}{3x-2}\le 0$	$\begin{cases}3x-2\le 0\\ x>1\end{cases}$	$\begin{cases}2-6x\ge 4\\ x^2-6x-5>0\end{cases}$
2	$x^2-11x+30=0$	$\frac{3}{x+1}=\frac{2x}{x-1}$	$\frac{4x}{x+3}-\frac{5}{3-x}=\frac{1}{x-3}-1$	$\frac{3+x}{2x^2+x}\ge 0$	$\begin{cases}2x\le 5\\ x+3>0\end{cases}$	$\begin{cases}x^2-2x-3\ge 0\\ 5-x<1\end{cases}$
3	$x^2-6x-135=0$	$\frac{11}{x-4}=\frac{4x}{x+4}$	$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{x^2-2}{x^2+x}$	$\frac{x^2-36}{2x+1}\le 0$	$\begin{cases}x-2\le 0\\ 5x>1\end{cases}$	$\begin{cases}3-4x\le 5\\ x^2-4x+3<0\end{cases}$
4	$x^2-19x+88=0$	$\frac{3x}{x-2}=\frac{5}{x+2}$	$\frac{3x-6}{(x-1)(x+2)}=\frac{3x}{x-1}-\frac{2x}{x+2}$	$\frac{49x-x^2}{4x-3}\ge 0$	$\begin{cases}2x\ge 7\\ x-3>0\end{cases}$	$\begin{cases}x^2-3x-2\ge 0\\ 5<1-x\end{cases}$
5	$x^2+4x-32=0$	$\frac{4x}{x+3}=\frac{5}{3-x}$	$\frac{6}{x^2-1}-\frac{2}{x-1}=2-\frac{x+4}{x+1}$	$\frac{1+x}{x^2+3x}\le 0$	$\begin{cases}4x+2\le 0\\ x>-3\end{cases}$	$\begin{cases}3-4x\ge 5\\ x^2-7x+6>0\end{cases}$
6	$5x^2-16x+3=0$	$\frac{5x}{x-3}=\frac{5}{x+1}$	$\frac{4}{x+2}-\frac{3}{x-2}-\frac{12}{4-x^2}=\frac{1}{7}$	$\frac{x^3-49x}{2x-3}\ge 0$	$\begin{cases}6x\le 2\\ x-5>0\end{cases}$	$\begin{cases}x^2-3x-5\le 0\\ 5<3-x\end{cases}$
7	$7x^2+9x+2=0$	$\frac{3x}{x-1}=\frac{2}{x+2}$	$\frac{3}{x+2}-\frac{2x-1}{x+1}=\frac{2x+1}{x^2+3x+2}$	$\frac{x^3-9x}{3x^2-x}\le 0$	$\begin{cases}2x-3\ge 0\\ x<1\end{cases}$	$\begin{cases}3-x\le 4\\ x^2+6x+4>0\end{cases}$
8	$5x^2-8x+3=0$	$\frac{2}{x-3}=\frac{4x}{x+1}$	$\frac{2}{x^2-4}+\frac{x-4}{x^2+2x}=\frac{1}{x^2-2x}$	$\frac{5-x}{(x-7)^2}\ge 0$	$\begin{cases}4x\le 5\\ x-1<0\end{cases}$	$\begin{cases}2-x\le 5\\ x^2+3x-4>0\end{cases}$
9	$6x^2-7x+1=0$	$\frac{4}{x+2}=\frac{3x}{x-2}$	$\frac{3x}{x-1}-\frac{2x}{x+2}=\frac{3x-6}{(x-1)(x+2)}$	$\frac{x^2-9}{2x-11}\le 0$	$\begin{cases}3x-2\ge 0\\ x<1\end{cases}$	$\begin{cases}x^2+5x-2\le 0\\ 5-x>1\end{cases}$

Практическая работа №4

Тема: «Площади плоских фигур»

Цель: Применить знания, умения и навыки обучающихся, сформированные при изучении тем планиметрии.

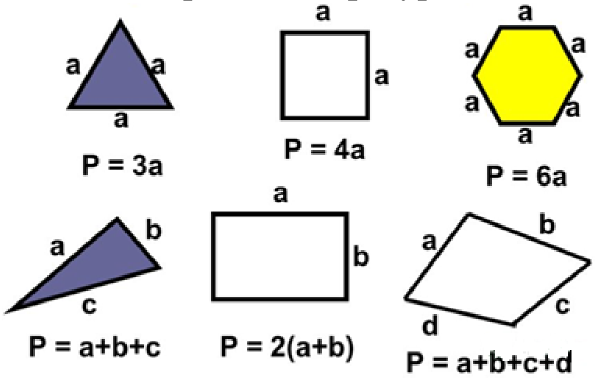
Изучить теоретический материал.

Порядок выполнения:

1. Ознакомиться с теоретическим материалом и решением задач .
2. Изучить образцы решенных задач.
3. Выполнить практическую работу.
4. Сделать вывод.
5. Ответить на контрольные вопросы

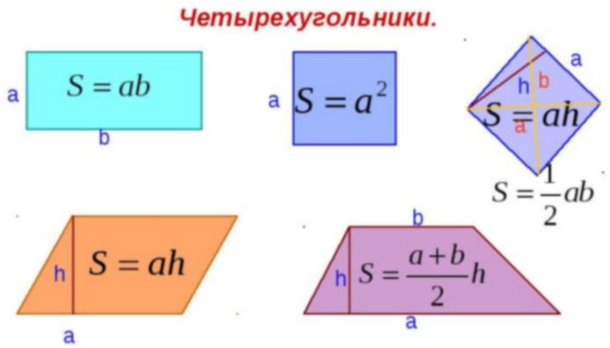
Теоретическая часть

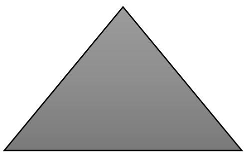
Основные виды геометрических фигур:



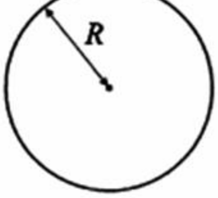
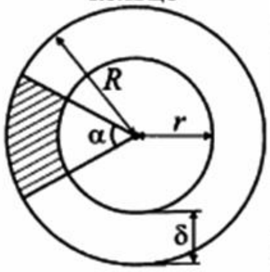
Площадь, обозначение: S. Единицы измерения: $мм^2$, $см^2$, $дм^2$, $м^2$, …

Формулы площадей многоугольников:

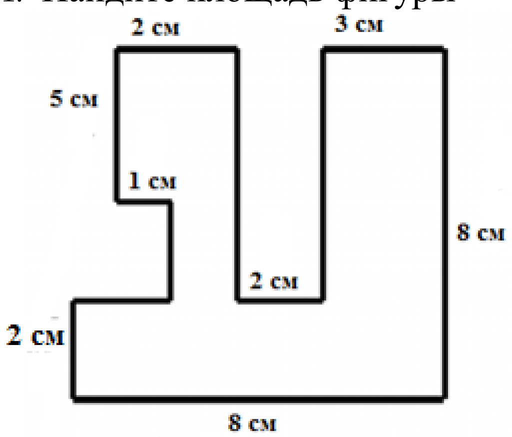
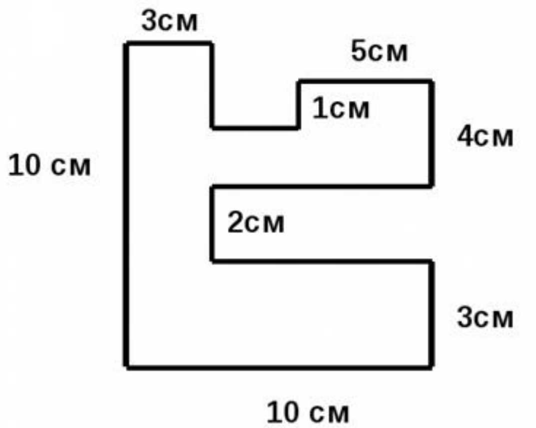
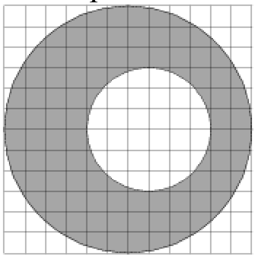
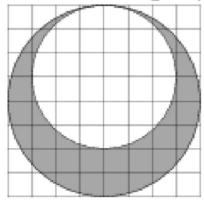


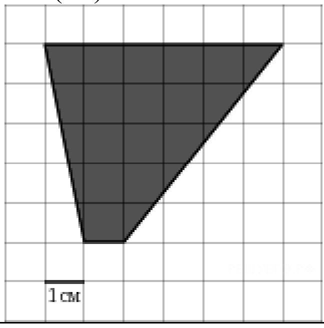
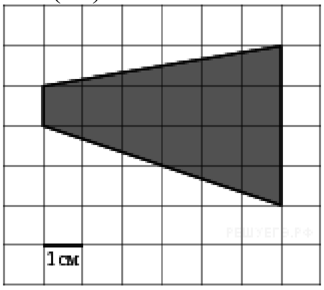


треугольник

Круг 	R — радиус; l — длина окружности.	$S = \pi R^2$ $l = 2\pi R$
Круговое кольцо 	r — внутренний радиус; R — наружный радиус; d — внутренний диаметр; D — наружный диаметр; $\varrho = \frac{r+R}{2}$ — средний радиус; $\delta = R - r$ — ширина кольца; α — центральный угол части кольца (в градусах).	$S = \pi(R^2 - r^2)$ $S = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$ $S = 2\pi\rho\delta$ Площадь части кольца: $S = \frac{\pi\alpha}{360}(R^2 - r^2)$ $S = \frac{\pi\alpha}{90}(D^2 - d^2)$ $S = \frac{\pi\alpha}{180}\rho\delta$

Практическая часть.

<table>
<tr><td>1 вариант</td><td>2 вариант</td></tr>
<tr><td>1. Найдите площадь фигуры
</td><td>1. Найдите площадь фигуры
</td></tr>
<tr><td>2. На клетчатой бумаге нарисовано два круга. Площадь внутреннего круга равна 1. Найдите площадь заштрихованной фигуры.
</td><td>2. На клетчатой бумаге нарисовано два круга. Площадь внутреннего круга равна 9. Найдите площадь заштрихованной фигуры.
</td></tr>
<tr><td>3. Основание садового домика – прямоугольник 6х8 (м). Крыша наклонена под углом 45° к основанию. Найдите площадь крыши. В ответе укажите приближенное</td><td>3. Основание садового домика – прямоугольник 8х10 (м). Крыша наклонена под углом 45° к основанию. Найдите площадь крыши. В ответе укажите приближенное</td></tr>
</table>

значение, равное целому числу квадратных метров.	значение, равное целому числу квадратных метров.
4. Найдите площадь лесного массива (в м2), изображенного на плане с квадратной сеткой 1х1 (см) в масштабе 1 см – 200 м. 	4. Найдите площадь лесного массива (в м2), изображенного на плане с квадратной сеткой 1х1 (см) в масштабе 1 см – 200 м. 

Сделайте вывод.

Контрольные вопросы (ответить письменно).

1. Как обозначается площадь?
2. С помощью какой формулы вычислить площадь круга?
3. Какие вы знаете единицы измерения площади?

Практическая работа №5: Числовая функция

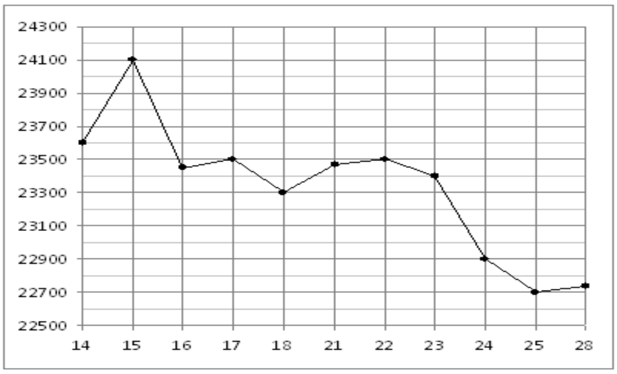
Тема: Числовая функция, её свойства и графики.
Цель: Применение и закрепление знаний и умений к решению задач.

1 вариант.

1. Найти область определения функции: а) $y = \dfrac{1}{x+2}$ б) $y = \sqrt[4]{x^2 - 7x + 10}$
2. Доказать, что функция периодическая с периодом Т: $y = \sin 2x$, $T = \pi$
3. Выяснить, является ли данная функция чётной или нечётной: $y = x \cdot \sin x$
4. Построить график функции, заданной: а) формулой $y = \begin{cases} x^2 + 4, \text{ если } x \le 1 \\ 5, \text{ если } x > 1 \end{cases}$

б) описанием: $Д$ (f) = [1; 7] , f(7) = 1, $f(x) = x^2$ при $1 \le x \le 2$, y = f(x) убывает на промежутке $2 < x \le 7$

5. На рисунке жирными точками показана цена олова на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 14 по 28 июля 2008 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны олова в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена олова на момент закрытия торгов была наименьшей за данный период.



2 вариант.

1. Найти область определения функции: а) $y = \dfrac{1}{x-3}$ б) $y = \sqrt[4]{x^2 + 4x - 5}$

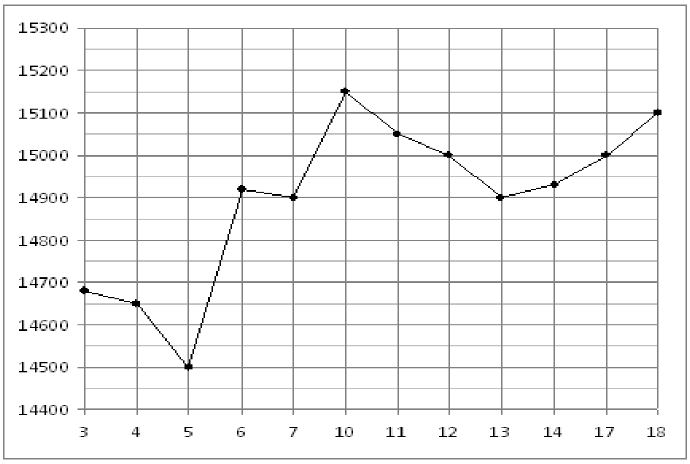
2. Доказать, что функция периодическая с периодом Т: $y = \cos\dfrac{x}{2}$, Т = 4π

3. Выяснить, является ли данная функция чётной или нечётной: y = x + sin x

4. Построить график функции, заданной : а) формулой $y = \begin{cases} 1 - x^2, \textit{ если } x \le 1 \\ -3, \textit{ если } x > 1 \end{cases}$

б) описанием: *Д* (f) = [-3; 3], E(f) : f(x) < 0 , функция чётная, возрастает при x < 0, убывает при x ≥ 0

5. На рисунке жирными точками показана цена олова на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 3 по 18 сентября 2007 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны олова в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наибольшую цену олова на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за тонну).



Практическая работа №6: Углы и их измерения

Цель: формирование навыков определения меры углов.

Теоретический материал

<u>Геометрический угол</u> – это часть плоскости, ограниченная двумя лучами, выходящими из одной точки – вершины угла (рис. 1).

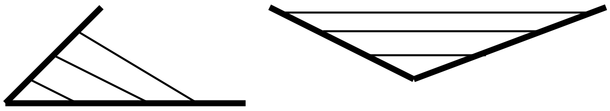


Рис. 1

В качестве единицы измерения геометрических углов принят <u>градус</u> - $\frac{1}{180}$ часть развернутого угла. Конкретные углы измеряют в градусах с помощью транспортира. Углы, получающиеся при непрерывном вращении, удобно измерять с помощью таких чисел, которые отображали бы сам процесс построения угла, т. е. вращение. На практике углы поворота зависят от времени.

Допустим, что зафиксированы вершина угла и один из образующих его лучей, а второй луч будет вращаться вокруг вершины. Получающиеся углы будут зависеть от скорости вращения и времени. Поворот будет определяться путем, который пройдет какая – либо фиксированная точка подвижного луча.

Если расстояние точки от вершины равно R, то при вращении точка движется по окружности радиуса R. Отношение пройденного пути к радиусу R не зависит от радиуса и может быть взято за меру угла. Численно эта мера равна пути, пройденному точкой по окружности единичного радиуса (рис. 2).

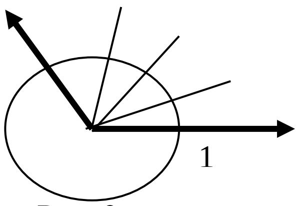


Рис. 2

<u>Развернутый угол</u> измеряется половиной длины единичной окружности. Это число обозначается буквой π. Число π = 3, 14159265358 …

$$1° = \frac{\pi}{180} \approx 0{,}017 \text{ и } 1\ \textit{рад.} = \frac{180}{\pi} = 57{,}296°.$$

В географии, астрономии и других прикладных науках используют доли градусов – минуту и секунду. Минута – это $\frac{1}{60}$ градуса, а секунда – $\frac{1}{60}$ минуты.

$$1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ} = 0{,}0003\,, \qquad 1'' = \left(\frac{1}{60}\right)' = \left(\frac{1}{3600}\right)^{\circ} = 0{,}000005$$

$$1\ \textit{рад.} = 57{,}296^{\circ} = 57^{\circ}17'45''$$

Пример 1: Выразим в градусах 4,5 рад. Так как $1\ \textit{рад.} = \frac{180}{\pi}$, то $4{,}5\ \textit{рад.} = 4{,}5 \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{810^{\circ}}{\pi} \approx 258^{\circ}$.

Пример 2: Найдем радианную меру угла 72°. Так как $1^{\circ} = \frac{\pi}{180}\textit{рад.}$, то $72^{\circ} = 72 \cdot \frac{\pi}{180^{\circ}}\textit{рад.} \approx 1{,}3\ \textit{рад.}$

Выразим в радианной мере углы $30^{\circ}, 45^{\circ}, 60^{\circ}, 90^{\circ}, 270^{\circ}, 360^{\circ}$:

$$30^{\circ} = \frac{\pi}{180^{\circ}} \cdot 30^{\circ} = \frac{\pi}{6} \qquad 60^{\circ} = \frac{\pi}{180^{\circ}} \cdot 60^{\circ} = \frac{\pi}{3} \qquad 270^{\circ} = \frac{\pi}{180^{\circ}} \cdot 270^{\circ} = \frac{3\pi}{2}$$

$$45^{\circ} = \frac{\pi}{180^{\circ}} \cdot 45^{\circ} = \frac{\pi}{4} \qquad 90^{\circ} = \frac{\pi}{180^{\circ}} \cdot 90^{\circ} = \frac{\pi}{2} \qquad 360^{\circ} = \frac{\pi}{180^{\circ}} \cdot 360^{\circ} = 2\pi$$

Упражнения

1. Найдите градусную меру угла, радианная мера которого равна:

№	1 вариант	2 вариант
1	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{5}$
2	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{4}$
3	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{4}$
4	$\frac{4\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{2}$
5	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{6}$

1. Найдите радианную меру угла, градусная мера которого равна:

№	**1 вариант**	**2 вариант**
1	$135°$	$45°$
2	$36°$	$15°$
3	$150°$	$215°$
4	$240°$	$72°$
5	$360°$	$330°$

Практическая работа №7: ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Цель: формирование навыков использования свойств тригонометрических функций при преобразовании выражений.

Теоретический материал

Тригонометрические функции определяются с помощью координат вращающейся точки.

Отметим на оси x справа от начала координат точку A и проведем через нее окружность с центром в точке O. Радиус OA называется начальным радиусом. При повороте против часовой стрелки считают угол положительным, при повороте по часовой стрелке – отрицательным (рис. 3).

При повороте на угол α начальный радиус OA переходит в радиус OB.

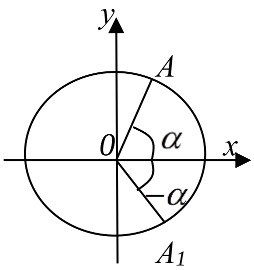


Рис. 3

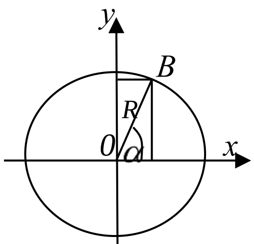


Рис. 4

Определение: Синусом угла α называется отношение ордината точки B к длине радиуса (рис. 4).

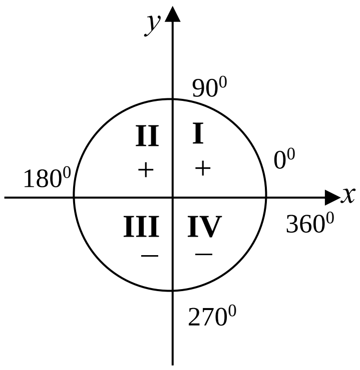
Определение: Косинусом угла α называется отношение абсциссы точки B к длине радиуса (рис. 4).

Определение: Тангенсом угла α называется отношение ординаты точки B к её абсциссе.

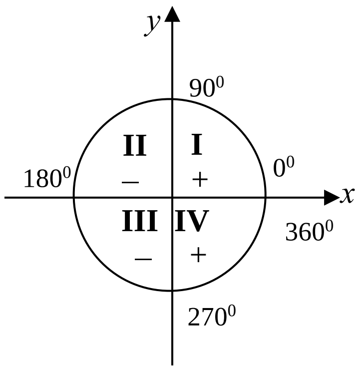
Определение: Котангенсом угла α называется отношение абсциссы точки B к её ординате.

Знаки тригонометрических функций определяются в зависимости от того, в какой четверти лежит рассматриваемый угол. I четверть – от $0°$ до $90°$, II четверть – от $90°$ до $180°$, III четверть – от $180°$ до $270°$, IV четверть - от $270°$ до $360°$.

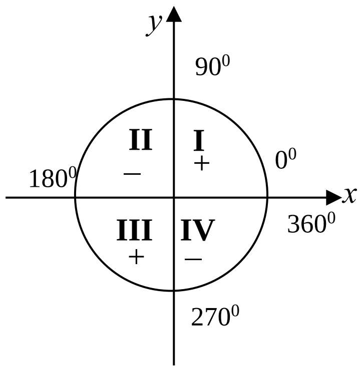
Знаки синуса



Знаки косинуса



Знаки тангенса и котангенса



При изменении угла на целое число оборотов значение синуса, косинуса, тангенса и котангенса не изменится.

Пример 1: Найдите значение $\sin(-810°)$.

Решение: $\sin(-810°) = -\sin(720° + 90°) = -\sin 90° = -1$.

Пример 2: Определите знак $\cos 52°$. Решение: Угол $52°$ - угол первой четверти, значит $\cos 52°$ имеет знак $+$.

Упражнения

1. Определите, какой знак имеют $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$ и $ctg\alpha$:

а) $\alpha = 48°$;	в) $\alpha = 200°$;
б) $\alpha = 137°$;	г) $\alpha = 306°$.

2. Определите, какой знак имеют тригонометрические функции:

$\sin 179°$ $\qquad$ $\cos 280°$ $\qquad$ $tg 145°$

$ctg359°$ | $\sin(-75°)$ | $\sin 109°$
$\cos 140°$ | $\cos(-116°)$ | $\cos(-26°)$
$tg500°$ | $\cos 315°$ | $tg(-10°)$

3. Определите, углом, какой четверти является угол α , если:

а) $\sin\alpha > 0$ и $\cos\alpha > 0$;

б) $\sin\alpha < 0$ и $\cos\alpha > 0$;

в) $ctg\alpha < 0$ и $\sin\alpha < 0$;

г) $tg\alpha < 0$ и $\cos\alpha > 0$

4. Определите знак выражения:

а) $\sin 100° \cdot \cos 300°$;

б) $\sin 190° \cdot tg200°$;

в) $\cos 320° \cdot ctg17°$;

г) $tg170° \cdot \cos 400°$.

5. Найдите значение выражения:

$\sin(-30°)$

$tg(-900°)$

$\cos 405°$

$ctg1110°$

Математический диктант

В – 1

1. Синус – это …
2. Тангенс – это …
3. Угол $38°$ - угол … четверти.
4. Угол $-179°$ - угол … четверти.
5. $ctg259°$ имеет знак …
6. $\cos 114°$ имеет знак …
7. $\sin 390° = ...$
8. $\cos(-150°) = ...$
9. $tg480° = ...$
10. $ctg(-660°) = ...$

В – 2

1. Косинус – это …
2. Котангенс – это …
3. Угол $189°$ - угол … четверти.
4. Угол $-79°$ - угол … четверти.
5. $tg239°$ имеет знак …
6. $\sin 89°$ имеет знак …
7. $\sin 290° = ...$
8. $\cos(-30°) = ...$
9. $tg390° = ...$
10. $ctg(-765°) = ...$

Практическая работа №8: ОСНОВНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА

Цель: формирование навыков использования основных тригонометрических тождеств при преобразовании выражений.

Теоретический материал

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$tg^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$ctg^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$tgx \cdot ctgx = 1$$

Эти равенства называют основными тригонометрическими тождествами.

Пример 1. Упростите выражение $1-\cos^2 x$.

Решение: Используем для решения формулу $\sin^2 x+\cos^2 x=1$. $\Rightarrow$ $1-\cos^2 x=\sin^2 x+\cos^2 x-\cos^2 x=\sin^2 x$

Пример 2. Найдите значение $tg\alpha$, если $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Решение: $tg\alpha=\frac{\sin x}{\cos x}$, $\sin^2 x+\cos^2 x=1 \Rightarrow \sin^2 x=1-\cos^2 x \Rightarrow \sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}$

$$\Rightarrow \sin x=\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{25-16}{25}}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$$

$$tg\alpha=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=\frac{3}{5}:\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{4}=-\frac{3}{4}$$

Практическая часть

В – 1

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = ...$
2. $ctgx = ...$
3. $tg^2 x + 1 = ...$
4. $\sin x \cdot ctgx = ...$
5. $\dfrac{1 - \sin^2 x}{\cos x} = ...$
6. Найдите значение $tg\alpha$, если $\sin\alpha = -\dfrac{3}{5}$, $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

В – 2

1. $tgx \cdot ctgx = ...$
2. $tgx = ...$
3. $ctg^2 x + 1 = ...$
4. $tgx \cdot \cos x = ...$
5. $tg(-x) \cdot ctgx + \sin^2 x = ...$
6. Найдите значение $ctg\alpha$, если $\sin\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{7}}$, $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$.

Контрольные вопросы

1. В каком случае функция меняется на кофункцию?
2. В каком случае функция не изменятся?
3. Как определяется знак функции?

Практическая работа №8: **ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ**

Цель: формирование навыков использования формул приведения при преобразовании выражений.

Теоретический материал

Если в скобках $(90^\circ \pm \alpha)$ или $(270^\circ \pm \alpha)$, то функция меняется на сходную. Если $(180^\circ \pm \alpha)$ или $(360^\circ \pm \alpha)$, то функция не меняется. Знак результата определяется по знаку левой части.

$f(x)$	x							
	$\frac{\pi}{2}-x$	$\frac{\pi}{2}+x$	$\pi-x$	$\pi+x$	$\frac{3\pi}{2}-x$	$\frac{3\pi}{2}+x$	$2\pi-x$	$2\pi+x$
$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$
$\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$
tgx	$ctgx$	$-ctgx$	$-tgx$	tgx	$ctgx$	$-ctgx$	$-tgx$	tgx
$ctgx$	tgx	$-tgx$	$-ctgx$	$ctgx$	tgx	$-tgx$	$-ctgx$	$ctgx$

Пример 1. Найдите значение $\cos\frac{8\pi}{3}$.

$$\cos\frac{8\pi}{3}=\cos\left(\frac{6\pi+2\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{6\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(2\pi+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}=\cos\left(\frac{3\pi-\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$

Пример 2. Найдите значение $\sin 300^\circ$.

Решение: $\sin 300^\circ=\sin(90^\circ+210^\circ)=\cos 210^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Практическая часть

1. Найдите значение выражения:

№	**1 вариант**	**№**	**2 вариант**
1	$\sin 240^\circ$	**1**	$\sin 315^\circ$
2	$\sin 330^\circ$	**2**	$\cos 120^\circ$
3	$\cos\frac{7}{6}\pi$	**3**	$\sin\frac{4\pi}{3}$
4	$tg300^\circ$	**4**	$ctg(-225^\circ)$
5	$\cos(-210^\circ)$	**5**	$\sin(-150^\circ)$

2. Упростите выражения:

1 вариант	2 вариант
$\dfrac{\cos(-x)\cdot\cos(180^\circ - x)}{\sin(-x)\cdot\sin(90^\circ + x)}$	$\dfrac{\sin(\pi + x)\cdot\sin(x + 2\pi)}{tg(\pi - x)\cdot\cos\left(\frac{3}{2}\pi + x\right)}$

Практическая работа №10: Решение тригонометрических уравнений

<u>Цель:</u> закрепить умения и навыки решения задач по теме: «Решение тригонометрических уравнений вида cosx=a, sinx=a, tgx=a, ctgx=a».

Методические указания:

уравнение	Формула общего решения	Частные решения a=0; 1; - 1
cosx = **a**	a$\in$ [-1;1] x= $\pm$ arccos a + 2πn , n$\in$Z	1) cos x = 0 x= $\frac{\pi}{2} + \pi n$, n$\in$Z 2) cos x = -1 x= π +2πn, n$\in$Z 3) cos x = 1 x= 2πn, n$\in$Z
уравнение	Формула общего решения	Частные решения a=0; 1; - 1

sin x = a	a є [-1;1] x = (-1)narcsin a + πn, nєZ	1) sin x = 0 x= πn, nєZ 2) sin x = -1 x= − – П2 +2πn, nєZ 3) sin x = 1 x= – П2 +2πn, nєZ
tg x =a	a– любое x = arctg a + πn, nєZ	

Задания для практической работы:

I уровень

Решить уравнения:

	В-1		**В-2**
1	$\cos x = 0$	1	$\cos x = 1$
2	$\cos x = \frac{1}{2}$	2	$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
3	$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	3	$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
4	$2\cdot\sqrt{3} + 4\cos x = 0$	4	$2\cdot\sqrt{2} + 4\cos x = 0$
5	$\sin x = \frac{1}{2}$;	5	$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
6	$\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	6	$\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$.

II уровень

1 Решить уравнения:

а) $\cos\frac{x}{6} = 0$; б) $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\cos\left(2x + \frac{\Pi}{3}\right) = 1$;

г) $\cos\frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; д) $\cos 4x = 0$.

2 Решить уравнения:

а) $\cos(\Pi + x) = \sin(-\frac{\Pi}{6})$ б) $2\cdot\cos\frac{x}{2} + 1 = 0$; в) $2\cos(\frac{\Pi}{4} + x) = \sqrt{2}$;
г) $\cos(\Pi + x) = \sin\frac{\Pi}{2}$; д) $2\cdot\cos\frac{x}{4} - \sqrt{3} = 0$.

3 Найдите корни уравнения $2\cdot\cos x + \sqrt{3} = 0$, принадлежащие отрезку $[0; 2\Pi]$.

4 Найдите корни уравнения $2\cdot\cos x - 1 = 0$, принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi]$.

Практическая работа №11: Решение тригонометрических неравенств

Цель: Закрепление умений и навыков при решении задач.

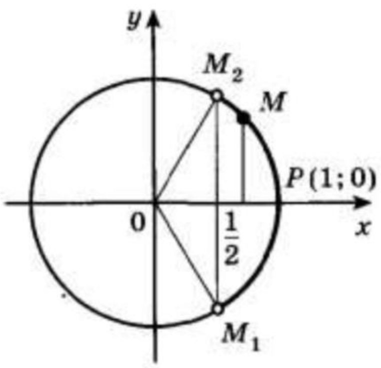
Методические рекомендации

Опр.

Неравенства, содержащие переменную под знаком тригонометрической функции, называются
тригонометрическими.

При решении тригонометрических неравенств используют единичную окружность.

Задача Решить неравенство $\cos x > \frac{1}{2}$



По определению cos x – это абсцисса точки единичной окружности. Абсциссу, равную $\frac{1}{2}$, имеют две точки единичной окружности M_1 и M_2. Абсциссу, большую $\frac{1}{2}$ имеют все точки M дуги единичной окружности, лежащие правее прямой M_1M_2. Таким образом, решениями неравенства $\cos x > \frac{1}{2}$ являются все числа x из промежутка $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$.

Все решения данного неравенства – множество интервалов $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$

Ответ: $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$

Решить неравенство $\sin x \geqslant -\frac{1}{2}$.

Ординату, не меньшую $-\frac{1}{2}$, имеют все точки дуги M_1MM_2 единичной окружности (рис. 82). Поэтому решениями неравенства $\sin x \geqslant -\frac{1}{2}$ являются числа x, принадлежащие промежутку $-\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{6}$. Все решения данного неравенства — множество отрезков

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \triangleleft$$

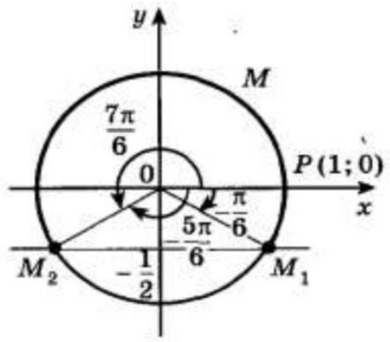


Рис. 82

Отметим, что все точки окружности, лежащие ниже прямой M_1M_2, имеют ординату, меньшую $-\frac{1}{2}$ (рис. 82). Поэтому все числа $x \in \left(-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}\right)$ являются решениями неравенства $\sin x < -\frac{1}{2}$. Все решения этого неравенства — интервалы

$$\left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right),\ n \in \mathbf{Z}.$$

Практическая работа

Тема: Решение тригонометрических неравенств.

Цель: Применение знаний при решении задач.

1 вариант.

Решить неравенства:

1) $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin x \leq \frac{1}{2}$; 4) $\sin x > -\sqrt{3}$ 5) $\sin 3x > -\frac{1}{2}$

Практическая работа

Тема: Решение тригонометрических неравенств.

Цель: Применение знаний при решении задач.

2 вариант.

Решить неравенства:

1) $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin x \geq \frac{1}{2}$; 4) $\sin x < -\sqrt{3}$ 5) $\sin 3x < -\frac{1}{2}$

Практическая работа №12: ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ

Цель: формирование навыков использования формул сложения при преобразовании выражений.

Теоретический материал

Косинус суммы двух углов равен произведению косинусов этих углов минус произведение синусов этих углов:

$$\cos(x+y)=\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y$$

Косинус разности двух углов равен произведению косинусов этих углов плюс произведение синусов этих углов:

$$\cos(x-y)=\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y$$

Синус суммы двух углов равен произведению синуса первого угла на косинус второго плюс произведение косинуса первого угла на синус второго:

$$\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y$$

Синус разности двух углов равен произведению синуса первого угла на косинус второго угла минус произведение косинуса первого угла на синус второго угла:

$$\sin(x-y)=\sin x\cdot\cos y-\cos x\cdot\sin y\,.$$

Используя формулы сложения для синуса и косинуса получаются формулы сложения для тангенса и котангенса:

$$tg(x+y)=\frac{tgx+tgy}{1-tgx\cdot tgy} \qquad ctg(x+y)=\frac{ctgx\cdot ctgy-1}{ctgx+ctgy}$$

$$tg(x-y)=\frac{tgx-tgy}{1+tgx\cdot tgy} \qquad ctg(x-y)=\frac{ctgx\cdot ctgy+1}{ctgx-ctgy}$$

Пример 1. Вычислите $\cos 15°$.

Решение: представим $15°$ в виде разности $45°-30°$. Тогда $\cos 15°=\cos(45°-30°)=\cos 45°\cdot\cos 30°+\sin 45°\cdot\sin 30°=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Пример 2. Упростите выражение $\cos(x+y)+\cos(x-y)$.

Решение:

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y+\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y=2\cos x\cdot\cos y$$

Упражнения

1. С помощью формул сложения преобразуйте выражение:
   1) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)$
   2) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$
   3) $\cos(\pi+\beta)$
   4) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)$
2. Упростите выражения:
   1) $\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha\cdot\cos\beta$
   2) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\frac{1}{2}\cos\alpha$
   3) $\frac{\sin(\alpha+\beta)-\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)+\cos\alpha\cdot\sin\beta}$
   4) $\frac{\cos(\alpha-\beta)-2\sin\alpha\cdot\sin\beta}{2\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)}$
3. Найдите значение выражения:
   1) $\cos 107^\circ\cdot\cos 17^\circ+\sin 107^\circ\cdot\sin 17^\circ$
   2) $\cos 36^\circ\cdot\cos 24^\circ-\sin 36^\circ\cdot\sin 24^\circ$
   3) $\sin 63^\circ\cdot\cos 27^\circ+\cos 63^\circ\cdot\sin 27^\circ$
   4) $\sin 51^\circ\cdot\cos 21^\circ-\cos 51^\circ\cdot\sin 21^\circ$

Контрольные вопросы

1. Чему равен косинус разности двух углов?
2. Чему равен косинус суммы двух углов?
3. Чему равен синус суммы двух углов?
4. Чему равен синус разности двух углов?

Практическая работа №12: ФОРМУЛЫ СУММЫ И РАЗНОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Цель: формирование навыков использования формул суммы и разности при преобразовании выражений.

Теоретический материал

Сумма синусов двух углов равна удвоенному произведению синуса полусуммы этих углов на косинус их полуразности

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Разность синусов двух углов равна удвоенному произведению синуса полусуммы этих углов на косинус их полуразности

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Сумма косинусов двух углов равна удвоенному произведению косинуса полусуммы этих углов на косинус их полуразности

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Разность косинусов двух углов равна взятому со знаком «минус» удвоенному произведению синуса полусуммы этих углов на синус их полуразности

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Сумма тангенсов двух углов: $tgx + tgy = \dfrac{\sin(x+y)}{\cos x\cdot\cos y}$.

Разность тангенсов двух углов: $tgx - tgy = \dfrac{\sin(x-y)}{\cos x\cdot\cos y}$

Пример 1. Вычислите $\sin 10^\circ + \sin 50^\circ$.

Решение:

$$\sin 10^\circ + \sin 50^\circ = 2\sin\frac{10^\circ+50^\circ}{2}\cdot\cos\frac{10^\circ-50^\circ}{2} = 2\sin 30^\circ\cdot\cos(-20^\circ) = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos 20^\circ = \cos 20^\circ$$

Пример 2. Вычислите $\cos 90^\circ - \cos 30^\circ$.

Решение:

$$\cos 90^\circ - \cos 30^\circ = -2\sin\frac{90^\circ+30^\circ}{2}\cdot\sin\frac{90^\circ-30^\circ}{2} = -2\sin 60^\circ\cdot\sin 30^\circ = -2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Упражнения

1. Представьте в виде произведения:

1) $\sin 40° + \sin 16°$

2) $\sin 20° - \sin 40°$

3) $\cos 46° - \cos 74°$

4) $\cos 15° + \cos 45°$

5) $\sin\frac{2\pi}{5} + \sin\frac{\pi}{5}$

6) $\cos\frac{11\pi}{12} + \cos\frac{3\pi}{4}$

7) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + \cos\alpha$

8) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$

9) $tg25° + tg35°$

10) $tg\frac{\pi}{5} - tg\frac{\pi}{10}$

2. Докажите тождество:

1) $\frac{\sin 2x + \sin 6x}{\cos 2x + \cos 6x} = tg4x$

2) $\sin 87° - \sin 59° - \sin 93° + \sin 61° = \sin 1°$

3) $\cos 115° - \cos 35° + \cos 65° + \cos 25° = \sin 5°$

Контрольные вопросы

1. Чему равна сумма синусов?
2. Чему равна сумма косинусов?
3. Чему равна разность синусов?
4. Чему равна разность косинусов?
5. Чему равна сумма тангенсов?
6. Чему равна разность тангенсов?

Практическая работа №14: ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО УГЛА

Цель: формирование навыков использования формул двойного угла при преобразовании выражений.

Теоретический материал

$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$ $\qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ $\qquad tg 2x = \dfrac{2tgx}{1 - tg^2 x}$

Пример 1. Упростите выражение $\dfrac{\sin 2x}{\cos x}$.

Решение: $\dfrac{\sin 2x}{\cos x} = \dfrac{2\sin x \cdot \cos x}{\cos x} = 2\sin x$

Пример 2. Упростите выражение $\dfrac{\cos 2x}{\sin x + \cos x}$.

Решение: $\dfrac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x} = \dfrac{(\cos x - \sin x)\cdot(\cos x + \sin x)}{\sin x + \cos x} = \cos x - \sin x$.

Упражнения

1. Упростите выражения:
   1) $\dfrac{\sin 2x}{\sin x}$
   2) $\cos 2x + \sin^2 x$
   3) $\dfrac{\sin 2x}{\cos x} - \sin x$
   4) $\dfrac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} - \cos x$
   5) $\dfrac{2\cos^2 x}{\sin 2x}$
   6) $(1 - tg^2 x)\cdot \cos^2 x$

2. Докажите тождества:
   1) $1 - (\sin x - \cos x)^2 = \sin 2x$
   2) $ctgx - \sin 2x = ctgx \cdot \cos 2x$
   3) $(\sin x + \cos x)^2 - \sin 2x = 1$
   4) $4\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x = \sin 4x$
   5) $\sin 2x - tgx = \cos 2x \cdot tgx$
   6) $(ctgx - tgx)\cdot \sin 2x = 2\cos 2x$

Практическая работа

В – 1

Упростите выражения: $\frac{\sin x}{\sin 2x}$, $\sin\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{8}$, $\frac{1-\cos 2x+\sin 2x}{1+\cos 2x+\sin 2x}$.

Вычислите: $2\sin 15°\cdot\cos 15°$, $\frac{tg 75°}{1-tg^2 75°}$.

В – 2

Упростите выражения: $\cos^2 x-\cos 2x$, $\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$, $\frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$.

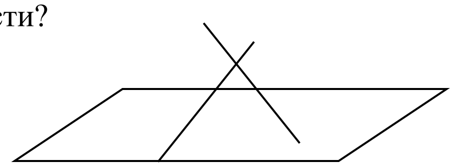
Вычислите: $\frac{\sin 100°}{2\cos 50°}$, $\frac{tg\frac{\pi}{8}}{1-tg^2\frac{\pi}{8}}$.

Практическая работа №15: «Аксиомы стереометрии и следствия из них». «Параллельность прямых и плоскостей в пространстве”

Цель: обобщение и систематизация знаний учащихся, полученных при изучении темы.

Ход работы.

1) Какие фигуры в стереометрии являются основными?

2) 1. Какие точки принадлежат плоскости? 2. Какие точки не принадлежат плоскости? 	Ответы: 1. Точки ________________ принадлежащие плоскости 2. Точки ________________ не принадлежащие плоскости

3) Объясните, почему штатив имеет всего три точки опоры?

4) Четыре точки не лежат в одной плоскости. Сколько плоскостей можно провести через тройки этих точек? Сделайте рисунок.

Решение:

5) Докажите, что все вершины четырехугольника принадлежат одной плоскости, если выполняется одно из следующих условий:

1. диагонали четырехугольника пересекаются;
2. пересекаются продолжения двух его несмежных сторон.

Доказательство:

1.

2.

6) Столяр проверяет, лежат ли концы ножек стула в одной плоскости, при помощи двух нитей. Объясните, как он это делает?

Решение:

7) На плоскости α отмечены три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. Точка D не принадлежит плоскости α. Определите, является ли четырехугольник ABCD трапецией.

Решение:

Параллельность прямых, прямой и плоскости

1) Сформулируйте определение параллельных прямых в пространстве

2) По данному образцу опишите все возможные способы построения плоскости и сделайте рисунки.

1. 	Через две параллельных прямые можно провести плоскость и притом только одну.
2. 	
3. 	

4) По образцу задачи №2 опишите три возможных случая взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве и сделайте рисунки.

	____________________ ____________________
	____________________ ____________________
	____________________ ____________________

5) Сформулируйте признак параллельности плоскостей в пространстве.

____

____

____

6) Даны две параллельные плоскости. Через точки А и В одной плоскости проведены параллельные прямые, пересекающие другую плоскость в точках A_1 и B_1. Найдите длину отрезка A_1B_1, если АВ=а. Сделайте рисунок.

Решение:

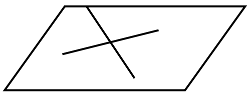
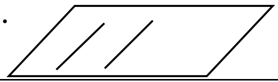
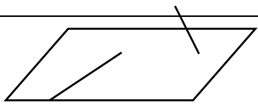
____

____

____

____

7) Укажите по рисунку случай взаимного расположения прямых в пространстве.

1. 	А. скрещивающиеся прямые.
2. 	В. Пересекающиеся прямые.
	С. Параллельные прямые.

Ответ: 1_____, 2_____, 3_____

Оценка:_______

Практическая работа №16: «Взаимное расположение двух прямых в пространстве».

Цель: отработать навыки распознавать на чертежах различные случаи взаимного расположения прямых, используя формулировку определений , признаков и свойств расположение прямых и применение признаков и свойств при решении задач.

Практическая часть

I.Содержание работы:

Ответить на вопрос и выполнить рисунок.

1.Прямые m и n лежат в одной плоскости. Могут ли эти прямые пересекаться, быть параллельными, могут ли они скрещиваться?

2. Прямые b и c пересекаются. Как расположена прямая b относительно прямой d, если c∥d?

3. Даны скрещивающиеся прямые c и d. Как может быть расположена прямая c относительно m, если m ∥ d?

4. Прямые b и d пересекаются. Как расположена прямая b относительно c, если c и d пересекаются?

5. Даны скрещивающиеся прямые m и n. Как может быть расположена прямая m относительно прямой c, если c и n пересекаются?

II. Выполнить рисунок и заполнить таблицу.

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M – середина B_1C_1, F – середина D_1C_1, K – середина DC, O – точка пересечения диагоналей квадрата ABCD.

	Прямые	Взаимное расположение прямых
1	AA_1 и CC_1	
2	A_1C_1 и B_1D_1	
3	A_1C_1 и C_1D_1	
4	A_1M и CC_1	
5	A_1D и DC_1	
6	A_1C_1 и BD	
7	A_1C и AC	
8	A_1B и D_1C	
9	A_1C и BB_1	
10	A_1D и AB	
11	A_1M и BC	
12	A_1M и BK	
13	C_1K и B_1F	
14	C_1O и AB_1	
15	A_1O и B_1D	

Контрольные вопросы

1.Что изучает стереометрия?

2. Какие существуют основные фигуры в пространстве?

3. Какие аксиомы существуют в стереометрии?

4. Какие следствия из аксиом существуют в стереометрии?

5. Какие прямые в пространстве называются параллельными?

6. Какие прямые называются скрещивающимися?

7. Какие прямые в пространстве называются перпендикулярными?

Практическая работа №17: Перпендикулярность прямых и плоскостей в пространстве

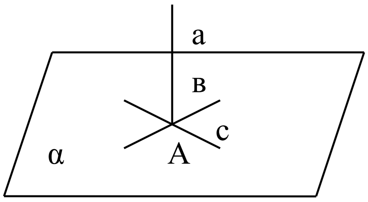
Цель:

1) Уметь применять определения, признаки и свойства перпендикулярных прямых и плоскостей в пространстве при решении задач.
2) Создать условия для развития умения устанавливать единые общие признаки и свойства целого, составлять план деятельности при решении задач.
3) Воспитание личностных качеств посредством развития индивидуальных познавательных интересов и способностей.

Теоретический материал:

1. **Определение:** Две прямые называются перпендикулярными, если они пересекаются под прямым углом.

2. **Определение:** Прямая, пересекающая плоскость, называется перпендикулярной этой плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, которая лежит в данной плоскости и проходит через точку пересечения.



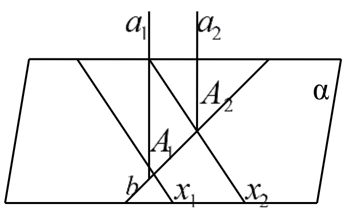
3. **Определение:** Две пересекающиеся плоскости называются перпендикулярными, если третья плоскость перпендикулярная прямой пересечении этих плоскостей пересекает их по перпендикулярным прямым.

Теорема: (признак перпендикулярности прямых в пространстве) **Если две пересекающиеся прямые параллельны соответственно двум перпендикулярным прямым, то они тоже перпендикулярны.**

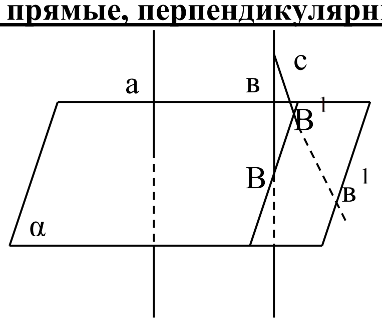
Теорема: (признак перпендикулярности прямой к плоскости в пространстве) **Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна данной плоскости.**

Свойства перпендикулярности прямой и плоскости.

1° Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна к другой.

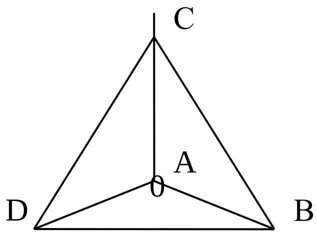


2° Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.



Теорема: (признак перпендикулярности плоскостей в пространстве) **Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.**

Задача: Прямые AB,AC и AD попарно перпендикулярны. Найдите отрезок CD, если 1) AB=3см., BC=7см.,AD=1,5см. 2) BD=c., BC=a., AD=d.



1) Рассмотрим ΔABC

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{49-9} = \sqrt{40}$$

Рассмотрим ΔACD

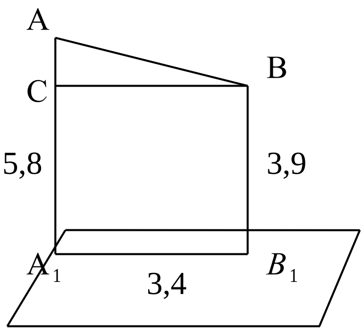
$$DC = \sqrt{AC^2 + AD^2} = \sqrt{40+2{,}25} = \sqrt{42{,}25} = 6{,}5$$

2) $\Delta ABD \quad AB^2 = c^2 - d^2$

$\Delta ABC \quad AC^2 = a^2 - c^2 + d^2$

$\Delta ACD \quad DC = \sqrt{a^2 - c^2 + 2d^2}$

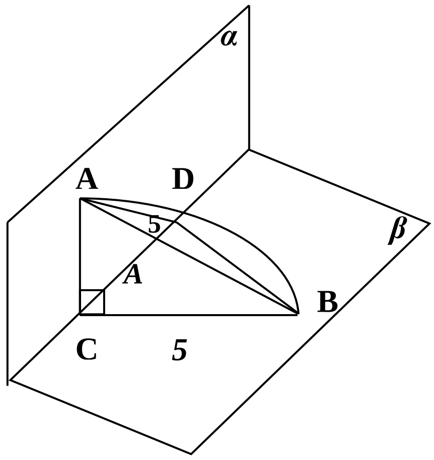
Задача: Верхние концы двух вертикально стоящих столбов, удаленных на расстоянии 3,4м соединены перекладиной. Высота одного столба 5,8м., а другого 3,9м. найдите длину перекладины.



$AC = AA_1 - CA_1 = 5{,}8 - 3{,}9 = 1{,}9$

$$AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{3{,}4^2 + 1{,}9}^2 = \sqrt{11{,}56 + 3{,}61} \approx 3{,}9(M)$$

Задача: Из точек A и B, лежащих в двух перпендикулярных плоскостях, опущены перпендикуляры AC и BD на прямую пересечения плоскостей. Найдите длину отрезка AB, если AD=BC=5м, CD=1м.

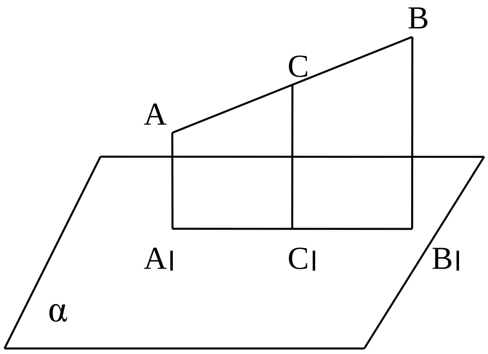


Дано: $\alpha \perp \beta$ $AC \perp CD$
$BD \perp CD$
$A \in \alpha$, $B \in \beta$
AD=BC=5м
CD=1м
Найти: AB

Решение:
1) рассм. $\triangle$ ACD, $\angle C = 90^\circ$
AC= $\sqrt{25-1} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$
2)рассм. $\triangle$ ACD, $\angle ACD = 90^\circ$
AB= $\sqrt{25+24} = \sqrt{49} = 7(м)$

Задача: Найдите расстояние от середины отрезка AB до плоскости, не пересекающей этот отрезок, если расстояние от точки A и B до плоскости равны 7,4 см и 6,1 см.

Дано: $AB \not\subset \alpha$ C AB, AC=CB,
AA_1=6,1см, BB_1=7,4см.
Найти: CC_1=?



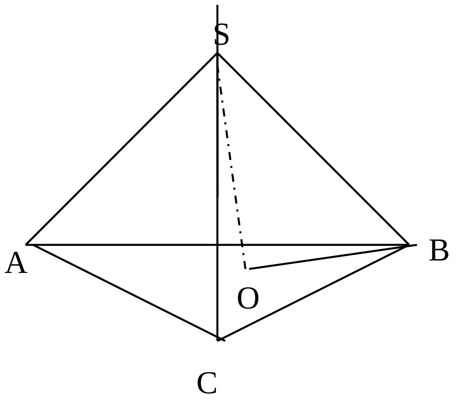
Решение:
Рассмотрим AA_1BB_1-трапеция, т.к. $AA_1 \perp \alpha$, $BB_1 \perp \alpha$, то $AA_1 \parallel BB_1$
CC_1- средняя линия трапеции
$CC_1 = \dfrac{AA_1 + BB_1}{2} = \dfrac{6{,}1 + 7{,}4}{2} = \dfrac{13{,}5}{2} = 6{,}75$ (см)

Задача: Точка А находится на расстоянии от вершины равностороннего треугольника со стороной а. Найдите расстояние от точки А до плоскости треугольника.

Дано: Δ ABC

AB=BC=AC=a; SA=SB=SC=a

Найти: SO-?



Решение:

OB=R=$\frac{a}{\sqrt{3}}$ Рассмотрим Δ SOB <O=90^0 SO=$\sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$

Практическая часть:

1 вариант	2 вариант	3 вариант	4 вариант
1. Прямые AB,AC и AD попарно перпендикулярны. Найдите отрезок CD, если:			
AB=6см, BC=14см, AD=3см.	BD=9см, BC=16см, AD=5см.	BC=8см, AD=2,5см, BD=4,5см.	BC=6,5см. AB=1,5см, AB=3см.
2. Через точки А и В проведены прямые, перпендикулярные плоскости α, пересекающие ее в точках С и D соответственно. Найдите расстояние между точками А и В , и отрезок АВ не пересекает плоскость α, если:			
AC=3м, BD=2м,CD=2,4м .	AC=6м, BD=3м,CD=4м	AC=10м, BD=5м,CD=12м	AC=9м, BD=3м,CD=8м
3. Найдите расстояние от середины отрезка MN до плоскости, не пересекающей этот отрезок, если расстояние от точки M и N до плоскости равны:			
MM_1=4,5; NN_1=5,5	MM_1=7,4; NN_1=5,6	MM_1=2,8; NN_1=6,8	MM_1=4,3; NN_1=5,8
4. Из точек А и В, лежащих в двух перпендикулярных плоскостях, опущены перпендикуляры АС и BD на прямую пересечения плоскостей. Найдите длину отрезка АВ, если:			
AC=6м, BD=7м, CD=7м	AC=3м,BD=4м, CD=12м	AD==4м, BC=7м, CD=1м	AD=13м, CD=CB=5м
5.Стороны равностороннего треугольника равны **а**. Найдите расстояние до плоскости треугольника от точки, которая находится на расстоянии **в** от каждой из его вершин.		5.Расстояния от точки А до вершин квадрата равны **а**. Найдите расстояния от точки А до плоскости квадрата. Если сторона квадрата равна **в**.	
а=3м, в=2м.	а=2$\sqrt{3}$м, в=5м.	а=10м, в=2$\sqrt{3}$м.	а=5м, в=2м.

Контрольные вопросы:

1. Какие прямые в пространстве называются перпендикулярными?

2. Верно ли утверждение. Что «перпендикулярные прямые лежат в одной плоскости»?
3. В каких условиях прямая перпендикулярна к плоскости?
4. В окружающей обстановке найдите примеры на свойства перпендикулярности прямой и плоскости.
5. Какие плоскости называются перпендикулярными?

Практическая работа №18: Прямые и плоскости в профессии

Цель: показать необходимость знаний о параллельности для технолога

Ход работы:

1. Творческое задание. Создать презентацию по теме

Практическая работа № 19,20: Числовые последовательности и их свойства. Понятие предела числовой последовательности

Цель: применить умения по владению представлений об основных понятиях математического анализа и их свойствах, владение умением характеризовать поведение функций, использование полученных знаний для описания и анализа реальных зависимостей

Задание:

I Вариант	**II Вариант**
1. Последовательность задана словесно. Напишите первые десять членов последовательности	
а) натуральных чисел, кратных 5	а) натуральных чисел, кратных 3
б) степеней числа 2 с натуральными показателями	б) степеней числа 3 с натуральными показателями
2. Последовательность задана формулой общего члена. Напишите первые десять членов последовательности	
а) $a_n = 2n - 3$	а) $a_n = 3n - 4$
б) $a_n = (-1)^{n+1}$	б) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$
3. Предложите формулу общего члена для каждой из последовательностей. Если известно несколько первых членов	
а) 4,8,12, 16,20,…;	а) 2,5,8.11,14,…;
б) -1.1,-1,1,…;	б) 3,12,48,192….;
4. Вычислите пределы последовательностей	
а) $x_n = 1 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2^n}$	а) $x_n = \dfrac{n}{n+1}$
б) $x_n = \dfrac{3n^2 + n + 7}{5 - n - n^2}$	б) $x_n = \dfrac{4n^2 + n - 6}{8 - n - n^2}$

Порядок выполнения:

1. Внимательно прочитать тему и цель практической работы.
2. Изучить учебный материал по теме.
3. Ответить на вопросы.
4. Выполнить задания.
5. Подготовить отчет.

Пояснения к работе (учебный материал):

Определение: *множество чисел, каждое из которых снабжено своим номером, называется числовой последовательностью.*

Элементы этого числового множества называются членами последовательности и обозначают: первый член - a_1, второй - a_2, n- й член - a_n и т.д. Вся последовательность обозначается: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ или (a_n).

Числовая последовательность представляет собой не что иное, как множество нумерованных чисел, упорядоченных наподобие натурального ряда, т.е. располагаемое в порядке возрастания номеров. Последовательность может содержать как конечное, так и бесконечное число членов.

Последовательность, состоящая из конечного числа членов, называется конечной, а последовательность, состоящая из бесконечного числа членов, - бесконечной последовательностью.

Иногда бесконечную числовую последовательность вводят, используя понятие функции:

Определение: *Функцию* $y = f(x)$, $x \in N$ *называют функцией натурального аргумента или числовой последовательностью и обозначают:* $y = f(n)$, *или* $y_1, y_2, y_3..., y_n$ *или* $y(n)$.

Последовательности можно задавать различными способами, например, ***словесно***, когда правило задавания последовательности описано словами, без указания формулы. Так, словесно задается последовательность простых чисел:

2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,...

Особенно важны ***аналитический и рекуррентный*** способы задания последовательности.

Говорят, что последовательность задана ***аналитически***, если указана формула ее n-го члена.

Приведем три примера.

1) $y_n = n^2$. Это аналитическое задание последовательности

$1,4,9,16,\ldots, n^2, \ldots$

Указав конкретное значение n, нетрудно найти член последовательности с соответствующим номером. Если. Например, n= 9, то $y_9 = 9^2 = 81$, если

2) $y_n = C$. Здесь речь идет о последовательности C, C, C, …., C, …. . Такую последовательность называют **постоянной** (или стационарной).

3) $y_n = 2^n$. Это аналитическое задание последовательности $2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n, \ldots$

Рекуррентный способ задания последовательности состоит в том, что указывают правило, позволяющее вычислить *n*- й член последовательности, если известны ее предыдущие члены.

Например**,** арифметическая прогрессия – это числовая последовательность (a_n), заданная рекуррентно соотношениями:

$$a_1 = a,\ \ a_{n+1} = a_n + d$$

(*a* и *d – заданные числа, d – разность арифметической прогрессии***)**

Геометрическая прогрессия – это числовая последовательность (b_n), заданная рекуррентно соотношениями:

$$b_1 = b,\ \ b_{n+1} = b_n \cdot q$$

(*b* и *q – заданные числа, b≠0, q ≠ 0; q знаменатель геометрической прогрессии* **).**

Пример: Выписать первые пять членов последовательности, заданной рекуррентно: $y_1 = 1$; $y_2 = 1$; $y_n = y_{n-2} + y_{n-1}$

Решение. n –й член последовательности равен сумме двух предшествующих ему членов. Значит, последовательно получаем:

$y_1 = 1$; $y_2 = 1$; $y_3 = 1+1 = 2$; $y_4 = 1+2 = 3$; $y_5 = 2+3 = 5$; и т.д.

Ограниченные последовательности.

- Последовательность (x_n) называется ограниченной, если существуют такие два числа m и M, что для всех $n \in N$ выполняется неравенство $m \le x_n \le M$.
- Последовательность (x_n) называется ограниченной сверху, если существует такое число M, что для всех $n \in N$ выполняется неравенство $x_n \le M$.
- Последовательность (x_n) называется ограниченной снизу, если существует такое число m, что для всех $n \in N$ выполняется неравенство $m \le x_n$

Например: последовательность (x_n), заданная формулой общего члена $x_n = n$, ограничена снизу (например, число 0) и не ограничена сверху.

Монотонные последовательности.

Последовательность (x_n) называется возрастающей, если каждый ее член, начиная со второго, больше предыдущего, т.е. если для любого натурального n выполняется неравенство $x_{n+1} > x_n$.

Последовательность (x_n) называется убывающей, если каждый ее член, начиная со второго, меньше предыдущего, т.е. если для любого натурального n выполняется неравенство $x_{n+1} < x_n$.

Последовательность (x_n) называется невозрастающей, если каждый ее член, начиная со второго, не более предыдущего, т.е. если для любого натурального n выполняется неравенство $x_{n+1} \le x_n$.

Последовательность (x_n) называется неубывающей, если каждый ее член, начиная со второго, не меньше предыдущего, т.е. если для любого натурального n выполняется неравенство $x_{n+1} \ge x_n$.

Возрастающие, убывающие, невозрастающие и неубывающие последовательности образуют класс *монотонных* последовательностей.

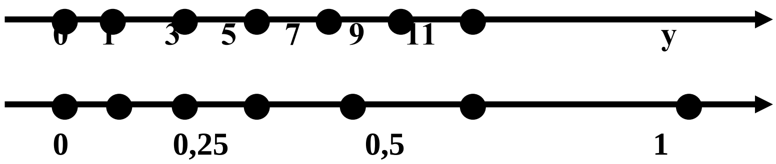
Предел числовой последовательности.

Рассмотрим для числовые последовательности – (y_n) и (x_n).

(y_n): 1, 3,5, 7, 9, … 2n – 1, …;

(x_n): 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$

Изобразим члены этих последовательностей точками на координатной прямой.



Замечаем, что члены последовательности (x_n) как бы «сгущаются» около точки 0 – говорят последовательность ***сходятся*** , а у последовательности (y_n) такой точки сгущения нет – и говорят, что последовательность ***расходится.***

Математики не используют термин точка сгущения, а они говорят *предел последовательности.*

Определение: *Число b называется пределом последовательности (y_n), если в любой заранее выбранной окрестности точки b содержится все члены последовательности, начиная с некоторого номера.*

Пишут так: $y_n \to b$ *или* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ читают так: предел последовательности y_n *при стремлении n к бесконечности равен b.*

На практике используется еще одно истолкование равенства $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, связанное с приближенными вычислениями: если последовательность y_n = f($_n$) сходится к числу b, то выполняется приближенное равенство f($_n$)≈b, причем это приближенное равенство тем точнее, чем больше n.

Вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию:

1. Дайте определение числовой последовательности.
2. Перечислите способы задания последовательностей.
3. Какие последовательности называют ограниченными?
4. Сформулируйте определение предела числовой последовательности.

Содержание отчета:

Название практической работы.

Учебная цель.

Решение заданий практической работы.

Ответы на вопросы для закрепления теоретического материала.

Практическая работа № 21: Определение производной. Геометрический и физический смысл

Цель: *научиться:*
-дифференцировать;
-применять физический и геометрический смысл производной.
Уметь: применять методы дифференциального исчисления.
Знать: основы дифференциального исчисления.

Вариант 1.

1. Найдите производные функций:
а). $y = 2x^4 - x^3 + 3x + 4$; б). $y = 8\sqrt{x} + 0{,}5\cos x$; в). $y = \frac{\sin x}{x}$; г). $y = (5x+1)^7$; д). $x \cdot ctgx$.

2. Составить уравнение касательной к параболе $y = x^2 - 6x + 5$ в точке с абсциссой $x_0 = 4$.

3. Прямолинейное движение точки описывается законом $S = t^4 - t^2$. Найдите её скорость в момент времени t =3с.

4. Вычислите $f^{/}\left(\frac{\pi}{6}\right)$, если $f(x) = 2\cos x + x^2 - \frac{\pi x}{3} + 5$.

Вариант 2.

1. Найдите производные функций:
а). $y = -x^5 + 2x^3 - 3x^2 - 1$; б). $y = \sin x + \frac{\sqrt{x}}{2}$ в). $y = \frac{\cos x}{x}$; г). $y = (3x-4)^6$; д). $x \cdot tgx$.

2. Составить уравнение касательной к параболе $y = 2x^2 - 5x - 3$ в точке с абсциссой x_0 =2.

3. Прямолинейное движение точки описывается законом $S = t^6 - 4t^4$. Найдите её скорость в момент времени t =2с.

4. Вычислите $f^{/}\left(\frac{\pi}{3}\right)$, если $f(x) = 1{,}5x^2 + 6\sin x - \pi x + 4$.

Практическая работа № 22,23: Вычисление производных. Правила дифференцирования. Таблица производных. Производная сложных функций

Решение задач по теме: «Правила и формулы дифференцирования, таблица производных элементарных функций».

Цель работы:
- применить умения по владению представлений об основных понятиях математического анализа и их свойствах, владение умением характеризовать поведение функций, использование полученных знаний для описания и анализа реальных зависимостей.

Задание:

I Вариант

Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные

а) $y = x^3 - 9x^2 + x - 1$

б) $y = \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$

в) $y = x \cdot \sin x$

г) $y = \sin^2 3x$

II Вариант

а) $y = 5x^4 - 3x^2 + 5$

б) $y = \dfrac{x^2+1}{3x}$

в) $y = x \cdot \cos x$

г) $y = \cos^2 3x$

д) $y=\sqrt{x+5}$

$y=(2+5x)^4$

ж) $y=\log_3 4x$

з) $y=5^{2x}$

д) $y=\sqrt{1+x^3}$

е) $y=(3+7x)^5$

ж) $y=\log_5 10x$

з) $y=6^{3x}$

Порядок выполнения:

1. Внимательно прочитать тему и цель практической работы.
2. Изучить учебный материал по теме.
3. Ответить на вопросы.
4. Выполнить задания.
5. Подготовить отчет.

Пояснения к работе (учебный материал):

Производной функции f(x) в точке x называется предел разностного отношения $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ при $h\to 0$.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Операция нахождение производной называется дифференцированием.
Это правило является основным, т.к. выведено из самого определения. Однако при дифференцировании сложных функций, суммы, произведения, частного применение общего правила представляет большие трудности. Поэтому применяют правила дифференцирования.

Правила:

1. $(f'(x)+g(x))=f'(x)+g'(x)$ - Производная суммы равна сумме производных.
2. $(c\cdot f(x))'=c\cdot f'(x)$ - Постоянный множитель можно вынести за знак производной.
3. $(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$ - Производная произведения.
4. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$ Производная частного

Формулы дифференцирования

1. $C'=0$
2. $(x)'=1$
3. $(x^2)'=2x$
4. $(x^3)'=3x^2$
5. $(x^p)'=p\,x^{p-1}$
6. $(e^x)'=e^x$
7. $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
11. $(\sin x)'=\cos x$
12. $(\cos x)'=-\sin x$
13. $(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$
14. $(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$
15. $(a^x)'=a^x\cdot\ln x$
16. $(\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a}$

8. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

9. $(kx+b)' = k$

10. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

17. $f(g(x))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

18. $f'(kx+b) = k\cdot f'(kx+b)$

При выполнении практической работы рассмотрите следующие примеры:
Примеры:
Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные

1) $y = 3x^6 - 7x^3 - x^2 + 5x - 7$

$y' = (3x^6 - 7x^3 - x^2 + 5x - 7) = 3\cdot 6x^5 - 7\cdot 3x^2 - 2x + 5 = 18x^5 - 21x^2 - 2x + 5.$

2) $y = \frac{x^3+4}{3x-2}$

$$y' = \left(\frac{x^3+4}{3x-2}\right)' = \frac{(x^3+4)'(3x-2)-(x^3+4)(3x-2)'}{(3x-2)^2} = \frac{3x^2\cdot(3x-2)-(x^3+4)\cdot 3}{(3x-2)^2} =$$
$$= \frac{9x^3-6x^2-3x^3-12}{(3x-2)^2} = \frac{6x^3-6x^2-12}{(3x-2)^2}.$$

3) $y = x\cdot tgx$

$y' = (x\cdot tgx)' = x'\cdot tgx + x\cdot(tgx)' = 1\cdot tgx + x\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = tgx + \frac{x}{\cos^2 x}.$

4) $y = tg^2 4x$

$y' = (tg^2 4x)' = 2tg4x\cdot(tg4x)' = 2tg4x\cdot\frac{1}{\cos^2 4x}\cdot(4x)' = 2tg4x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\cdot 4 = \frac{8tg4x}{\cos^2 x}.$

5) $y = \sqrt{6-x^4}$

$y' = (\sqrt{6-x^4})' = \frac{1}{2\sqrt{6-x^4}}\cdot(6-x^4)' = \frac{1}{2\sqrt{6-x^4}}\cdot(-4x^3) = -\frac{2x^3}{\sqrt{6-x^4}}.$

6) $y = (8-3x)^6$

$y' = \left((8-3x)^6\right)' = 6(8-3x)^5\cdot(8-3x)' = 6(8-3x)^5\cdot(-3) = -18(8-3x)^5.$

7) $y = \log_5 12x$

$y' = (\log_5 12x)' = \frac{1}{12x\ln a}\cdot(12x)' = \frac{1}{12x\ln a}\cdot 12 = \frac{1}{x\ln a}.$

8) $y = 11^{4x}$

$y' = (11^{4x})' = 11^{4x}\cdot\ln 11\cdot(4x)' = 11^{4x}\cdot\ln 11\cdot 4 = 4\ln 11\cdot 11^{4x}.$

Вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию:

1. Что называется производной функции?
2. Какая операция называется дифференцированием?

<u>Содержание отчета:</u>

Название практической работы.
Учебная цель.
Решение заданий практической работы.

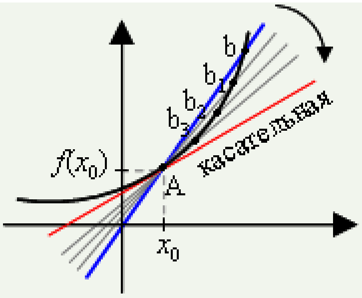
Ответы на вопросы для закрепления теоретического материала.

Практическая работа № 24: Уравнение касательной к графику функции

Тема: «Касательная к графику функции»

Цели: научиться находить угловой коэффициент касательной к графику функции в заданной точке; составлять уравнения касательных к графику функции по заданным условиям.

Краткая теоретическая справка.



Строгое определение касательной:

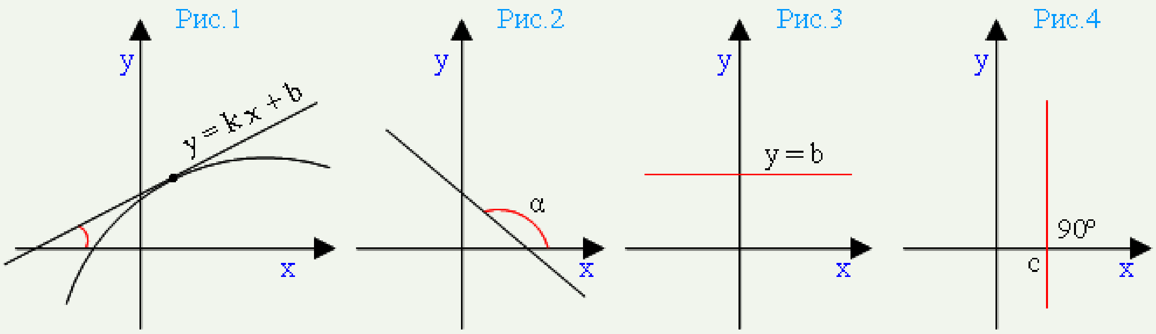
Касательная к графику функции *f*, дифференцируемой в точке x_o, - это прямая, проходящая через точку (x_o; $f(x_o)$) и имеющая угловой коэффициент $f'(x_o)$.

Угловой коэффициент имеет прямая вида $y = kx + b$. Коэффициент k и является **угловым коэффициентом** этой прямой.

Угловой коэффициент равен тангенсу острого угла, образуемого этой прямой с осью абсцисс:

$$\boldsymbol{k = \text{tg}\,\alpha = f'(x_o).}$$

Здесь угол α – это угол между прямой $y = kx + b$ и положительным (то есть против часовой стрелки) направлением оси абсцисс. Он называется **углом наклона прямой.**



Если угол наклона прямой $y = kx + b$ острый, то угловой коэффициент является положительным числом. График возрастает (рис.1).

Если угол наклона прямой $y = kx + b$ тупой, то угловой коэффициент является отрицательным числом. График убывает (рис.2).

Если прямая параллельна оси абсцисс, то угол наклона прямой равен нулю. В этом случае угловой коэффициент прямой тоже равен нулю (так как тангенс нуля есть ноль). Уравнение прямой будет иметь вид y = b (рис.3).

Если угол наклона прямой равен 90º (π/2), то есть она перпендикулярна оси абсцисс, то прямая задается равенством $x = c$, где c – некоторое действительное число (рис.4).

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_o:

$y = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$

Алгоритм решения уравнения касательной к графику функции $y = f(x)$:

1. Вычислить $f(x_o)$.
2. Вычислить производные $f'(x)$ и $f'(x_o)$.
3. Внести найденные числа x_o, $f(x_o)$, $f'(x_o)$ в уравнение касательной и решить его.

Порядок выполнения работы.

1. Внимательно изучите теоретическую справку по теме.
2. Решите следующие задания.

Пример1. Найдем уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ в точке с абсциссой 2.

Решение.

Следуем алгоритму.

1) Точка касания x_o равна 2. Вычислим $f(x_o)$:

$f(x_o) = f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 1 = 8 - 8 + 1 = 1$

2) Находим $f'(x)$. Для этого применяем формулы дифференцирования, изложенные в предыдущем разделе. Согласно этим формулам, $x^2 = 2x$, а $x^3 = 3x^2$. Значит:

$f'(x) = 3x^2 - 2 \cdot 2x = 3x^2 - 4x$.

Теперь, используя полученное значение $f'(x)$, вычислим $f'(x_o)$:

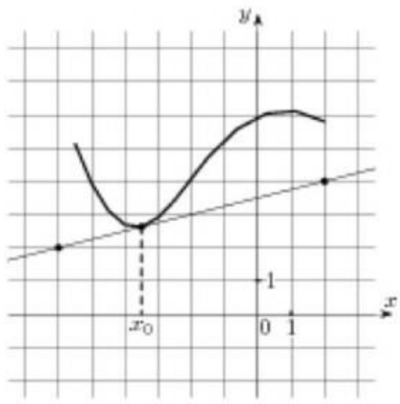
$f'(x_o) = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = 12 - 8 = 4$.

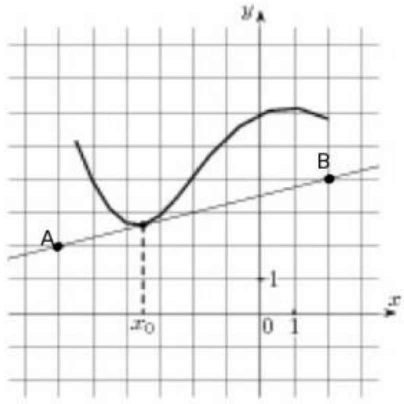
3) Итак, у нас есть все необходимые данные: $x_o = 2$, $f(x_o) = 1$, $f'(x_o) = 4$. Подставляем эти числа в уравнение касательной и находим окончательное решение:

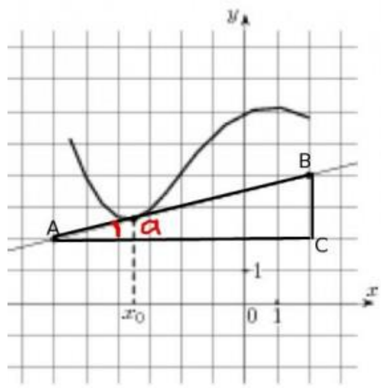
$y = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) = 1 + 4 \cdot (x - 2) = 1 + 4x - 8 = -7 + 4x = 4x - 7$.

Ответ. $y = 4x - 7$.

Пример 2. На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции в точке x_0 .







Значение производной функции y=f(x) в точке x_0 равно тангенсу угла между касательной и положительным направлением оси OX. Чтобы его найти, выделим прямоугольный треугольник, гипотенуза которого лежит на касательной, а катеты параллельны осям координат. Обозначим точки с целыми координатами буквами A и B - эти точки выделены на касательной:

Проведем через точку A прямую параллельно оси OX, а через точку B - параллельно оси OY. Получим прямоугольный треугольник ABC. Угол A треугольника ABC равен углу между касательной и положительным направлением оси OX.

Тангенс острого угла прямоугольного треугольника равен отношению противолежащего катета к прилежащему. Длины катетов считаем по количеству клеточек

$$tg\alpha=\frac{BC}{AC}=\frac{2}{8}=0,25$$

Ответ. 0,25.

Пример 3. Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y=\frac{x^4}{4}$ в точке с абсциссой x0=1.

Решение. Находим производную функции

$$f'(x)=\left(\frac{x^4}{4}\right)'=x^3$$

Тогда при x_0=1 значение производной равно

$$f'(1)=1^3=1$$

Отсюда получаем, что угловой коэффициент касательной в точке с абсциссой x_0=1 равен

$$k=f'(1)=1$$

Ответ. 1.

Пример 4. Прямая $y=8x-5$ параллельна касательной к графику функции $y=x^2+7x+7$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение. Условием параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов, следовательно $k=8$ **.** Угловой коэффициент касательной – это есть значение производной функции в точке x_0. $f'(x_0)=2x_0+7=8,\ 2x_0=-1,\ x_0=-0,5.$

Ответ. -0,5.

3. Выполните практическую работу по вариантам.

Практическая работа

Задание №1. Составьте уравнение касательной к графику функции y=f(x) в точке x_0.			
1	$y = x - 3x^2, x_0 = 2$	**11**	$y = 5x - x^2, x_0 = -2$
2	$y = 2x - x^2, x_0 = 1$	**12**	$y = 6 + 2x - x^3, x_0 = 1$
3	$y = 3x^3 - 4x + x^2, x_0 = -1$	**13**	$y = 3x^4 - 4 + 2x^2, x_0 = -1$
4	$y = x^2 - 2x - 1, x_0 = 3$	**14**	$y = 6x^2 - x + 5, x_0 = 3$
5	$y = -2x^2 + x, x_0 = -2$	**15**	$y = x^2 + 2x - 1, x_0 = -3$
6	$y = 7x - 5 - 2x^3, x_0 = 1$	**16**	$y = 7 - 5x^2 - 2x^3, x_0 = 1$
7	$y = 2x - 3x^2 + x^4, x_0 = -1$	**17**	$y = 2 + 3x^2 + x^4, x_0 = 1$
8	$y = \frac{1}{3}x^3 - 3, x_0 = 2$	**18**	$y = 5x^3 - 3x, x_0 = 2$
9	$y = 0{,}5x^2 - 5x, x_0 = -2$	**19**	$y = 0{,}5x^4 - 5x^2x, x_0 = -1$
10	$y = \frac{1}{4}x^4 - 3x, x_0 = 1$	**20**	$y = \frac{1}{8}x^4 - 3, x_0 = 1$
Задание №2. Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции в точке x_0.			
1	$y=x^3+4x^2-11$, $x_0=3$	**11**	$y=3-x-2tgx$, $x_0=0$
2	$y=6x-tgx$, $x_0=0$	**12**	$y=6x+4sinx$, $x_0=\frac{\pi}{3}$
3	$y=3e^x+2{,}5x$, $x_0=0$	**13**	$y=9-3x^2-2x^3$, $x_0=-1$
4	$y=2x+7lnx$, $x_0=14$	**14**	$y=5x+4x^2+3e^x$, $x_0=0$
5	$y = 4\sqrt{x} - 3x + 1, x_0 = 1$	**15**	$y=6x-4cosx$, $x_0=\frac{\pi}{6}$
6	$y = \frac{1}{3}x^3 - 7x + 1$, $x_0=6$	**16**	$y=4x-3lnx$, $x_0=6$
7	$y=2x+ctgx$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$	**17**	$y = \frac{2}{3}x^3 - 7x^2$, $x_0=-2$
8	$y=3x-x^2$, $x_0=1$	**18**	$y=6sinx-3x$, $x_0=0$
9	$y=4x^2-2e^x$, $x_0=0$	**19**	$y = 2\sqrt{x} - 3x^2, x_0 = 4$
10	$y=2-5x-lnx$, $x_0=1$	**20**	$y=9x-4x^3$, $x_0=1$
Задание №3. Прямая параллельна касательной к графику функции $y=f(x)$. Найдите абсциссу точки касания.			
1	$y = 4x+8$, $y = x^2-5x+7$	**11**	$y=5x+3$, $y = x^2-7x+2$
2	$y = 7x+11$, $y = x^2+8x+6$	**12**	$y=4-3x$, $y = 2x^2-x-12$
3	$y = 3x+5$, $y = x^2+7x-5$	**13**	$y=x+1$, $y = x^2-5x+3$
4	$y = -4x-11$, $y = x^2-5x+7$	**14**	$y=-5x+2$, $y = 3x^2+7x+1$

5	$y = x+9, y = x^2+7x-5$	**15**	$y=2-5x, y = x^2-6x+2$
6	$y = -3x+5, \; y = 2x^2 -2x-1$	**16**	$y=-x+1, y = -x^2+4x$
7	$y = 3x - 2, \; y = -x^2 -12x+5$	**17**	$y=5x, y = 2x^2-8x-3$
8	$y = -x+5, \; y = x^2 -7x-1$	**18**	$y=4-x, y = x^2+2$
9	$y = -6x-2, \; y = 3x^2 -12x+7$	**19**	$y=12x, y = 3x^2-1$
10	$y = -3x-5, \; y = 2x^2 -2x-1$	**20**	$y=-3x -2, y =2 x^2-11x+2$

Практическая работа № 25: Исследование функций на монотонность и экстремум

Цели выполнения работы:

- Исследовать правило применения производной к исследованию функций на промежутки монотонности и экстремумы
- Применить данное правило при исследовании конкретных функций
- Осознать себя в данной теме

Приобретаемые умения:

- Дифференцировать функции
- Использовать производную для изучения свойств функций: промежутки монотонности, экстремумы функции
- Решать конкретные задачи по исследованию промежутков монотонности и экстремумов функций.

Развиваемые способности:

- Исследовать формулы и правила дифференцирования
- Исследовать правило применения производной к исследованию функции на промежутки убывания, возрастания, экстремумы функции.
- Проектировать данные знания и умения на исследование конкретной функции
- Оценивать результаты применения данных правил к исследованию функций
- Оценивать результаты своей деятельности в целом по исследованию свойств функций
- Осознавать уровень усвоения данного процесса

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

1. Входной контроль: Исследование основных понятий

1.1 ОБЩАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИ ИХ ГРАФИКОВ

1. Найти область определения функции
2. Определить четность, нечетность функции
3. Определить периодичность функции
4. Найти промежутки монотонности функции
5. Найти экстремумы функции
6. Определить при необходимости дополнительные точки графика функции
7. Найти область значения функции
8. Построить график функции

ДОСТАТОЧНЫЙ ПРИЗНАК ВОЗРАСТАНИЯ ФУНКЦИИ

Если производная функции положительна в каждой точке некоторого промежутка, то функция возрастает на данном промежутке

ДОСТАТОЧНЫЙ ПРИЗНАК УБЫВАНИЯ ФУНКЦИИ

Если производная функции отрицательна в каждой точке некоторого промежутка, то функция убывает на данном промежутке.

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЭКСТРЕМУМА В ТОЧКЕ (ТОЧКА МАКСИМУМА И ТОЧКА МИНИМУМА)

Если функция непрерывна в некоторой точке и слева от неё производная функции имеет знак «+», а справа от неё производная имеет знак «-», то данная точка является точкой максимума функции на данном промежутке.

Если функция непрерывна в некоторой точке и слева от неё производная функции имеет знак «-», а справа от неё производная имеет знак «+», то данная точка является точкой минимума функции на данном промежутке.

2. Определить промежутки возрастания (убывания) точки минимума, максимума следующих функций:

2.1. $f(x) = 3 - \frac{1}{2}x$

$$f'(x) = \left(3 - \frac{1}{2}x\right)' = (3)' - \left(\frac{1}{2}x\right)' = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

т.к. $f'(x) = -\frac{1}{2} < 0,$ то функция убывает на всей оси ОДЗ.

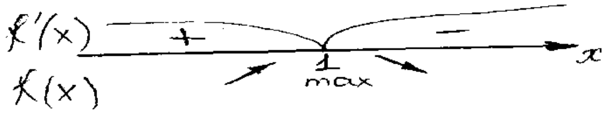
2.2. $f(x) = -x^2 + 2x - 3$

$$f'(x) = \left(-x^2 + 2x - 3\right)' = \left(-x^2\right)' + (2x)' - (3)' = -2x + 2 - 3 = -2x + 2$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 2 = 0$$

$$-2x = -2$$

$x = 1$-критическая точка.



$$f'(0) = -2 \cdot 0 + 2 = 2 > 0$$

$$f'(2) = -2 \cdot 2 + 2 = -2 < 0$$

Функция возрастает на $(-\infty;1]$

Функция убывает на $[1;+\infty)$

$$x_{\max} = 1$$

$$y_{\max} = -(1)^2 + 2 \cdot 1 - 3 = -1 + 2 - 3 = -2$$

$(1;-2)$- точка максимума.

2.3. $f(x) = x^3 - 3x^2$

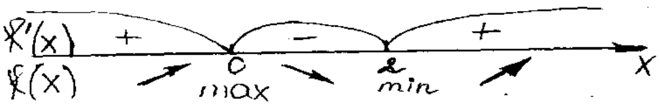
$$f'(x) = \left(x^3 - 3x^2\right)' = \left(x^3\right)' - \left(3x^2\right)' = 3x^2 - 3 \cdot 2x = 3x^2 - 6x$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0$

$3x(x-2) = 0$

$3x = 0$ или $x - 2 = 0$

x = 0 x = 2 - критические точки

2.4. 

$f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) = 3 + 6 = 9 > 0$

$f'(1) = 3 \cdot (1)^2 - 6 \cdot 1 = 3 - 6 = -3 < 0$

$f'(3) = 3 \cdot (3)^2 - 6 \cdot 3 = 27 - 18 = 9 > 0$

Функция возрастает на $(-\infty;0] \cup [2;+\infty)$

Функция убывает на $[0;2]$

$x_{\max} = 0$ $x_{\min} = 2$

$\acute{o}_{\max} = 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0$ $y_{\min} = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = 8 - 3 \cdot 4 = 8 - 12 = -4$

$(0;0)$- точка максимума $(2;-4)$- точка минимума

3. Выполнить задание с дальнейшей самопроверкой.

3.1. Исследовать функцию на промежутки монотонности и точки экстремума.

$f(x) = x^3 - 27x$

<u>Ответ:</u> функция возрастает на $(-\infty;-3] \cup [3;+\infty)$

функция убывает на $[-3;3]$

точка максимума $(-3;54)$

точка минимума $(3;-54)$

3.2. Определить промежутки убывания и точки максимума функции.

$f(x) = 12x + 3x^2 - 2x^3$

<u>Ответ:</u> функция убывает на $(-\infty;-1] \cup [2;+\infty)$

точка максимума $(2;20)$

3.3. Определить промежутки возрастания и точки минимума функции.

$f(x) = x^3 - 12x$

<u>Ответ:</u> функция возрастает на $(-\infty;-2] \cup [2;+\infty)$

точка минимума $(2;-16)$

4. Выходной контроль.

1. Вариант

1. Исследовать функцию на промежутки монотонности и экстремумы функции:

$f(x) = 5x^2 - 3x + 1$

2. определить промежутки возрастания функции и точку минимума:

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

2. Вариант

1. Исследовать функцию на промежутки монотонности и экстремумы функции:

$f(x) = 2 + 9x + 3x^2 - x^3$

2. Определить промежутки убывания и точку максимума:

$f(x) = 2 + 9x + 3x^2 - x^3$

3 Вариант

1. Исследовать функцию на промежутки монотонности и экстремумы функции:

$f(x) = 3x^2 - 2x + 5$

2. Определить промежутки возрастания и точки минимума:

$f(x) = x^3 - 3x + 3$

4 Вариант

1. Исследовать функцию на промежутки монотонности и экстремумы функции:

$f(x) = 8x - 5x^2$

2. Определить промежутки убывания и точки максимума:

$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$

Оценка: «3» - задание 1
«4 и 5» - задание 1,2

Практическая работа № 25: Исследование выпуклости и перегиба

Цели:

знать:

- понятия возрастающей и убывающей функции;
- понятия промежутков монотонности;
- понятия точек минимума и максимума, экстремума функции, критических точек;
- алгоритм исследования функции на экстремум;

уметь:

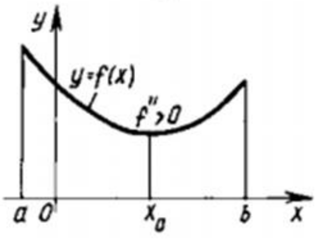
- находить критические точки, промежутки монотонности, экстремумы функции;
- с помощью производной исследовать функцию, заданную формулой;

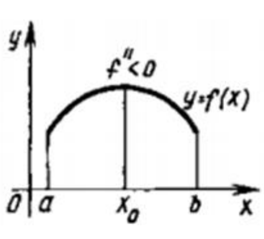
Продолжительность занятия: 2 часа

Общие сведения и примеры выполнения заданий:

График функции *f(x)* называется ***выпуклым*** на интервале (*a; b*), если он расположен ниже касательной, проведенной к любой его точке.

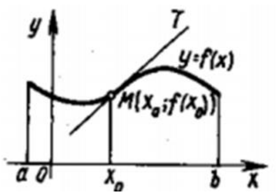
График функции *f(x)* называется ***вогнутым*** на интервале (*a; b*), если он расположен выше касательной, проведенной к любой его точке.





Теорема (достаточное условие выпуклости, вогнутости графика функции):

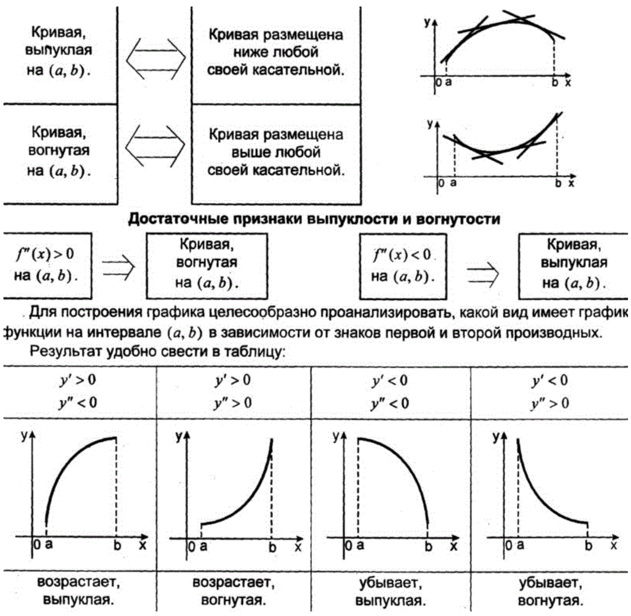
Если функция $y = f(x)$ имеет на интервале $(a;\ b)$ вторую производную $f''(x)$ и она положительна, то функция вогнута на этом интервале. Если же $f''(x)$ отрицательна на интервале $(a;\ b)$, то функция выпукла на этом интервале.



Точка графика функции $\mathrm{M}(x_0; f(x_0))$, при переходе через которую кривая меняет направление выпуклости, называется ***точкой перегиба***.

Теорема (достаточное условие существования точки перегиба):
Если функция $y = f(x)$ имеет на интервале $(a;\ b)$ вторую производную $f''(x)$ и при переходе через точку $x = a,\ f(x)$ меняет знак, то точка кривой с абсциссой $x = a,$ является точкой перегиба.

Опорный конспект.



Алгоритм нахождения интервалов выпуклости графика функции:

1° Находят вторую производную функции и точки, в которых она равна нулю или не существует.

2° Определяют интервалы на которые область определения функции разбивается найденными точками.

3° Утанавливают знаки второй производной в каждом из указанных интервалов. Если $f''(x) < 0$, то в рассматриваемом интервале кривая выпукла;
если $f''(x) > 0$, то в рассматриваемом интервале кривая вогнута.

1.Исследовать функции на выпуклость, вогнутость. Найти точки перегиба.
$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3.$

1°Найдем вторую производную: $y'' = 6x - 12;\ \ 6x - 12 = 0,\ \ x = 2.$
2°Точка $x = 2$ делит область определения функции на два промежутка $-\infty < x < 2$ и $2 < x < \infty$.
3°

x	$-\infty < x < 2$	2	$2 < x < \infty$
$y''(x)$	$+$	-1	$-$
$y(x)$	$\cap$	*Точка перегиба* $y(2) = -1$	$\cup$

Таким образом, получим точку перегиба (2;-1).

Критерии оценивания работы:

На «3»:

Первые 3 примера

На «4»:

Первые 4 примера

На «5»:

Все задания

Контрольные вопросы:

1. Какая кривая называется выпуклой (вогнутой);
2. Как определяются геометрически выпуклость и вогнутость кривой?
3. Понятия: точка перегиба.
4. Достаточное условие существования точки перегиба,
4. Алгоритм нахождения интервалов выпуклости графика функции.

Практическая работа № 26: Исследование выпуклости и перегиба, построение графиков функции

Цель работы:

- применить умения по владению представлений об основных понятиях математического анализа и их свойствах, владение умением характеризовать поведение функций, использование полученных знаний для описания и анализа реальных зависимостей.

Оборудование:

1. Рабочая тетрадь в клетку
2. Раздаточные материалы: карточки-задания, инструкционные карты – 20 штук.
3. Калькулятор простой.
4. Ручка.

Задание:

1 Вариант **2 Вариант**

1. Исследуйте функцию на экстремум с помощью первой производной.

$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}\cdot x^2 + 1$ $f(x) = x^4 - 4x + 4$.

2. Найдите промежутки выпуклости и точки перегиба кривых:

$y = x^3 + 3x^2$ $y = x^3 - 12x^2 + 145$.

3. Дан закон прямолинейного движения точки

$s = -\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + 1$ $s = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 + 5t + 3$

(t – в секундах, s – в метрах).Найдите максимальную скорость движения этой точки.

<u>Порядок выполнения:</u>

1. Внимательно прочитать тему и цель практической работы.
2. Изучить учебный материал по теме.
3. Ответить на вопросы.
4. Выполнить задания.
5. Подготовить отчет.

<u>Пояснения к работе (учебный материал):</u>

Правило нахождения экстремумов функции $y = f(x)$ с помощью производной:

1. Найти производную $f'(x)$
2. Найти критические точки функции, в которых $f'(x) = 0$.
3. Разделить числовую ось на промежутки критическими точками.
4. Исследовать знак производной в каждом интервале. Если при этом производная окажется отрицательной, то функция возрастает, положительной – убывает. Если знак меняется с плюса на минус- это точка максимума, с минуса на плюс- это точка минимума.
5. Вычислить значения функции в точках экстремума.

Направление выпуклости графика функции

Кривая $y = f(x)$ называется выпуклый вниз в промежутке $(a;b)$, если она лежит выше касательной в любой точке этого промежутка. Кривая $y = f(x)$ называется выпуклой вверх в промежутке $(a;b)$, если она лежит ниже касательной, в любой точке этого промежутка.

Выпуклость вниз или вверх кривой характеризуется знаком второй производной функции $y = f(x)$: если в некотором промежутке $f''(x) > 0$, то кривая выпукла вниз в этом промежутке; если же $f''(x) < 0$, то кривая выпукла вверх в этом промежутке.

Правило нахождения точек перегиба графика функции $y = f(x)$

1. Найти вторую производную $f''(x)$.
2. Найти критические точки функции $y = f(x)$, в которых $f''(x)$ образуется в нуль или терпит разрыв.
3. Исследовать знак второй производной $f''(x)$ в промежутках, на которых найденные критические точки делят область определения функции $y = f(x)$. Если критическая точка разделяет промежутки выпуклости противоположных направлений, то она является обциссой точки перегиба графика.
4. Вычислить значения функции в точках перегиба.

При выполнении практической работы рассмотрите следующие примеры:

Пример 1:

Исследовать функцию на экстремум с помощью второй производной

$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 12$.

1) Производная $f'(x)$

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$.

2) Критические точки $f'(x) = 0$:

$3x^2 - 18x + 24 = 0$

$x^2 - 6x + 8 = 0$

$x_1 = 2$, $x_2 = 4$ - критические точки.

3) Вторая производная $f''(x)$

$f''(x) = 6x - 18$.

4) Исследовать знак второй производной в каждой критической точке:

$$f''(2) = 6\cdot 2 - 18 = 12 - 18 = -6 < 0$$, значит, $x = 2$ является точкой максимума

$$f''(4) = 6\cdot 4 - 18 = 24 - 18 = 6 > 0$$, значит, $x = 4$ является точкой минимума.

5) Вычислим значения функции в этих точках:

$$f_{\max} = f(2) = 2^3 - 9\cdot 2^2 + 24\cdot 2 - 12 = 8 - 36 + 48 - 12 = 8$$

$$f_{\min} = f(4) = 4^3 - 9\cdot 4^2 + 24\cdot 4 - 12 = 64 - 144 + 96 - 12 = 4$$

Ответ: $f_{\max}(2) = 8$; $f_{\min}(4) = 4$.

2. При выполнении второго задания рассмотрите пример.
Найти промежутки выпуклости и точки перегиба кривой $y = 6x^2 - x^3$.

1)Производная y'

$y' = 12x - 3x^2$.

2) Вторая производная y''

$y'' = 12 - 6x$.

3) Критические точки: $y'' = 0$.

$12 - 6x = 0$

$-6x = -12$

$x = 2$ - критическая точка.

4) Исследуем знак второй производной y'' в промежутках $(-\infty;2)$ и $(2;\infty)$.

$y''(0) = 12 - 6\cdot 0 > 0$; $y''(3) = 12 - 6\cdot 3 < 0$

$x = 2$ точка перегиба

Найдём $y(2)$

$y(2) = 6\cdot 2^2 - 2^3 = 24 - 8 = 16$.

Ответ: на промежутке $(-\infty;2)$ кривая выпукла вниз; на промежутке $(2;\infty)$ кривая выпукла вверх; $(2;16)$ - точка перегиба.

3. При выполнении третьего задания рассмотрим пример.
Найти максимальную скорость движения точки, если закон прямолинейного движения задан уравнением $s(t) = -t^3 + 9t^2 - 2t - 8$ (s – в метрах, t – в секундах).
Скорость движения точки есть первая производная пути во времени:

$\upsilon(t) = s'(t) = -3t^2 + 18t - 24\left(м/с\right)$

Исследуем эту функцию на максимум и минимум с помощью второй производной:

$$\upsilon'(t) = s''(t) = -6t + 18$$

$$-6t + 18 = 0$$

$$-6t = -18$$

$$t = 3$$

$$\upsilon''(t) = (-6t + 18)' = -6 < 0$$

Вторая производная отрицательна, следовательно, скорость является наибольшей при $t = 3$сек.
Найдём значение скорости в момент $t = 3$сек:

$$\upsilon(3) = -3\cdot 3^2 + 18\cdot 3 - 24 = -27 + 54 - 24 = 3\left(м/с\right).$$

Ответ: $3\,м/с$.

Вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию:

1. Правило нахождения экстремумов функции с помощью производной.
2. Какие точки функции называются критическими?
3. Что называется экстремумом функции?
4. В каком случае кривая выпуклая вниз, и в каком случае – вверх?

5. Правила нахождения точек перегиба графика функции $y = f(x)$.

Содержание отчета:
Название практической работы.
Учебная цель.
Решение заданий практической работы.
Ответы на вопросы для закрепления теоретического материала.

Практическая работа № 27: Применение производной для отыскания наибольших и наименьших величин

Цель: показать применение производной к решению текстовых задач на нахождение наибольших и наименьших значений.
Чтобы достичь цели работы, потребуется решить следующие задачи:
изучить научную и научно-методическую литературу по теме.
проработать теоретическую часть материала.
подобрать и прорешать текстовые задачи на данную тему.

функции на отрезке.

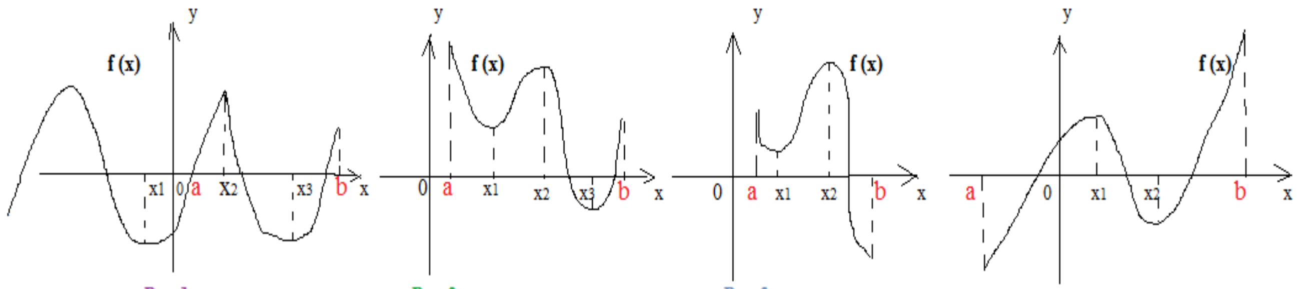


Рис.1 Рис.2 Рис.3 Рис.4

Краткая теоретическая часть (конспект вместе с разобранными примерами). Рассмотрим, как производная используется для нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке. Наибольшее и наименьшее значение непрерывной функции на отрезке может быть как на концах отрезка, так и внутри него. (в отличие от экстремумов функции, которые на концах промежутка не могут быть). Если наибольшее или наименьшее значение достигается внутри отрезка, то это только в **стационарных точках** (*где производная равна нулю)* или **в критических** *(где производная не существует)*. Будем их называть одним словом **«Критические».** Рассмотрим рисунки.

Рис.1. На отрезок **[a;b]** попадают две критические точки (X_2 и X_3). В точке X_2 будет наибольшее значение, в точке X_3 - наименьшее. В данном случае наибольшее значение совпало с максимумом функции, наименьшее значение совпало с минимумом функции. $У_{наиб}(X_2)$ и $У_{наим}(X_3)$.

Рис.2. На отрезок **[a;b]** попадают три критические точки (X_1, X_2 и X_3). Наибольшее значение получилось на конце промежутка в т. a : $У_{наиб}(a)$, наименьшее – в критической точке X_3 : $У_{наим}(X_3)$.

Рис.3. На отрезок **[a;b]** попадают две критические точки (X_1 и X_2). В данном случае наибольшее значение совпало с максимумом функции в точке X_2 :: $У_{наиб}(X_2)$, наименьшее значение получилось на конце промежутка в т. b : $У_{наим}(b)$.

Рис.4. На отрезок **[a;b]** попадают две критические точки (X_1 и X_2). Наибольшее и наименьшее значение оказываются на концах отрезка: $У_{наиб}(b)$, $У_{наим}(a)$.

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции y = f(x) на отрезке [a;b]

1. ***Найти производную f ´(x).***
2. ***Найти стационарные и критические точки (приравнять производную к нулю, то есть найти f ´(x)=0).***

3. ***Из полученных точек выбрать те, которые попадают в заданный по условию отрезок.***
4. ***Вычислить значение функции в выбранных точках и на концах промежутка.***
5. ***Из полученных чисел выбрать самое наибольшее*** $У_{наиб}$ ***и самое наименьшее*** $У_{наим}$.

Рассмотрим примеры на данную тему.

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)= x^4 - 2x^2 – 3$ на отрезке [0; 2]. В ответ записать наименьшее значение.

Решение.

1.Найти производную f ´(x).

$f ´ (x)= (x^4 - 2x^2 – 3)´ = 4 x^3 - 4 x$

2. *Найти f ´(x)=0.*

$4 x^3 - 4 x =0$ $4x (x^2 – 1)= 0$ $4 x= 0$ $x^2 – 1 =0$ $x = 0$, $x= 1$, $x= - 1$

3. Из полученных точек $x = 0$, $x= 1$, $x= - 1$ выбрать те, которые попадают в заданный отрезок [0; 2].

$0 \in [0; 2]$, $1 \in [0; 2]$, $- 1$ не $\in [0; 2]$.

4. Вычислим значение заданной функции в выбранных точках $x = 0$, $x= 1$ и на концах отрезка[0; 2].

$f(0)= 0^4 – 2 \cdot 0^2 – 3 = - 3$

$f(1)= 1^4 – 2 \cdot 1^2 – 3 = -4$

$f(2)= 2^4 – 2 \cdot 2^2 – 3 = 5$

x	0	1	2
f(x)	- 3	-4	5

$f_{наиб}(2) =5$ $f_{наим}(1) = - 4$ Ответ: $\boxed{-4}$

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)= x^3/ 3 - x^2 /2 – 2x +10$ на отрезке [-3; 3]. В ответ записать наибольшее значение. (Ответ округлить до десятых).

Решение.

1. $f ´(x)= (x^3/ 3 - x^2 /2 – 2x +10)´ = x^2 – x -2$
2. $x^2 – x -2 = 0$ $D = (-1)^2 – 4 \cdot 1\cdot (- 2) = 1 +8 =9 = 3^2$

   $X_1 = (1+\sqrt{9}) / 2 = (1+3) / 2 =2$ $X_2 = (1- \sqrt{9}) / 2 = (1-3) / 2 = - 2 / 2 = - 1$
3. $2 \in [-3; 3]$, $- 1 \in [- 3; 3]$.
4. $f(2)= 2^3 / 3 - 2^2 /2 – 2 \cdot 2 +10 = 8 / 3 -2 - 4 +10 = 6,7$

   $f(- 1)= (-1)^3/ 3 – (-1)^2 /2 – 2\cdot(- 1) +10 = (-1) / 3 – 1 / 2 +2 + 10 = 11,17$

   $f(-3)= (-3)^3/ 3 – (-3)^2 /2 – 2(-3) +10 = - 9 -4,5 + 6+ 10 =2,5$

   $f(3)= 3^3/ 3 - 3^2 /2 – 2\cdot 3 +10 = 9 - 4,5 – 6 + 10 = 8,5$

X	**-3**	**- 1**	**2**	**3**
f(x)	**2,5**	**11,17**	**6,7**	**8,5**

$f_{наиб}(2) =11,17$ $f_{наим}(1) = 2,5$ Ответ: $\boxed{11,2}$

Пример 3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)= 9 Cos x + 16x - 8$ на отрезке $[-3\pi/2; 0]$. В ответ записать наибольшее значение.

Решение.

1. $f´ (x)= (9 Cos x + 16x - 8)´ = - 9 Sinx +16$

2. $-9\,Sinx + 16 = 0$ $-9\,Sinx = -16$ $Sinx = (-16)/(-9) = 1,8 > 1$ – нет решения, так как $-1 < Sinx < 1$. Критических точек нет. Сразу выполняем пункт 4.
3. Найдем значение функции на концах промежутка.

$f(-3\pi/2) = 9\,Cos(-3\pi/2) + 16\cdot(-3\pi/2) - 8 = 9Cos(\pi/2) - 24\pi - 8 =$
$9\cdot 0 - 24\cdot 3,14 - 8 = -83,36$
$f(0) = 9\,Cos(0) + 16\cdot(0) - 8 = 9\cdot 1 + 0 - 8 = 1$

x	-3π/2	0
f(x)	- 83,36	1

$f_{наиб}(0) = 1$ $f_{наим}(-3\pi/2) = -83,36$ Ответ: $\boxed{1}$

<u>Пример 4.</u> Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = 12\,tg\,x - 12x + 3\pi - 13$ на отрезке $[-\pi/4; \pi/4]$. В ответ записать наибольшее значение.

<u>Решение.</u>

1. $f'(x) = (12\,tg\,x - 12x + 3\pi - 13)' = 12/Cos^2x - 12 + 0 - 0$

(<u>Примечание:</u> производная $(3\pi)' = 0$ так как это постоянная величина)

2. $12/Cos^2x - 12 = 0$ $12(1/Cos^2x - 1) = 0$ $1/Cos^2x = 1$

$Cos^2x = 1$ $Cos\,x = 1$ и $Cos\,x = -1$. Получили два простейших тригонометрических уравнения, для которых используем формулы частных случаев.
$Cos\,x = 1$ $x = 2\pi n,\ n \in Z$. При $n = 0$ $x = 2\pi\cdot 0 = 0$
$Cos\,x = -1$ $x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$. При $n = 0$ $x = \pi + 2\pi\cdot 0 = \pi$

3. $0 \in [-\pi/4; \pi/4]$, π не $\in [-\pi/4; \pi/4]$.
4. $f(0) = 12\,tg\,0 - 12\cdot 0 + 3\pi - 13 = 12\cdot 0 - 12\cdot 0 + 3\cdot 3,14 - 13 = -3,6$

$f(-\pi/4) = 12\,tg(-\pi/4) - 12\cdot(-\pi/4) + 3\pi - 13 = 12\cdot(-1) + 3\pi + 3\pi - 13 =$
$-12 + 6\pi - 13 = -25 + 6\pi = -25 + 18,84 = -6,16$
$f(\pi/4) = 12\,tg(\pi/4) - 12\cdot(\pi/4) + 3\pi - 13 = 12\cdot(1) - 3\pi + 3\pi - 13 = -1$

x	-π/4	0	π/4
f(x)	- 6,16	- 3,6	-1

$f_{наиб}(\pi/4) = -1$ $f_{наим}(-\pi/4) = -6,16$ Ответ: $\boxed{-1}$

<u>Решить самостоятельно.</u>

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции
$f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 12$ на отрезке $[-4; -1]$. В ответ записать наибольшее значение.
2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции
$f(x) = x^3 - 20x^2 + 100x + 23$ на отрезке $[9; 13]$. В ответ записать наименьшее значение.
3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$f(x)= 27x- 13 \sin x +11$ на отрезке $[-2\pi ; 0]$. В ответ записать наибольшее значение.

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

   $f(x)= 15 \operatorname{tg} x - 15x+ 4$ на отрезке $[0; \pi/4]$. В ответ записать наименьшее значение.

Ответы.

1. $f_{наим}(-1) = -6$ $f_{наиб}(-3) = 6$ $\boxed{6}$

2. $f_{наим}(10) = 23$ $f_{наиб}(13) = 140$ $\boxed{23}$

3. $f_{наим}(-2\pi) =- 158,56$ $f_{наиб}(0) = 11$ $\boxed{11}$

4. $f_{наим}(0) = 4$ $f_{наиб}(\pi/4) = 7,2$ $\boxed{4}$

Практическая работа № 28: Исследование и построение графиков функций с помощью производной

Цель– выработка умений и навыков применять производную для исследования свойств функции, построения графиков функций. Развитие умений работать со справочным материалом, учебником.
Задачи: Законспектировать учебный материал, исследовать функции при помощи производных, построить графики функций, ответить на контрольные вопросы.
Содержание:
1. Теоретический материал.
2. Практическая часть.
3. Контрольные вопросы.

1.Теоретический материал

Понятие производной — одно из важнейших в математике. С помощью производной, учитывая ее механический смысл (скорость изменения некоторого процесса) и геометрический смысл (угловой коэффициент касательной), можно решать самые разнообразные задачи, относящиеся к любой области человеческой деятельности. В частности, с помощью производных стало возможным подробное исследование функций, более точное построение их графиков, нахождение их наибольших и наименьших значений и т.д.

Исследование функций и построение графиков функций

При построении графиков функций с помощью производных можно придерживаться такого плана:

Схема исследования функции:
1. Находят область определения функции.
2. Выясняют, является ли функция четной или нечетной.
3. Определяют точки пересечения графика функции с координатными осями, если это возможно.
4. Находят стационарные точки функции.
5. Определяют промежутки монотонности и экстремумы функции.

6. Используя результаты исследования, соединяют полученные точки плавной кривой.

Этот план исследования функции и построения ее графика является примерным, его не всегда надо придерживаться пунктуально: можно менять порядок пунктов, некоторые совсем опускать, если они не подходят к данной функции. В частности, если нахождение точек пересечения с осями координат связано с большими трудностями, то этого можно не делать; если функция четная, то ее график симметричен относительно оси Оу, поэтому достаточно построить график для положительных значений аргумента, принадлежащих области определения функции, а затем отразить его симметрично относительно оси ординат, и т.п.

Задание №1: Исследуйте функцию и постройте ее график,
$f(x) = x^2 + 2x - 3$.

Решение.

1. Функция определена на промежутке $(-\infty; +\infty)$. Точек разрыва нет.

2. Имеем $f(-x) = (-x)^2 + 2(-x) - 3 = x^2 - 2x - 3$.

$f(x) = (x)^2 + 2(x) - 3 = x^2 + 2x - 3$

Функция не является ни четной, ни нечетной, так как

$f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$.

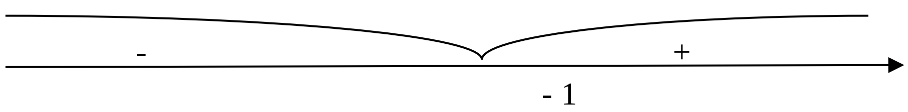
3. Если $x=0$, $y= 0^2+2\cdot 0 - 3= -3$, $(0;-3)$ точка пересечения графика с осью ординат. Если $y=0$, то $x^2+2x-3=0$. $(-3;0)$ и $(1;0)$ – точки пересечения графика с осью абсцисс.

4.Находим стационарные точки функции. Имеем $y' = 2x + 2$,

$$2x + 2 = 0,$$
$$2x = -2,$$
$$x = -1.$$

5. Область определения функции разделится на промежутки $(-\infty; -1)$ и $(-1;+\infty)$. Знаки производной $f'(x)$ в каждом промежутке можно найти непосредственной подстановкой точки из рассматриваемого промежутка.

Так, $f'(-2) = -2 < 0$, $f'(2)= 6 > 0$.

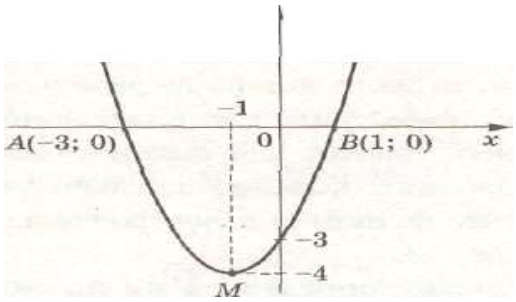


Следовательно, в промежутке $(-\infty; -1)$ функция убывает, а в промежутке $(-1;+\infty)$ — возрастает.

При $x = -1$ функция имеет минимум, равный

$f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) -3 = 1-2-3 =-4$.

6. Отмечаем найденные точки в прямоугольной системе координат и соединяем их плавной линией.



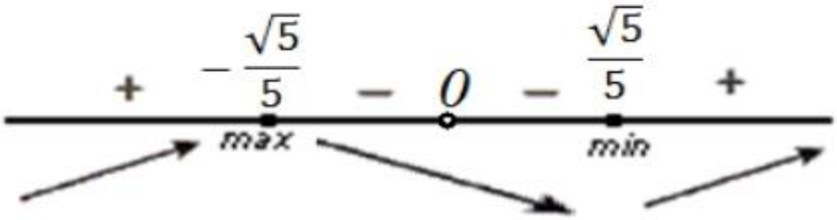
Задание №2: Исследовать функцию и построить график:

$У=\dfrac{5x^2+x+1}{x}$

1. Область определения: $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$.
2. Функция ни четна, ни нечетна, непериодическая.
3. Точек пересечения с осями координат нет.
4. Производная: $y^1=\dfrac{5x^2-1}{x^2}$

Находим стационарные точки функции $\dfrac{5x^2-1}{x^2}=0$

$x\neq0$ $x=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$



5. Функция возрастает при x $\in$ $(-\infty;-\dfrac{\sqrt{5}}{5})$ $(\dfrac{\sqrt{5}}{5};\infty)$ и убывает при $x\in(-\dfrac{\sqrt{5}}{5};0)$ $(0;\dfrac{\sqrt{5}}{5})$

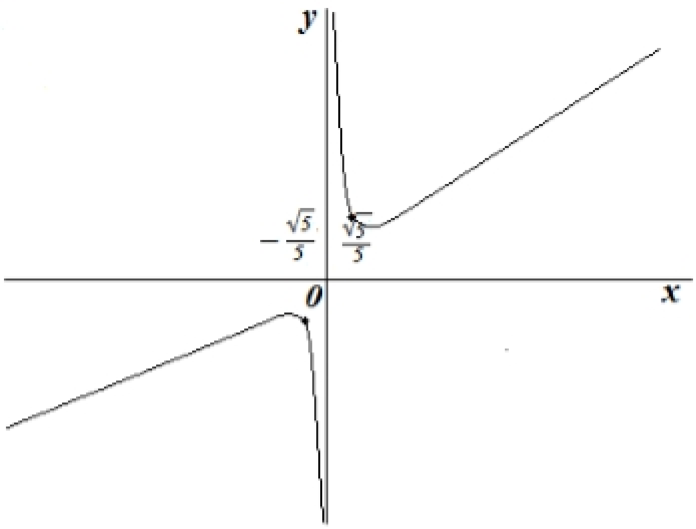
Максимум функции:$(-\dfrac{\sqrt{5}}{5};1-2\sqrt{5})$ Минимум функции $(\dfrac{\sqrt{5}}{5};1+2\sqrt{5})$

Найдем промежутки выпуклости и вогнутости

$У^{II}=\dfrac{10x^3-10x^3+2x}{x^4}=\dfrac{2}{x^3}$ $\dfrac{2}{x^3}=0$, $x\neq0$

Функция вогнута при $x\in(0;\infty)$ и выпукла при $x\in(-\infty;0)$

6. Для более точного построения графика возьмем контрольные точки. Если x=1, y=7 (1;7)
Если x= −1, y= −5 (−1;−5)



Задание №3:

Учебник М.И.Башмаков. Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Москва. «Академия» 2017. Занятие 6, стр. 183-186. Прочитайте и законспектируйте.

Требования к оформлению практической работы

Задание для выполнения практической работы должно быть перенесено в тетрадь для практических работ.

В тетради должно быть отражено:

- название практической работы
- решение заданий практической части.
- ответы на контрольные вопросы.

2. Практическая часть

Задание: Исследовать функцию и построить ее график.

1 вариант	2 вариант
1. $y = x^3 - 3x^2 + 4$	1. $y = x^3 + 3x^2 - 4$
2. $y = x^3 - 4x$	2. $y = x^3 - 12x$
3. $y = x^4 - 8x^2$	3. $y = x^4 - 2x^2$
4. $y = \dfrac{x^2+4}{x}$	4. $y = \dfrac{x^2}{x+1}$

3. Контрольные вопросы

1.Какие промежутки называют промежутками монотонности функции?

2. Когда функция возрастает на промежутке?
3. Когда функция убывает на промежутке?
4. Какие точки называют точками экстремума функции?
5. Какие точки называются стационарными?
6. Сформулируйте достаточное условие существования минимума в стационарной точке.
7. Сформулируйте достаточное условие существования максимума в стационарной точке

Практическая работа № 29: Нахождение оптимального результата с помощью производной в практических задачах. Физический смысл производной в профессиональных задачах. Решение задач на физический смысл производной в профессиональных задачах

Цель: решить задачи на физический смысл производной

Теоретическая часть

Физический смысл производной заключается в том, что производная выражает скорость протекания процесса, описываемого зависимостью $y = f(x)$:
- если это движение автомобиля, то, принимая в качестве функции зависимость пройденного расстояния от времени, с помощью производной получается зависимость скорости от времени;
- если же рассмотреть в качестве функции мгновенную скорость автомобиля, то производная задает изменение его ускорения;
- если рассмотреть функцию, задающую зависимость объема произведенной продукции от времени, то производная позволит узнать, как изменялась со временем производительность труда на этом предприятии;
- если рассматриваются электромагнитные волны, то могут потребоваться функции, характеризующие изменение со временем электрического и магнитного полей, а также их производные - скорости изменения этих полей, ведь величина магнитного поля пропорциональна скорости изменения электрического поля и т.п.
Решая конкретные текстовые задачи на скорость процесса с применением производной, следует не забывать о размерностях величин. Если переменная y, заданная функцией $f(x)$ измеряется в некоторых единицах $[y]$, а её аргумент в единицах $[x]$, то производная (скорость) измеряется в единицах $[y/x]$.
Скорость прямолинейного движения материальной точки в момент времени t есть производная от пути S по времени t:

$$v(t) = S'(t),$$

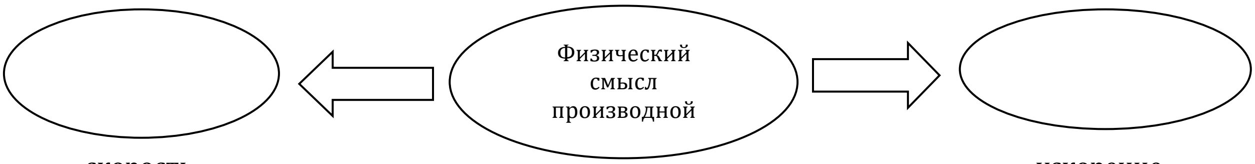
а ускорение – производная скорости по времени:

$$a(t) = v'(t) = S''(t).$$

Если функция $y = f(x)$ описывает какой-либо физический процесс, то производная y' есть скорость протекания этого процесса. В этом заключается механический смысл производной.
Примеры:
1. Закон движения тела задан формулой $S(t)=0,5t^2 + 3t + 2$ (S - в метрах, t – в секундах). Какой путь пройден телом за 4 секунды? Какова скорость движения в этот момент времени?
Решение:
$S(4)=0,5\cdot 4^2 + 3\cdot 4 + 2 = 8+12+2=22$ *(м)*
$v(t)=(0,5t^2 + 3t + 2)'=t+3$*(м/с)*
$v(4)=4+3=\underline{7}$ *<u>(м/с)</u>*
Ответ:7 м/с
2. Пусть количество вещества, вступившего в химическую реакцию, задаётся зависимостью $p(t) = t^2/2 + 3t - 3$ *(моль)*. Найти скорость химической реакции через 3 секунды.
Решение:
$v(t) = p'(t) = t + 3$ *(моль/с)*
$v(3) = 3 + 3 = \underline{6}$ *<u>(моль/с)</u>*
Ответ: 6моль/с

Ход работы

Перерисуйте в тетрадь и заполните кластер-схему (данные возьмите из теоретической части):



скорость ускорение

Выполните предложенные задания.

Решить задачу

Вариант1

1. Закон движения тела задан формулой $S(t)= t^3 + 3t - 4$ (S - в метрах, t – в секундах). Какой путь пройден телом за 4 секунды? Какова скорость движения в этот момент времени?
2. Пусть популяция бактерий в момент t (сек) насчитывает $x(t) = 3000 + 100\, t^2$ особей. В какой момент времени скорость роста популяции будет равна *600* особей в секунду?
3. Объём продукции *V* цеха в течение дня зависит от времени по закону

   $V(t) = -\frac{5}{3}\, t^3 + \frac{15}{2}\, t^2 + 50t + 70$ *(ед.).* Вычислите производительность труда *П (t)* в момент времени $t = 2$ часа.
4. Мама с дочкой гуляли в парке. Девочка захотела покататься на каруселях, а мама решила сфотографировать дочку. Вращение карусели совершается по закону

   $g(t) = \frac{1}{9} t^3 - \frac{5}{2} t^2$. Фотография может быть хорошего качества только при ускорении равном *3* м/с^2. В какой момент времени необходимо сделать снимок?

Вариант 2

1. Закон движения тела задан формулой $S(t)= t^3 - 3t + 4$ (S - в метрах, t – в секундах). Какой путь пройден телом за 4 секунды? Какова скорость движения в этот момент времени?
2. Пусть популяция бактерий в момент t (сек) насчитывает $x(t) = 4000 + 200\, t^2$ особей. В какой момент времени скорость роста популяции будет равна *800* особей в секунду?
3. Объём продукции *V* цеха в течение дня зависит от времени по закону

   $V(t) = \frac{5}{3}\, t^3 - \frac{15}{2}\, t^2 + 50t + 70$ *(ед.).* Вычислите производительность труда *П (t)* в момент времени $t = 2$ часа.
4. Мама с дочкой гуляли в парке. Девочка захотела покататься на каруселях, а мама решила сфотографировать дочку. Вращение карусели совершается по закону

   $g(t) = \frac{1}{12} t^3 - 3\, t^2$. Фотография может быть хорошего качества только при ускорении равном *2* м/с^2. В какой момент времени необходимо сделать снимок?

Практическая работа № 30: Понятие многогранника. Вершины, рёбра, грани многогранника. Развёртка. Многогранные углы. Выпуклые многогранники. Теорема Эйлера.

Задание 1: Записать в тетрадь понятия многогранника, вершины, ребра, грани; правильного многогранника.

Многогранник - геометрическое тело, ограниченное со всех сторон плоскими многоугольниками, называемыми ***гранями***. Стороны граней называются ***ребрами***

Выпуклый многогранник называется ***правильным***, если все его грани — правильные одинаковые многоугольники и все многогранные углы при вершинах равны. Существует 5 видов правильных многогранников: тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр.

Задание 2: Записать в тетрадь теорему Эйлера

Теорема Эйлера о соотношении между числом вершин, ребер и граней выпуклого многогранника, доказательство которой Эйлер опубликовал в 1758 г.

Вершины + Грани - Рёбра = 2.

Вершины + Грани - Рёбра = 2.

Многогранник	**Вершины**	**Грани**	**Рёбра**	**Оси симметрии**	**Плоскости симметрии**
Тетраэдр	4	4	6	3	6
Куб	8	6	12	9	9
Октаэдр	6	8	12	9	7
Додекаэдр	20	12	30	15	15
Икосаэдр	12	20	30	15	15

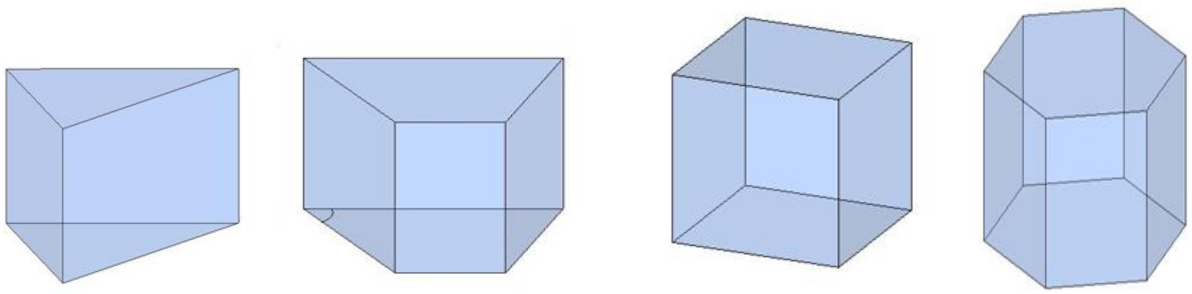
Задание 3. Изобразите тетраэдр, куб, октаэдр и укажите грани, ребра и вершины.

Задание 2: Записать в тетрадь ***понятие призм, ее элементов***

Призма — это многогранник, две грани которого являются равными многоугольниками, находящимися в параллельных плоскостях, а остальные грани — параллелограммами.

Грани, которые находятся в параллельных плоскостях, называются **основаниями** призмы, а остальные грани — **боковыми гранями** призмы

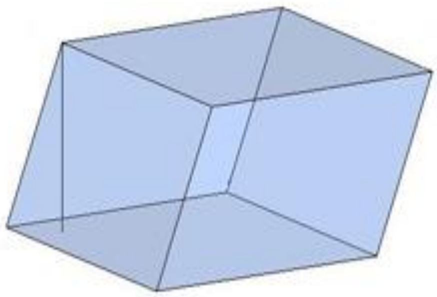
В зависимости от основания призмы бывают:



Треугольная Четырёхугольные Шестиугольная

Призма с боковыми рёбрами, перпендикулярными её основаниям, называется **прямой призмой**, как в предыдущих рисунках.

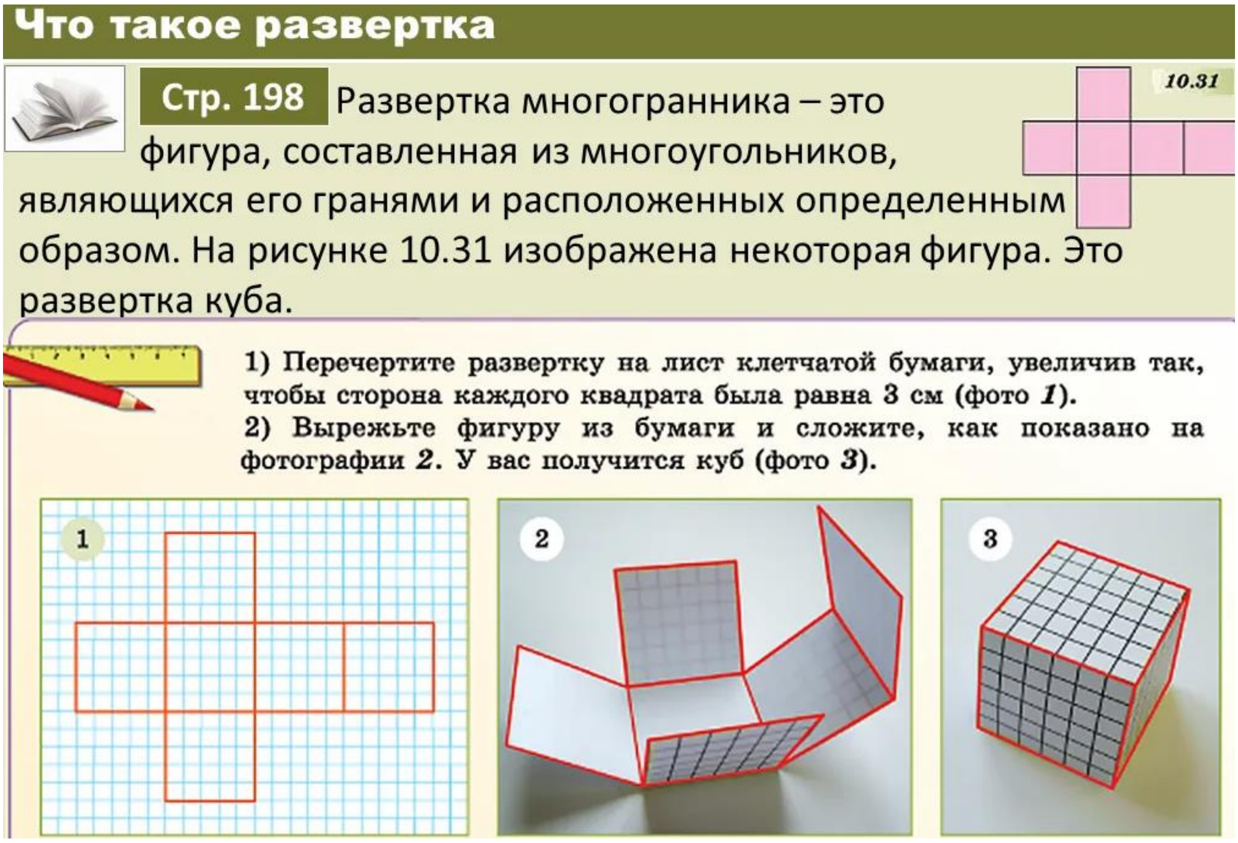
Прямая призма называется **правильной**, если её основания — правильные многоугольники.



Призма, боковые рёбра которой не перпендикулярны основаниям, называется **наклонной призмой**.

Расстояние между основаниями призмы называется **высотой** призмы.

- Высота прямой призмы совпадает с боковым ребром.
- Высота наклонной призмы — это перпендикуляр, проведенный между основаниями призмы. Часто перпендикуляр проводят с одной из вершин верхнего основания.
- Без дополнительных условий невозможно определить, в какую точку проектируется высота наклонной призмы.



Выполнить тест по теме:

Тест по теме «Многогранники»

Вариант 1

1. Многогранник – это тело, поверхность которого состоит из:
   а) параллелограммов
   б) многоугольников и треугольников
   в) многоугольников
   г) многоугольников и параллелограммов
2. Если боковые ребра призмы перпендикулярны к основаниям, то призма называется
   а) правильной
   б) прямой

в) наклонной
   г) перпендикулярной
3. Диагональ многогранника – это отрезок, соединяющий
   а) любые две вершины многогранника
   б) две вершины, не принадлежащие одной грани
   в) две вершины, принадлежащие одной грани
   г) две вершины, одного основания
4. Количество ребер шестиугольной призмы
   а) 18
   б) 6
   в) 24
   г) 12
5. Наименьшее число граней призмы
   а) 3
   б) 4
   в) 5
   г) 6

Вариант 2

1. Поверхность призмы состоит из
   а) двух многоугольников, расположенных в двух равных плоскостях и конечного числа параллелограммов
   б) двух равных многоугольников и конечного числа параллелограммов
   в) двух равных многоугольников, расположенных в двух плоскостях и конечного числа параллелограммов
   г) двух равных многоугольников, расположенных в параллельных плоскостях и конечного числа параллелограммов
2. Правильная призма – это
   а) призма, основанием которой является правильный многоугольник
   б) призма, основанием которой является равносторонний треугольник
   в) прямая призма, основанием которой является правильный многоугольник
   г) прямая призма, основанием которой является квадрат
3. Высотой призмы называется:
   а) отрезок, соединяющий две вершины призмы, не принадлежащие одной грани
   б) отрезок, соединяющий две вершины, принадлежащие одной грани
   в) расстояние между плоскостями ее оснований
   г) расстояние между двумя боковыми гранями
4. Количество граней шестиугольной призмы
   а) 6
   б) 8
   в) 10
   г) 12
5. Наименьшее число ребер призмы
   а) 9
   б) 8
   в) 7

г) 6

Критерии оценки: «5» баллов – 5 верно выполненных заданий
«4» балла – 4 верно выполненных задания
«3» балла – 3 верно выполненных задания

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5
1	**в**	**б**	**б**	**а**	**в**
2	**г**	**в**	**в**	**б**	**а**

Практическая работа № 31: Призма. Прямая и наклонная призма. Правильная призма. Параллелепипед, Куб. Свойства параллелепипеда

Цель работы:
1) Повторить и закрепить виды призм и их свойства.
2) Выработать умения делать к задачам грамотные чертежи.
3) Выработать умения и навыки при решении геометрических задач по теме «Призма».
Оборудование: карта индивидуального задания, микрокалькулятор.
Для выполнения практической работы используйте следующие сведения:

- Если боковые рѐбра призмы перпендикулярны основаниям, то призма называется прямой, в противном случае наклонной.
- Прямая призма, в основании которой лежит правильный многоугольник, называется правильной.
- Перпендикуляр, опущенный из любой точки верхнего основания на плоскость нижнего основания, называется высотой призмы. У прямой и правильной призмы высота равна боковому ребру.
- Диагональю призмы называется любой отрезок, соединяющий две не лежащие в одной грани вершины призмы.
- Диагональное сечение - это сечение, которое проходит через одну из диагоналей основания и боковое ребро.

Параллелепипед. Наиболее часто встречающимся видом призмы является параллелепипед. Опр. Параллелепипедом называется призма, в основании которой лежит параллелограмм.

- Все грани параллелепипеда - параллелограммы.
- Параллелепипед, боковые рѐбра которого перпендикулярны к плоскостям оснований, называется прямым. (Основание прямого параллелепипеда – параллелограмм, а боковые грани – прямоугольники).
- Прямой параллелепипед, в основании которого лежит прямоугольник, называется прямоугольным параллелепипедом. Все грани прямоугольного параллелепипеда - прямоугольники. Длины трѐх рѐбер прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, называются его измерениями (длиной, шириной, высотой).

Квадрат длины диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов 3-х его измерений: $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$.

Вариант 1

1. Сколько рѐбер у шестиугольной призмы?
2. Какое наименьшее число граней может иметь призма?
3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Каково расположение прямых B_1D_1 и AC ?

4. Перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется…
5. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна 12 см. Диагональ призмы образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите боковое ребро призмы.
6. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 7 см и 24 см, а диагональ параллелепипеда - $5\sqrt{29}$ см. Найти площадь диагонального сечения параллелепипеда.
7. В прямом параллелепипеде с высотой 15 м стороны основания ABCD равны 2 м и 4 м, диагональ AC равна 5 м Найдите площадь диагонального сечения параллелепипеда, проходящего через вершины B и D.

Вариант 2

1. Сколько граней у шестиугольной призмы?
2. Какое наименьшее число рёбер может иметь призма?
3.Три ребра параллелепипеда равны 6 м, 8 м и 10 м. Найдите сумму длин всех его рёбер.
4. Прямая призма называется правильной, если ее основания…
5. Найдите длину диагонали прямоугольного параллелепипеда, измерения которого равны 2 см, 3 см и 4 см.
6. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 3 см и 5 см, а одна из диагоналей – 4 см. Меньшая диагональ параллелепипеда с плоскостью основания составляет угол в 60^0. Определить диагонали параллелепипеда.
7. В прямом параллелепипеде боковое ребро 1 м, стороны основания 23 дм и 11 дм, а диагонали основания относятся как 2:3. Найдите площади диагональных сечений.

Практическая работа № 32: Элементы пирамиды, цилиндра, конуса, сферы и шара. Решение задач

Цель:

Дидактическая - способствовать формированию умений и навыков при решении задач по вычислению площади поверхности цилиндра и конуса.

Воспитательная - повышение интереса к предмету.

Развивающая - развитие пространственного воображения.

Цель: формирование умений и навыков при решении задач на вычисление площади поверхности цилиндра и конуса.

Задачи:

1.Уметь применять формулы вычисления площади поверхности цилиндра и конуса.
2. Уметь решать задачи на вычисление площади поверхности цилиндра и конуса.

Формируемые компетенции: ОК 1-5.

Оснащение: методические указания по выполнению практической работы.

1. Проверка готовности выполнения практической работы:

Фронтальный опрос.

Закончить предложение:

1. Цилиндром называется тело, которое состоит из…
2. Конусом называется тело, которое состоит из …
3. Образующей цилиндра называется отрезок, соединяющий ..
4. Образующей конуса называется отрезок, соединяющий ..
5. Радиусом цилиндра и конуса называется …

6. Основанием цилиндра и конуса является …
7. Высотой цилиндра называется отрезок соединяющий …
8. Высотой конуса называется отрезок соединяющий …
9. Площадь поверхности цилиндра вычисляется..
10. Площадь поверхности конуса вычисляется …
11. Шаром называется тело которое состоит из …
12. Площадь поверхности шара вычисляется....

2. Сообщение темы занятия, формулировка обучающимся цели занятия.
3. Обучающиеся получают тетради для практической работы и методические указания по выполнению практической работы, знакомятся с порядком выполнения (приложение 1).
4. Обучающиеся выполняют практическую работу.
5. Сообщение домашнего задания.

Методические указания по выполнению практической работы № 32
Тема: Вычисление площади поверхности цилиндра, конуса, шара
Цель урока: Способствовать формированию умений и навыков по вычислению площади поверхности цилиндра, конуса, шара.
Продолжительность: 2 часа.
Обучающийся должен знать:
- основные элементы цилиндра, конуса, шара;
- формулы вычисления площади поверхности цилиндра, конуса, шара.

Обучающийся должен уметь:
- вычислять площадь боковой поверхности цилиндра и конуса;
- вычислять площадь поверхности шара.
- вычислять площадь полной поверхности цилиндра и конуса;

Рекомендации по выполнению практической работы:
1. Прочтите задание.
2. Запишите условие задачи.
3. Запишите кратко дано
4. Выполните рисунок.
5. Запишите решение и ответ.

Краткие теоретические положения:

Цилиндр (рис. 1.18)

Площадь боковой поверхности:
$S_{бок} = 2\pi RH.$

Площадь полной поверхности:
$S_{цил} = 2\pi RH + 2\pi R^2.$

Конус (рис. 1.19)

Площадь боковой поверхности:
$S_{бок} = \pi RL.$

Площадь полной поверхности:
$S_{кон} = \pi RL + \pi R^2.$

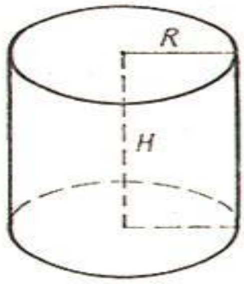


Рис. 1.18

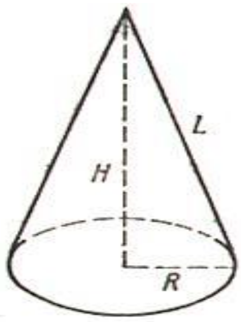
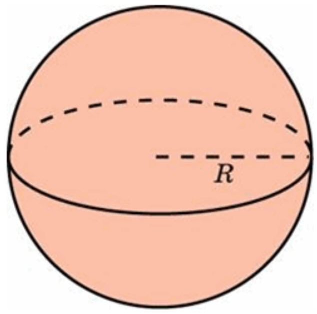


Рис. 1.19

Шар

Площадь поверхности S и объём V шара радиуса r определяются формулами:

- $S = 4\pi r^2$
- $S = \pi d^2$
- $V = \frac{4}{3}\pi r^3$



Задача 1.

Площадь боковой поверхности цилиндра равна 21 π, а диаметр основания равен 7. Найдите высоту цилиндра.

Решение.

Высота цилиндра равна

$h = \frac{S_{бок}}{2\pi R} = \frac{S_{бок}}{\pi D} = \frac{21\pi}{7\pi} = 3.$

Ответ: 3.

Задача 2.

Площадь основания конуса 36π см^2 , а его образующая 10 см.

Вычислить боковую поверхность конуса.

Решение.

Зная площадь основания, найдем его радиус.

$S = \pi R^2$, $36\pi = \pi R^2$, $R^2 = 36$, $R = 6$

Площадь боковой поверхности конуса найдем по формуле:

$S = \pi Rl$, где R - радиус основания , l - длина образующей, откуда

$$\boldsymbol{S = \pi \cdot 6 \cdot 10 = 60\pi}$$

Ответ: $\boldsymbol{60\pi}$ см^2.

Задача 3. Объем шара равен 288 π. Найдите площадь боковой поверхности конуса вписанного в шар. Основанием конуса является больший круг.

Решение.

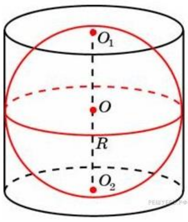
Объем шара радиуса R вычисляется по формуле $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, откуда найдем радиус шара

$$R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 288\pi}{4\pi}} = 6$$

.

Площадь боковой поверхности конуса равна $S = \pi Rl$, $l = R\sqrt{2}$. следовательно $S = \pi 6 \cdot 6\sqrt{2} = 36\sqrt{2}\pi$ Ответ: $36\sqrt{2}\pi$.

Задача 4. Около шара описан цилиндр, площадь поверхности которого равна 18. Найдите площадь поверхности шара.



Решение.

По построению радиусы шара и основания цилиндра равны. Площадь поверхности цилиндра, с радиусом основания r и высотой $2r$ равна $S = 2S_{осн} + S_{бок} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 2r = 6\pi r^2$.

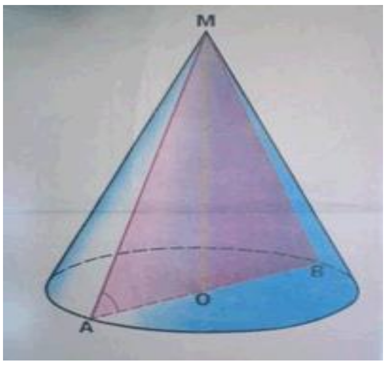
Площадь поверхности шара радиуса r равна $S = 4\pi r^2$, то есть в 1,5 раза меньше площади поверхности цилиндра. Следовательно, площадь поверхности шара равна 12.

Ответ: 12.

Задания для практической работы

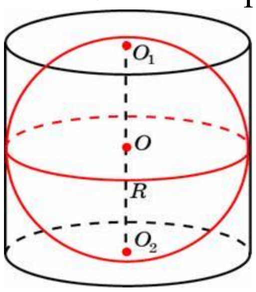
1 вариант

1. Площадь осевого сечения прямого круглого цилиндра равна 24. Найдите площадь его боковой поверхности.
2. Высота цилиндра 6дм, радиус основания 5дм. Найдите боковую поверхность цилиндра.
3. Диагональ осевого сечения цилиндра наклонена к плоскости основания под углом 60° и равна 20 см. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
4. Высота конуса равна 6, образующая равна 10. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

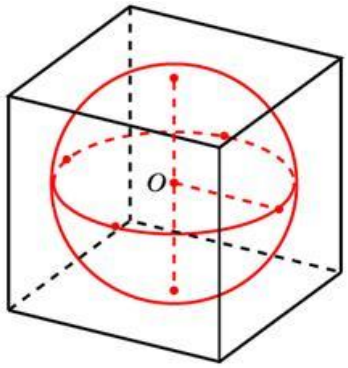


5. Образующая конуса равна 18 см и наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите площадь полной поверхности конуса.
6. Во сколько раз уменьшится площадь боковой поверхности конуса,
если радиус его основания уменьшить в 1,5 раза?
7. Во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить в три раза?
8. Радиусы трех шаров равны 6, 8 и 10. Найдите радиус шара, объем которого равен сумме их объемов.
9. Площадь большого круга шара равна 3. Найдите площадь поверхности шара.

10. Объем шара равен 972 π . Найдите площадь его поверхности.



11. Около шара описан цилиндр, площадь поверхности которого равна 81. Найдите площадь поверхности шара.



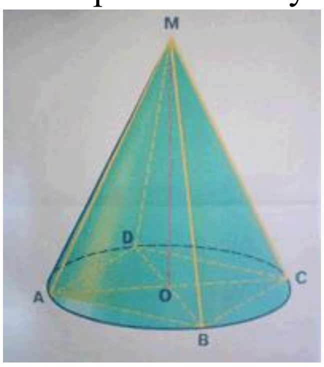
12. В куб с ребром 3 вписан шар. Найдите площадь поверхности этого шара.

За каждое задание практической работы получаете 2 баллов.

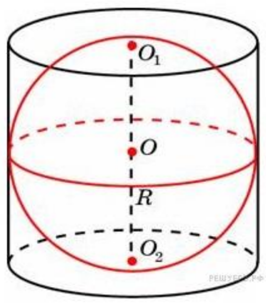
Отметка	*Число баллов, необходимое для получения отметки*
«3» (удов.)	*8 - 12*
«4» (хорошо)	*13-20*
«5» (отлично)	*Более 20*

2 вариант

1. Площадь осевого сечения прямого круглого цилиндра равна 4. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
2. Диагональ осевого сечения цилиндра 13 см, высота 5см. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
3. Диагональ осевого сечения цилиндра равна $8\sqrt{2}$ см и образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.
4. Радиус основания конуса равен 3, высота равна 4. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

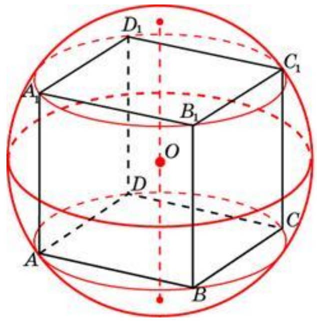


5. В конус, высота которого 20 см, вписана пирамида. Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 18 см и 20 см. Найдите образующую и радиус основания конуса, площадь поверхности конуса.
6. Площадь осевого сечения конуса равна 0,6 см^2. Высота конуса равна 1,2 см. Вычислить площадь полной поверхности конуса.
7. Во сколько раз увеличится площадь поверхности шара, если его радиус увеличить в два раза?
8. Радиусы двух шаров равны 6, 8. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей их поверхностей.
9. Площадь большого круга шара равна 1. Найдите площадь поверхности шара.
10. Объем шара равен 36 π. Найдите площадь его поверхности



11. Около шара описан цилиндр, площадь поверхности которого равна 54. Найдите площадь поверхности шара.

12. Около куба с ребром $\sqrt{3}$ описан шар. Найдите площадь поверхности этого шара.



За каждое задание практической работы получаете 2 баллов.

Отметка	*Число баллов, для получения отметки*
«3» (удов.)	*8 - 12*
«4» (хорошо)	*13-20*
«5» (отлично)	*Более 20*

Вопросы для самоконтроля

1. Как вычисляется площадь поверхности цилиндра?
2. Как вычисляется площадь поверхности конуса?
3. Как вычисляется площадь поверхности шара?

Практическая работа № 33: Определение и физический смысл вектора

Цель: закрепить умения и навыки нахождения координат вектора, длины вектора, угла между векторами

Для данных пар векторов выполните действия:

1) найдите координаты вектора $\vec{a}+\vec{b}$;
2) найдите координаты вектора $\overrightarrow{2a}-3\vec{b}$;
3) найдите длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
4) найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
5) найдите $Cos\alpha$ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

1 вариант	**2 вариант**	**3 вариант**
а) $\vec{a}(1;1;2)$ и $\vec{b}(5;4;3)$ б) $\vec{a}(1;0;-7)$ и $\vec{b}(4;4;7)$ в) $\vec{a}(7;0;1)$ и $\vec{b}(7;-6;6)$	а) $\vec{a}(1;0;2)$ и $\vec{b}(7;5;4)$ б) $\vec{a}(3;4;0)$ и $\vec{b}(7;1;0)$ в) $\vec{a}(2;7;-5)$ и $\vec{b}(5;7;3)$	а) $\vec{a}(5;7;2)$ и $\vec{b}(7;2;-5)$ б) $\vec{a}(-2;4;5)$ и $\vec{b}(5;4;7)$ в) $\vec{a}(5;5;2)$ и $\vec{b}(7;4;3)$
4 вариант	**5 вариант**	**6 вариант**
а) $\vec{a}(1;0;-1)$ и $\vec{b}(1;1;4)$ б) $\vec{a}(-7;5;0)$ и $\vec{b}(6;0;1)$ в) $\vec{a}(2;7;1)$ и $\vec{b}(5;4;3)$	а) $\vec{a}(-2;4;5)$ и $\vec{b}(7;5;4)$ б) $\vec{a}(-3;2;5)$ и $\vec{b}(2;5;3)$ в) $\vec{a}(1;6;-5)$ и $\vec{b}(6;1;3)$	а) $\vec{a}(-3;-4;5)$ и $\vec{b}(4;3;0)$ б) $\vec{a}(3;2;0)$ и $\vec{b}(0;5;1)$ в) $\vec{a}(1;3;-4)$ и $\vec{b}(5;7;2)$
7 вариант	**8 вариант**	**9 вариант**
а) $\vec{a}(-3;1;4)$ и $\vec{b}(1;4;6)$ б) $\vec{a}(-2;5;4)$ и $\vec{b}(5;7;4)$ в) $\vec{a}(-3;5;4)$ и $\vec{b}(7;0;1)$	а) $\vec{a}(1;1;0)$ и $\vec{b}(1;2;2)$ б) $\vec{a}(2;7;5)$ и $\vec{b}(-5;2;-7)$ в) $\vec{a}(3;1;2)$ и $\vec{b}(5;4;1)$	а) $\vec{a}(1;-1;2)$ и $\vec{b}(7;-2;1)$ б) $\vec{a}(-3;4;-5)$ и $\vec{b}(5;1;7)$ в) $\vec{a}(5;7;2)$и $\vec{b}(-7;4;3)$

10 вариант	11 вариант	12 вариант
а) $\vec{a}(5;-2;1)$ и $\vec{b}(4;0;3)$ б) $\vec{a}(-7;2;3)$ и $\vec{b}(2;2;0)$ в) $\vec{a}(8;0;1)$ и $\vec{b}(0;4;-2)$	а) $\vec{a}(5;-1;2)$ и $\vec{b}(6;-2;5)$ б) $\vec{a}(-5;4;3)$ и $\vec{b}(2;4;4)$ в) $\vec{a}(5;0;4)$ и $\vec{b}(3;4;-3)$	а) $\vec{a}(4;1;2)$ и $\vec{b}(-4;0;-5)$ б) $\vec{a}(-3;4;0)$ и $\vec{b}(5;-1;7)$ в) $\vec{a}(5;0;2)$ и $\vec{b}(6;4;-3)$
13 вариант	**14 вариант**	**15 вариант**
а) $\vec{a}(6;-1;3)$ и $\vec{b}(0;-2;5)$ б) $\vec{a}(-5;0;3)$ и $\vec{b}(2;7;4)$ в) $\vec{a}(5;-1;4)$ и $\vec{b}(0;3;-3)$	а) $\vec{a}(-2;-1;1)$ и $\vec{b}(6;2;-5)$ б) $\vec{a}(-3;4;-3)$ и $\vec{b}(4;1;4)$ в) $\vec{a}(-3;0;7)$ и $\vec{b}(5;-4;2)$	а) $\vec{a}(5;-4;2)$ и $\vec{b}(2;-3;5)$ б) $\vec{a}(-4;4;-3)$ и $\vec{b}(1;-1;4)$ в) $\vec{a}(5;0;4)$ и $\vec{b}(2;4;-2)$
16 вариант	**17 вариант**	**18 вариант**
а) $\vec{a}(5;-1;2)$ и $\vec{b}(0;-7;5)$ б) $\vec{a}(-2;1;3)$ и $\vec{b}(7;1;1)$ в) $\vec{a}(-2;0;4)$ и $\vec{b}(3;2;-5)$	а) $\vec{a}(2;-1;9)$ и $\vec{b}(6;-2;1)$ б) $\vec{a}(-5;4;0)$ и $\vec{b}(-2;3;7)$ в) $\vec{a}(7;0;1)$ и $\vec{b}(2;4;-2)$	а) $\vec{a}(1;-1;2)$ и $\vec{b}(6;-2;4)$ б) $\vec{a}(-5;0;3)$ и $\vec{b}(2;-1;4)$ в) $\vec{a}(2;0;4)$ и $\vec{b}(5;-4;3)$
19 вариант	**20 вариант**	**21 вариант**
а) $\vec{a}(4;1;-2)$ и $\vec{b}(-3;2;5)$ б) $\vec{a}(-1;0;3)$ и $\vec{b}(2;7;4)$ в) $\vec{a}(2;0;-4)$ и $\vec{b}(1;-1;3)$	а) $\vec{a}(5;-2;0)$ и $\vec{b}(1;-2;4)$ б) $\vec{a}(-3;5;3)$ и $\vec{b}(2;0;-4)$ в) $\vec{a}(3;0;-4)$ и $\vec{b}(4;-4;1)$	а) $\vec{a}(7;-1;2)$ и $\vec{b}(2;2;-5)$ б) $\vec{a}(-3;1;3)$ и $\vec{b}(2;6;0)$ в) $\vec{a}(8;0;1)$ и $\vec{b}(3;-4;1)$
22 вариант	**23 вариант**	**24 вариант**
а) $\vec{a}(2;-1;2)$ и $\vec{b}(5;-2;0)$ б) $\vec{a}(-1;1;3)$ и $\vec{b}(2;-4;4)$ в) $\vec{a}(2;0;-4)$ и $\vec{b}(7;2;-3)$	а) $\vec{a}(5;-1;2)$ и $\vec{b}(1;-3;5)$ б) $\vec{a}(-4;5;3)$ и $\vec{b}(6;0;4)$ в) $\vec{a}(4;0;-3)$ и $\vec{b}(-2;-3;1)$	а) $\vec{a}(9;-1;2)$ и $\vec{b}(1;-2;4)$ б) $\vec{a}(-6;1;3)$ и $\vec{b}(2;7;3)$ в) $\vec{a}(4;-1;3)$ и $\vec{b}(3;4;-3)$
25 вариант	**26 вариант**	**27 вариант**
а) $\vec{a}(4;-1;1)$ и $\vec{b}(2;-1;5)$ б) $\vec{a}(-4;1;3)$ и $\vec{b}(2;3;4)$ в) $\vec{a}(7;0;-1)$ и $\vec{b}(3;-4;3)$	а) $\vec{a}(5;1;-5)$ и $\vec{b}(-1;2;1)$ б) $\vec{a}(5;4;-3)$ и $\vec{b}(2;0;4)$ в) $\vec{a}(1;0;4)$ и $\vec{b}(3;-4;4)$	а) $\vec{a}(5;-1;3)$ и $\vec{b}(2;-1;5)$ б) $\vec{a}(-5;1;-3)$ и $\vec{b}(2;7;0)$ в) $\vec{a}(-4;0;4)$ и $\vec{b}(-3;1;3)$

Практическая работа №34:
Сложение и умножение вектора на число

Цель:
сформировать у студентов умение находить координаты вектора;
производить действия над векторами (сложение, вычитание, умножение вектора на число), вычислять скалярное произведение; вычислять угол между векторами; находить проекцию вектора на ось.

При выполнении практической работы студент должен знать:
- определения: вектора, модуль вектора, равные вектора;
- правила работы с векторами;
- условия перпендикулярности и коллинеарности векторов;
- скалярного произведения векторов.

Студент должен уметь:
- находить координаты вектора
- вычислять скалярное произведение;
- находить угол между векторами;
- находить проекцию вектора на ось.

Порядок выполнения работы:
1.Изучить теоретический материал по теме «Вектора в пространстве».
2.Рассмотреть примеры решения типовых заданий.
3. Ответить на контрольные вопросы.
4. Выполнить самостоятельную работу.

5. Сдать отчет по проделанной работе.

Теоретическая часть :

Пусть в трехмерном пространстве заданы векторы $\overline{a}\{x_1;y_1;z_1\},\overline{b}\{x_2;y_2;z_2\},\overline{c}\{x_3;y_3;z_3\}$ своими координатами.

1). ***Сложение*** двух векторов производится поэлементно, то есть если $\overline{c}=\overline{a}+\overline{b}$, то в координатной форме записывается:

$$c\{x_3;y_3;z_3\}=\{x_1;y_1;z_1\}+\{x_2;y_2;z_2\}=\{x_1+x_2;y_1+y_2;z_1+z_2\}$$

2) Умножение вектора на число.

В случае n-мерного пространства произведение вектора a = {a_1 ; a_2; ... ; a_n} и числа k можно найти воспользовавшись следующей формулой:

k · a = {k · a_1; k · a_2; ... ; k · a_n}

Пример 1. Найти произведение вектора $\boxed{a}$ = {1; 2} на 3.

Решение: 3 · $\boxed{a}$ = {3 · 1; 3 · 2} = {3; 6}.

3). Координаты вектора.

Вектор AB заданный координатами точек A(A_x ; A_y ; A_z) и B(B_x ; B_y ; B_z) можно найти воспользовавшись следующей формулой

AB = {B_x - A_x ; B_y - A_y ; B_z - A_z}

Пример 2. Найти координаты вектора AB, если A(1; 4; 5), B(3; 1; 1).

Решение: AB = {3 - 1; 1 - 4; 1 - 5} = {2; -3; -4}.

4)Длина вектора.

Если даны две точки пространства $A(x_1;y_1;z_1)$ и $B(x_2;y_2;z_2)$, то **длину** отрезка AB можно вычислить по формуле $|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

Пример 3

Даны точки $A(-3;5)$ и $B(1;-3)$. Найти длину отрезка AB.

Решение: по соответствующей формуле:

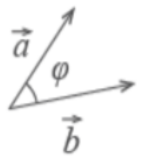
$$|AB|=\sqrt{(1-(-3))^2+(-3-5)^2}=\sqrt{4^2+(-8)^2}=\sqrt{16+64}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$$

Ответ: $|AB|=4\sqrt{5}$ ед. $\approx 8{,}94$ ед.

5. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением векторов называется произведение длин векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a}\bullet\vec{b} = |\vec{a}|\bullet|\vec{b}|\bullet\cos\varphi$$



6. Из формулы для скалярного произведения можно найти **угол между векторами:**

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{|\vec{a}|\bullet|\vec{b}|}=\frac{x_a\bullet x_b+y_a\bullet y_b}{\sqrt{x_a^2+y_a^2}\bullet\sqrt{x_b^2+y_b^2}}$$

b

6. Из формулы для скалярного произведения можно найти **угол между векторами:**

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \bullet |\vec{b}|} = \frac{x_a \bullet x_b + y_a \bullet y_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2} \ \bullet \ \sqrt{x_b^2 + y_b^2}}$$

Пример 4. Найти угол между векторами a = {3; 4; 0} и b = {4; 4; 2}.

Решение: Найдем скалярное произведение векторов:

$a \cdot b = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 0 \cdot 2 = 12 + 16 + 0 = 28.$

Найдем модули векторов:

$|a| = \sqrt{}3^2 + 4^2 + 0^2 = \sqrt{}9 + 16 = \sqrt{}25 = 5$

$|b| = \sqrt{}4^2 + 4^2 + 2^2 = \sqrt{}16 + 16 + 4 = \sqrt{}36 = 6$

Найдем угол между векторами:

$$\cos\alpha = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} = \frac{28}{5 \cdot 6} = \frac{14}{15}$$

Практическая часть:

Вариант 1

№ п/п	**Название операции**	**Формулы**
1	**Найти сумму векторов**	$\vec{a}\{1;-2;3\}$, $\vec{b}\{4;0;-1\}$ $\vec{a}+\vec{b}\{x_1+x_2\ ;\ y_1+y_2\ ;\ z_1+z_2\}$
2	**Найти разность векторов**	$\vec{a}\{4;1;-3\}$, $\vec{b}\{0;-5;2\}$ $\vec{a}-\vec{b}\{x_1-x_2\ ;\ y_1-y_2\ ;\ z_1-z_2\}$
3	**Найти произведение вектора на число**	$\vec{a}\{-1;3;1\}$, δ – число $\delta = -3$ $\delta\vec{a}\{\delta \cdot x;\ \delta y\ ;\delta z\}$
4	**Вычислить координаты середины отрезка**	**Точка A**$(1;2;-3)$**. Точка B (-3;4;-1) .Точка C-**

		середина отрезка АВ. С(x_c $y_c; z_c$) $x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}$ $y_c = \frac{y_1 + y_2}{2}$; $z_c = \frac{z_1 + z_2}{2}$.
5	Найти координаты вектора	Точка А $(5;0;-3)$. ТочкаВ (-1;4;-7) Находим координаты вектора $\overrightarrow{AB}$. Из координат конца вычислить координаты начала вектора $\overrightarrow{AB}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$
6	Найти длину вектора	$\vec{a}\{3,-2,0\}$ $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
7	Вычислить скалярное произведение векторов	$\vec{a}\{-2;3;7\}$, $\vec{b}\{-9;0;2\}$ $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$
8	Найти косинус угла между векторами	$\vec{a}\{2;0;1\}$, $\vec{b}\{-3;1;2\}$ $\cos\alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$
9	При каких значениях m и n векторы коллинеарны?	$\vec{a}\{m;3;1\}$, $\vec{b}\{1;n;2\}$ $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = k$
10	Проверьте перпендикулярность векторов	$\vec{a}\{-4;0;1\}$, $\vec{b}\{2;7;8\}$ $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0$ - условие перпендикулярности векторов

Вариант 2

№ п/п	Название операции	Формулы
1	Найти сумму векторов	$\vec{a}\{2;-3;4\}$, $\vec{b}\{-1;2;0\}$ $\vec{a}+\vec{b}\{x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2\}$
2	Найти разность векторов	$\vec{a}\{4;-5;7\}$, $\vec{b}\{3;-1;2\}$ $\vec{a}-\vec{b}\{x_1 - x_2;\ y_1 - y_2;\ z_1 - z_2\}$
3	Найти произведение вектора на число	$\vec{a}\{-2;4;0\}$, δ – число $\delta = -4$ $\delta\vec{a}\{\delta \cdot x; \delta y; \delta z\}$
4	Вычислить координаты середины отрезка	Точка А $(-3;1;2)$ ТочкаВ (2;-3;1) Точка С-середина отрезка АВ. С(x_c, y_c, z_c) $x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_c = \frac{y_1 + y_2}{2}$, $z_c = \frac{z_1 + z_2}{2}$.

5	**Найти координаты вектора**	**Точка А$(6;-3;4)$. ТочкаВ $(1;-4;7)$. Находим координаты вектора $\overrightarrow{AB}$. Из координат конца вычислить координаты начала вектора $\overrightarrow{AB}\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}$**
6	**Найти длину вектора**	$\vec{a}\{0,2,-2\}$ $\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
7	**Вычислить скалярное произведение векторов**	$\vec{a}\{-3;2;9\}$, $\vec{b}\{-7;0;3\}$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2$
8	**Найти косинус угла между векторами**	$\vec{a}\{4;1;0\}$, $\vec{b}\{-5;3;1\}$ $\cos\alpha=\dfrac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$
9	**При каких значениях m и n векторы коллинеарны?**	$\vec{a}\{m;5;3\}$, $\vec{b}\{2;n;4\}$ $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}=k$
10	**Проверьте перпендикулярность векторов**	$\vec{a}\{0;-3;2\}$, $\vec{b}\{9;4;6\}$ $x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2=0$ **- условие перпендикулярности векторов**

Критерий оценки: «5» - 9-10 заданий; «4» -7-8 заданий; «3» -5-6 заданий

Практическая работа №35:
Разложение вектора. Понятие компланарности

Цель: уметь применять основные определения и теоремы по теме «Разложение вектора по трем некомпланарным векторам» при обосновании этапов решения задач; уметь выполнять чертежи по условию задачи, понимать чертежи, находить на чертежах векторы, уметь раскладывать вектор по данным векторам, используя правило параллелепипеда, параллелограмма, треугольника, знать определение коллинеарных и компланарных векторов.

Оборудование: тетрадь для практических работ, ручка, простой карандаш, линейка, методические рекомендации по выполнению работы.

Методические рекомендации по выполнению практической работы:

Задание №1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром m. Точка К – середина ребра B_1C_1. Разложить вектор $\overrightarrow{AK}$ по векторам $\vec{a}=\overrightarrow{AB},\vec{b}=\overrightarrow{AD},\vec{c}=\overrightarrow{AA_1}$.

Решение: построим заданный куб (рис. 1).

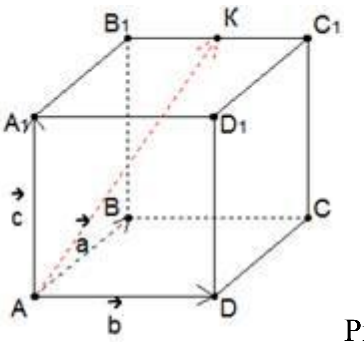


Рис. 1.

Векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ задается плоскость квадрата ABCD. Третий вектор $\vec{c}$ не лежит в этой плоскости, отсюда заключаем, что три заданных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ некомпланарны, и мы можем выразить через них искомый вектор $\overrightarrow{AK}$. Найдем вектор $\overrightarrow{AK}$ по правилу многоугольника. $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1K}$. Вектор $\overrightarrow{AA_1}$ мы по условию обозначили как вектор $\vec{c}$. Вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ согласно свойствам куба равен вектору $\overrightarrow{AB}$, обозначенному за вектор $\vec{a}$.

Вектор $\overrightarrow{B_1K}$ составляет половину вектора $\overrightarrow{B_1C_1}$, так как точка К – середина ребра B_1C_1 по условию: $\overrightarrow{B_1K} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B_1C_1}$. Вектор $\overrightarrow{B_1C_1}$, согласно свойствам куба, равен вектору $\overrightarrow{AD}$, обозначенному как вектор $\vec{b}$. Имеем: $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1K} = \vec{c} + \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

Так, заданный вектор выражен через три некомпланарных вектора. Осталось найти его длину.

Задание №2. Задан треугольник ABC. Точка M – точка пересечения медиан. Точка O – произвольная точка пространства. Разложить вектор $\overrightarrow{OM}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$. (рис. 1)

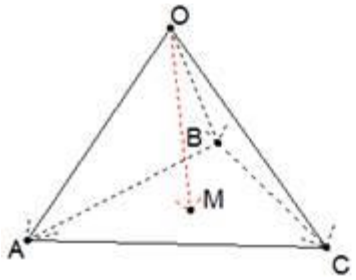


Рис. 2.

Согласно правилу треугольника $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \vec{a} + \overrightarrow{AM}$.

Продлим отрезок AM до пересечения со стороной BC треугольника (рисунок 3), получим точку A_1 – середину этой стороны (точка M по условию точка пересечения медиан треугольника). Кроме того, вспомним свойство медиан треугольника: медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая рассекает их в отношении 2:1, считая от вершины. Так, имеем: $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$

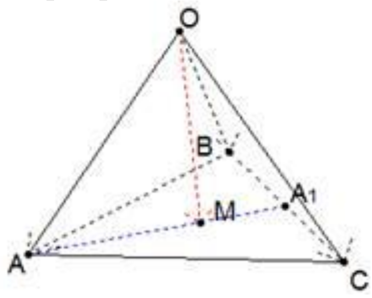


Рис. 3. Дополнительное построение к задаче 2

Снова применим правило треугольника: $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1})$

$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

$\overrightarrow{BA_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b})$

$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\left(\vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b})\right) = \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c}$

$\overrightarrow{OM} = \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

Задания для самостоятельной работы:

Вариант №1

Задание №1. Дан $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед. Точки К и Т – середины ребер ВС и D_1C_1 соответственно. Разложите векторы: а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AK}$; в) $\overrightarrow{CT}$; г) $\overrightarrow{CA_1}$; д) $\overrightarrow{DK}$; е) $\overrightarrow{BT}$; ж) $\overrightarrow{A_1K}$
по векторам $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CC_1}$.

Задание №2. Дан ABCD – тетраэдр. Точка М – точка пересечения медиан треугольника АВС, причем $\overrightarrow{DA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{c}$. Разложите векторы:

а) $\overrightarrow{DM}$; б) $\overrightarrow{AB}$; в) $\overrightarrow{AM}$

по векторам: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Вариант №2

Задание №1. Дан $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед. Причем АК:КВ=3:2, $A_1T: TD_1$=1:4. Разложите векторы: а) $\overrightarrow{AK}$; б) $\overrightarrow{AT}$; в) $\overrightarrow{AC}$; г) $\overrightarrow{DT}$; д) $\overrightarrow{DK}$; е) $\overrightarrow{AC_1}$; ж) $\overrightarrow{KT}$
по векторам $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1}$.

Задание №2. Дан ABCD – тетраэдр. Точка Т – середина ребра СВ, Н - точка пересечения медиан треугольника АВС. Разложите векторы:

а) $\overrightarrow{DT}$; б) $\overrightarrow{AT}$; в) $\overrightarrow{CH}$

по векторам: $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}$.

Контрольные вопросы (ответьте письменно)**:**

1. Дайте определение вектора.
2. Дайте определение нулевого вектора.
3. Дайте определение длины вектора.
4. Дайте определение коллинеарных векторов.
5. Сформулируйте правило треугольника для сложения векторов.
6. Сформулируйте правило параллелограмма для сложения векторов.
7. Дайте определение разности векторов.
8. Дайте определение умножении я вектора на число.
9. Дайте определение компланарных векторов.
10. Сформулируйте признак компланарности трех векторов.
11. Сформулируйте правило параллелепипеда.
12. Сформулируйте теорему о разложении вектора по трем некомпланарным векторам.

Практическая работа №36:

Декартовы координаты в пространстве. Координаты вектора, расстояние между точками, координаты середины отрезка

Цель: Закрепить понятие декартовы координаты в пространстве, отработать навыки работы с формулами расстояния между точками, координатами середины отрезка

Теоретическая часть:

Координаты на плоскости и в пространстве можно вводить бесконечным числом различных способов.

Решая геометрическую, физическую, химическую задачу можно использовать различные координатные системы: прямоугольную, полярную, цилиндрическую, сферическую. (Показ моделей кристаллической решётки поваренной соли)

В общеобразовательном курсе изучается прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве. Иначе её называют Декартовой системой координат по имени французского ученого философа Рене Декарта (1596 – 1650) впервые введшего координаты в геометрию.

Рене Декарт родился в 1596 г. в городе Лаэ на юге Франции, в дворянской семье. Отец хотел сделать из Рене офицера. Для этого в 1613 г. он отправил Рене в Париж. Много лет пришлось Декарту пробыть в армии, участвовать в военных походах в Голландии, Германии, Венгрии, Чехии, Италии, в осаде крепости гугенотов Ла-Рошали. Но Рене интересовала философия, физика и математика. Вскоре по приезде в Париж он познакомился с учеником Виета, видным математиком того времени — Мерсеном, а затем и с другими математиками Франции. Будучи в армии, Декарт все свое свободное время отдавал занятиям математикой. Он изучил алгебру немецких, математику французских и греческих ученых.

После взятия Ла-Рошали в 1628 г. Декарт уходит из армии. Он ведет уединенный образ жизни с тем, чтобы реализовать намеченные обширные планы научных работ.

Философские взгляды Декарта не соответствовали требованиям католической церкви. Поэтому он переселился в Голландию, где прожил 20 лет, с 1629 по 1649 г., но из-за гонений протестантской церкви в 1649 г. переехал в Стокгольм. Но суровый северный климат Швеции оказался для Декарта губительным, и он умер от простуды в 1650 г.

Декарт был крупнейшим философом и математиком своего времени. В основе его философии лежал материализм. Самым известным трудом Декарта является его “Геометрия”. Декарт ввел систему координат, которой пользуются все и в настоящее время. Он установил соответствие между числами и отрезками прямой и таким образом ввел алгебраический метод в геометрию. Эти открытия Декарта дали огромный толчок развитию как геометрии, так и другим разделам математики, оптики. Появилась возможность изображать зависимость величин графически на координатной плоскости, числа - отрезками и выполнять арифметические действия над отрезками и другими геометрическими величинами, а также различными функциями. Это был совершенно новый метод, отличавшийся красотой, изяществом и простотой.

Сегодня на уроке мы продолжим изучение декартовой системы координат, и покажем, что координаты в пространстве вводятся также просто, как и координаты на плоскости.

В своё время Рене Декарт сказал: “… потомки будут благодарны мне не только за то, что я сказал, но и за то, что я не сказал и тем самым дал им возможность и удовольствие додуматься до этого самостоятельно”. Я предоставлю вам возможность и удовольствие разобраться с декартовой системой координат самостоятельно.

Определение 1. Если через точку пространства проведены 3 попарно перпендикулярные прямые, на каждой из них выбрано направление и выбрана единица измерения отрезков, то говорят, что задана прямоугольная система координат в пространстве.

Определение 2. Прямые с выбранными на них направлениями называются осями координат, а их общая точка – началом координат. Она обозначается буквой О. Оси координат обозначаются так: Ох, Оу. Их называют: ось абсцисс, ось ординат, ось аппликат. Вся система обозначается Охуz.

Определение 3. Три плоскости, проходящие соответственно через оси координат Ох и Оу, Оу и Оz, Оz и Ох - координатные плоскости. Их обозначают Оху, Оуz, Оzх.

Точка О разделяет каждую из осей координат на 2 луча, один из них – положительная полуось, другой – отрицательная полуось.

Определение 4. В прямоугольной системе координат каждой точке М пространства сопоставляется тройка чисел, которые называются её координатами.

Проведем через точку М три плоскости, перепендикулярные к осям координат, и обозначим через М1, М2 и М3, точки пересечения этих плоскостей соответственно с осями абсцисс, ординат и аппликат. М1 – абсцисса, М2 – ордината, М3 – аппликата точки М. Координаты точки М записываются: М (х; у; z), х – абсцисса, у – ордината.

Практическая работа

1. Сформулируйте отличие декартовой системы координат на плоскости и в пространстве
2. Назовите оси координат на плоскости? Назовите оси координат в пространстве? Название, какой оси мы не изучали? (Знакомство с новым словом “аппликата”)
4. Какие плоскости рассматриваются в планиметрии (в пространстве)?
5. Назовите координату начала координат на плоскости (в пространстве)?
6. Какие еще компоненты должна иметь система координат на плоскости и в пространстве?
7. Как задается координата точки на плоскости и в пространстве?

На плоскости	В пространстве
2 оси, ОУ- ось ординат, ОХ- ось абсцисс	3 оси, ОХ - ось абсцисс, ОУ – ось ординат, ОZ - ось аппликат.
ОХ перпендикулярна ОУ	ОХ перпендикулярна ОУ, ОХ перпендикулярна ОZ , ОУ перпендикулярна ОZ.
(О;О)	(О;О;О)
Направление, единичный отрезок	Направление, единичный отрезок
Расстояние между точками. $d = \sqrt{(x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2}$	Расстояние между точками. d = v (x2 - x1)? + (y2 - y1)? + (z2 – z1)?
Координаты середины отрезка. $x = \frac{x1 + x2}{2}$; $y = \frac{y1 + y2}{2}$	Координаты середины отрезка $x = \frac{x1 + x2}{2}$; $y = \frac{y1 + y2}{2}$; $z = \frac{z1 - z2}{2}$

1. Какая из точек А(0,3,6), В(-1,5,0), С(-2,0,-7), К(0,0,6) лежит в плоскости Оху?
2. Какая из точек А(0,3,6), В(-1,0,0), С(-2,0,-7), К(0,0,6) лежит в плоскости Оуz?
3. Какая из точек А(0,3,6), В(-1,0,0), С(-2,0,-7), К(0,0,6) лежит на оси z?
4. Построить точку с заданными координатами А (2; - 3).
5. Построить точку с заданными координатами А (1; 2; 3).
6. Найти длину отрезка:

А (1;2;3;) и В (-1; 0; 5)

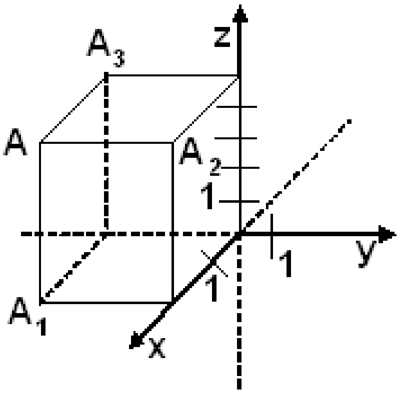
A (1;2;3) и B (x; 2 ;-3)

7. Найдите координаты точки M - середины отрезка

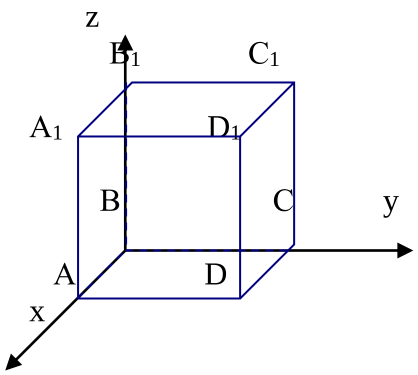
A(2;3;2), B (0;2;4) и C (4;1;0)

AC, AB

A1(2;-3;0),A2(2;0;5),A3(0;-3;5).



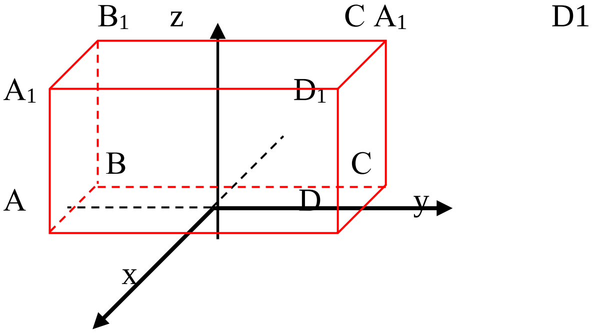
8. Дан куб с ребром, равным 4. Определите координаты его вершин.



Ответы:

A (4;0;0)	A_1 (4;0;4)
B (0;0;0)	B_1 (0;0;4)
C (0;4;0)	C_1 (0;4;4)
D (4;4;0)	D_1 (4;4;4)

9. Дан прямоугольный параллелепипед, измерения которого равны 6;4;4. Определите координаты его вершин.



Ответы:

A (2;-3;0)	A_1 (2;-3;4)
B (-2;-3;0)	B_1 (-2;-3;0)
C (-2;3;0)	C_1 (-2;3;4)
D (2;3;0)	D_1 (2;3;4)

Практическая работа №37: Угол между векторами. Скалярное произведение
Цель: научиться находить координаты вектора, скалярное произведение векторов, угол между векторами.

	На плоскости	В пространстве
Чертеж		
Оси координат		
Плоскости		
Начало координат		
Дополнительные критерии		
Координаты точки		
Расстояние между точками.		
Координаты середины отрезка.		

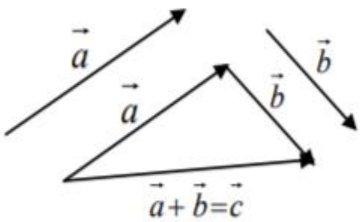
Вектором называется направленный отрезок прямой.

Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначается $\vec{AB}$. Для обозначения векторов употребляются также строчные латинские буквы: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x} \ldots$.

Два вектора называются ***коллинеарными***, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Коллинеарные векторы, направленные в одну сторону, называются ***сонаправленными***. Коллинеарные векторы, направленные в противоположные стороны, - ***противоположно направленными***.

Два вектора называются ***равными***, если они сонаправлены и равны по модулю.

Сложение векторов. Для того чтобы построить сумму двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, нужно выбрать произвольную точку А и отложить от неё вектор $\vec{AB} = \vec{a}$, а затем от точки В отложить вектор $\vec{BC} = \vec{b}$. Тогда вектор $\vec{AC}$ является искомой суммой: $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.



Координаты вектора $\vec{AB}$с началом в точке $A(x_1;y_1;z_1)$ и концом в точке $B\ (x_2;y_2;z_2)$ равны $(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$.

Длина вектора $\vec{AB}$ вычисляется по формуле:

$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

Суммой векторов $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ и $\vec{b}(b_1;b_2;b_3)$ называется вектор $\vec{c}$ с координатами $(a_1+b_1;a_2+b_2;a_3+b_3)$.

Произведением вектора $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ на число λ называется вектор $\lambda\vec{a}(\lambda a_1;\lambda a_2;\lambda a_3)$.

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется произведение длин этих векторов на косинус угла между ними. Если хотя бы один из векторов нулевой, то их скалярное произведение равно нулю.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi,$$

где φ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Свойства скалярного произведения векторов:

- переместительное свойство: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;

- сочетательное свойство: $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k(\vec{b}\cdot\vec{a})$;

- распределительное свойство: $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.

Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений одноименных координат этих векторов:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

Формула для вычисления угла между векторами:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}.$$

Эта же формула в координатах:

$$\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

Практическая часть

Вариант 1

1. Дан $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед. Найти $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1} + \vec{CD}$.

2. Найти координаты вектора $0{,}3\vec{a} - 0{,}6\vec{b} + 0{,}2\vec{c} - 5\vec{d}$, если $\vec{a}(-1;2;4)$, $\vec{b}(0;5;3)$, $\vec{c}(3;3;3)$, $\vec{d}(1;1;4)$.

3. Даны точки $A(1;\ 3;\ 0)$, $B(2;\ 3;\ -1)$ и $C(1;\ 2;\ -1)$. Вычислите угол между векторами $\vec{CA}$ и $\vec{CB}$.

4. Известно, что $\widehat{\vec{a}\,\vec{c}} = \widehat{\vec{b}\,\vec{c}} = 30^\circ$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = |\vec{c}| = 3$. Вычислите $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c}$.

Вариант 2

1. Дана $ABCA_1B_1C_1$ – призма. Найти $\vec{AB} - \vec{AC_1} - \vec{BB_1}$.

2. Найти координаты вектора $0{,}5\vec{a} + 0{,}1\vec{b} + 0{,}3\vec{c} - 6\vec{d}$, если $\vec{a}(5;-1;-1)$, $\vec{b}(-1;1;1)$, $\vec{c}(0;2;-2)$, $\vec{d}(-3;2;0)$.

3. Даны точки $A(5;\ 0;\ 0)$, $B(1;\ 1;\ 1)$ и $C(3;\ -1;\ 2)$. Вычислите угол между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$.

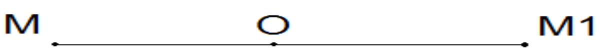
4. Известно, что $\widehat{\vec{a}\,\vec{c}} = \widehat{\vec{b}\,\vec{c}} = 45^\circ$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = |\vec{c}| = 6$. Вычислите $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c}$.

Практическая работа №38:
Отображения пространства на себя. Виды движения

Цель работы: сформировать умения решать задачи на движение

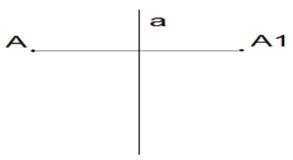
Теоретические сведения к практической работе:
При решении задач на движение пространства, надо знать виды движения. Это центральная симметрия, осевая симметрия, зеркальная симметрия и параллельный перенос.

Центральная симметрия: Точки M и M_1 называются симметричными относительно т O (центр симметрии), если O – середина отрезка MM_1. Точка O считается симметричной самой себе.

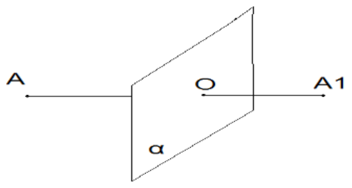


т. M и т.M_1 симметричны относительно т.O.
т. O – центр симметрии
т.O – середина отрезка MM_1
т.O отображается сама на себя

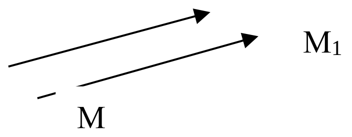
Осевая симметрия: Точки A и A_1 называются симметричными относительно прямой *a* (ось симметрии), если прямая *a* проходит через середину отрезка AA_1 и перпендикулярна к этому отрезку. Каждая точка прямой *a* считается симметричной самой себе.



Зеркальная симметрия: Точки AA_1 называются симметричными относительно плоскости α(плоскость симметрии), если плоскость α проходит через середину отрезка AA_1 и перпендикулярна к этому отрезку. Каждая точка плоскости считается симметричной самой себе.



Параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{p}$ называется отображение пространства на себя, при котором любая точка M переходит в точку M_1 , что $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{p}$



Задания для самостоятельного решения

1 вариант.

1. При зеркальной симметрии прямая a отображается на прямую a_1 . Докажите, что прямые a и a_1 лежат в одной плоскости (прямые a и a_1 параллельны).
2. При зеркальной симметрии относительно плоскости α плоскость β отображается на плоскость β_1 . Докажите, что если $\beta \parallel \alpha$, то $\beta_1 \parallel \alpha$.
3. Докажите, что при параллельном переносе на вектор p, где $p \neq 0$, прямая , не параллельная вектору p и не содержащая этот вектор, отображается на параллельную ей прямую.

2 вариант.

1. При зеркальной симметрии прямая a отображается на прямую a_1 . Докажите, что прямые a и a_1 лежат в одной плоскости (прямые a и a_1 пересекаются).
2. При зеркальной симметрии относительно плоскости α плоскость β отображается на плоскость β_1 . Докажите, что если β перпендикулярна α , то β_1 совпадает с β.
3. Докажите, что при параллельном переносе на вектор p, где $p \neq 0$, прямая , параллельная вектору p или содержащая этот вектор, отображается на себя.

Контрольные вопросы:

1. Что такое центральная симметрия?
2. Что такое осевая симметрия?
3. Что такое зеркальная симметрия?

Практическая работа №39: Координатная плоскость. Вычисление расстояний и площадей на плоскости. Количественные расчёты

Цель: закрепить знания и умения по теме «Координатная плоскость»

1) **Координаты вектора** определяются через координаты начала и конца вектора
Координаты начала вектора $A(x_A; y_A; z_A)$, координаты конца вектора $B(x_B; y_B; z_B)$.
Координаты вектора $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$

2) **Угол между векторами** $\overrightarrow{a}(x_a; y_a; z_a)$ и $\overrightarrow{b}(x_b; y_b; z_b)$
определяется с помощью формулы скалярного произведения:
Угол между прямыми, содержащими векторы

3) **Положение плоскости** в пространстве характеризуется **вектором-нормалью** $\vec{n}(A; B; C)$ к плоскости.
Если известны три точки плоскости $K(x_1; y_1; z_1), M(x_2; y_2; z_2), N(x_3; y_3; z_3)$, то по ним можно определить координаты нормали $\vec{n}(A; B; C)$
Для этого необходимо решить систему уравнений, где вместо одной из переменных (обычно D) берут любое число, не равное 0.

Уравнение плоскости задается уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$

4) **Расстояние от точки до плоскости**

Расстояние от точки с координатами x_0, y_0, z_0 до плоскости с нормалью $\vec{n}(A; B; C)$

определяется по формуле $$h = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

5) **Угол между плоскостями** равен углу между нормалями $\vec{n_1}, \vec{n_2}$ к плоскостям:

Угол между плоскостями по определению меньше 90 градусов, это обеспечивается положительным значением косинуса в формуле.

6) **Угол между прямой и плоскостью** определяется с помощью вектора $\vec{a}$, лежащего на прямой и нормалью $\vec{n}$ к плоскости:

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{n}\,\vec{a}|}{|\vec{n}|\,|\vec{a}|}$$

7) **Площадь ортогональной проекции** многоугольника $S_{\Pi P} = S_M \cdot \cos\varphi$, где $S_{\Pi P}$— площадь проекции многоугольника, S_M — площадь многоугольника, $\cos\varphi$— косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции.

Площадь многоугольника находится по площади его проекции $$S_M = \frac{S_{\Pi P}}{\cos\varphi}$$

8) **Уравнение прямой** в пространстве

Если прямая параллельна вектору $\vec{P}(x_P; y_P; z_P)$ и проходит через точку $M(x_M; y_M; z_M)$,

то уравнение прямой задается формулой $$\frac{x - x_M}{x_P} = \frac{y - y_M}{y_P} = \frac{z - z_M}{z_P}$$

ВАРИАНТ №1	ВАРИАНТ №2
1.Начертите куб АВСДА$_1$В$_1$С$_1$Д$_1$. Найдите угол между прямыми 1) АД и ВВ$_1$ 2)ДД$_1$ и В$_1$С; 3)В$_1$С и ДС$_1$ Найдите расстояние между прямыми АА$_1$ и СС$_1$, если ребро куба равно *а.* 2.Через вершину В равнобедренного треугольника АВС проведена прямая *а,* перпендикулярная его плоскости. Найдите расстояние между прямыми *а* и АС, если АВ=АС=10см, ВС=12см. 3.Через точку А окружности с центром О и радиусом 6см проведена прямая *т,* перпендикулярная плоскости окружности, а через точку В окружности – прямая *в,* касательная к окружности. Найдите расстояние между прямыми *в* и *т,* если угол АОВ =120˚. 4.Площадь трапеции равна $48\sqrt{3}$ см^2, а ее ортогональная проекция – равнобокая трапеция с основаниями 4см и 20см и боковой стороной 10см. Найдите угол между плоскостями трапеций.	1.Начертите куб АВСДА$_1$В$_1$С$_1$Д$_1$. Найдите угол между прямыми 1) АВ и СС$_1$ 2)АСи В$_1$С$_1$; 3)АС и ДА$_1$ Найдите расстояние между прямыми ВВ$_1$ и ДД$_1$ если ребро куба равно *а.* 2.Через вершину А треугольника АВС проведена прямая *т*, перпендикулярная его плоскости. Найдите расстояние между прямыми *т* и ВС, если АВ=13см, ВС=14см,АС=15см.. 3.Через точку А окружности проведены хорды АВ и АС. Через точку В проведена прямая *т*, перпендикулярная плоскости окружности, а через точку С прямая *а*-касательная к окружности. Найдите расстояние между прямыми *а* и *т*,если АВ=6см, АС=8см, угол ВАС =60˚. 4. Ортогональной проекцией трапеции является равнобокая трапеция с основаниями 4см и 8см , а диагонали ее взаимно перпендикулярны. Найдите площадь данной трапеции, если угол между ее плоскостью и плоскостью проекции равен 60˚.

Практическая работа №40: **Понятие корня n–й степени из действительного числа**

Цель работы: овладение практическими навыками и закрепление теоретического материала по вычислению корней из чисел и числовых и буквенных выражений.

Студент должен:

знать:

- понятие корня n-ой степени;
- понятие арифметического корня;
- основные свойства корней;

уметь:

- вычислять корень n-ой степени;
- упрощать любые выражения используя свойства корней;

Подготовка к работе:

1. Повторить, что такое арифметический квадратный корень из числа.
2. Свойства арифметического квадратного корня.

Контрольные вопросы:

1. Что такое корень n-ой степени из числа а?
2. Что такое арифметический корень n-ой степени из числа ?
3. Основные свойства корней?
4. Как называют знак корня $\sqrt{}$?

Задание:

Задание	***вариант***	
	1	***2***
1)Вычислите	А)$\sqrt[3]{0{,}125}$ Б)$\sqrt[5]{-\frac{1}{32}}$	$\sqrt[3]{0{,}027}$ $\sqrt[5]{-3\frac{3}{8}}$
2)Решите уравнение	А)$x^3+8=0$ Б)$\sqrt[3]{x-5}=-3$	$x^4-19=0$ $\sqrt[3]{7-4x}=4$
3)Найдите значение числового выражения	а)$\sqrt[3]{24*9}$ *б)*$\sqrt[4]{\frac{16а^4в^8}{с^{12}}}$	*А)*$\sqrt[3]{75*45}$ *Б)*$\sqrt[3]{-\frac{27а^6}{32в^3}}$

4)Внесите множитель под знак корня	А)$2\sqrt{5}$ Б)$2\sqrt[3]{3}$	$5\sqrt{2}$ $3\sqrt[3]{2}$
5)Преобразуйте заданное выражение к виду $\sqrt[n]{A}$	$\sqrt[4]{\frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{3}{4}\sqrt{\frac{4}{3}}}}$	$\sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}}}$
6)Вынесите множитель из под знака корня	$\sqrt[3]{625x^5y^6}$	$\sqrt[5]{-64n^{16}}$

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ К ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЕ:

Корень n-й степени и его свойства.

безусловно, все так или иначе знакомы с интуитивным понятием квадратного корня - это такое число, квадрат которого равен a. аналогично определяется корень n-й степени из числа a, где n - положительное число.
определение. корнем n-й степени из числа a называется такое число, n-я степень которого равна a.

согласно данному определению корень n-й степени из числа a - это решение уравнения $x^n = a.$ число корней этого уравнения зависит от n и от a.

арифметический корень n-й степени. **определение**. арифметическим корнем n-й степени из числа a называют неотрицательное число, n-я степень которого равна a.

арифметический корень обозначают$\sqrt[n]{x}.$ число n называют показателем корня, а само число a - подкоренным выражением. знак корня √ называют радикалом.

основные свойства корней.

Для любого натурального n, целого k и любых неотрицательных чисел a и b выполнены равенства:

1°. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}.$

2°. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b\neq 0).$

3°. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$ $(k>0).$

4°. $\sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k}$ $(k>0).$

5°. $\sqrt[n]{a^k}=(\sqrt[n]{a})^k$ (если $k\leqslant 0$, то $a\neq 0$).

Эти пять свойств с легкостью доказываются из определения корня и степени. при решении задач, связанных с вычислением корней следует активно пользоваться этими свойствами - они сокращают объем вычислений, позволяют упрощать выражения и оказывают другую помощь.

Для любых чисел a и b, таких, что 0≤a<b, выполняется неравенство $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$. проведем доказательство методом от противного. допустим, что $\sqrt[n]{a} \geq \sqrt[n]{b}$. тогда по свойству степеней с натуральным показателем $(\sqrt[n]{a})^n \geq (\sqrt[n]{b})^n$, т.е. a≥b. это противоречит условию a<в.

Практическая работа №41: **Способы упрощения выражений, содержащих радикалы**

Цели:

Образовательная: продолжить формирование у студентов умений применять свойства степеней и корней при преобразовании выражений.

Воспитательная: воспитание самостоятельности, творческого подхода к решению задач.

Развивающая: развитие логического мышления, навыков сравнительного анализа.

Оборудование: доска, компьютер, проектор, экран, записи на доске, плакаты с формулами по теме: «Степени» и «Корни», индивидуальные карточки-задания.

Использование элементов педагогических технологий:

1. сотрудничества;
2. здоровьесберегающих (чередование видов деятельности);
3. информационно-коммуникационных;
4. развивающих;
5. личностно-ориентированных.

Результативность:

формирование компетенций: ценностно-смысловой, учебно-познавательной, коммуникативной, личного самосовершенствования.

План занятия.

1) Подготовительный этап.

1) Проверка усвоения пройденного материала фронтально (или индивидуально) по следующим вопросам (на экран проектируются вопросы, на которые студенты отвечают устно).

1. Что значит возвести число в степень n?
2. Как перемножить две степени с одинаковыми основаниями?
3. Как разделить две степени с одинаковыми основаниями?
4. Как возвести степень в степень?
5. Как извлечь корень из степени?
6. Чему равна нулевая степень числа?
7. Как найти степень с отрицательным показателем?
9. Как найти корень с дробным показателем?
10. Сформулируйте основное свойство корня.
11. Как извлечь корень из произведения?
12. Как извлечь корень из дроби?
13. Как извлечь корень из степени?
14. Как производится умножение корней одинаковой степени?
15. Как производится умножение корней разных степеней?
16. Как производится деление корней одинаковой степени?
17. Как производится возведение корня в степень?

2) Повторить:

свойства корней

1. $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
2. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

свойства степеней

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $a^m : a^n = a^{m-n}$

3. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$
4. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$
5. $\sqrt[nm]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^k}$

3. $(a^m)^n = a^{mn}$
4. $a^n \cdot b^n = (ab)^n$
5. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

2) Теоретический этап.
Применение знаний при решении типовых заданий.
Задание 1. Привести к общему показателю корни:
$\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt{5}$
Задание 2. Сократить показатели корней и подкоренных выражений:
$\sqrt[8]{81x^4y^4}$
Задание 3. Извлечь корень:
$\sqrt{0{,}01 \cdot 81}$; $\sqrt[3]{27 \cdot 8}$
Задание 4. Выполните действия:
$\sqrt{a^3 \cdot \sqrt{b}} : \sqrt{b^{-1} \cdot \sqrt{a^3}}$
*Задание 5.*Вычислите:
$-0{,}2^3 \cdot 0{,}2^{-2} + 64^{\frac{1}{6}} + 5^3 : 5^4 - 1{,}5^0$
3) Практический этап.
Самостоятельное применение умений и знаний.
Провести самостоятельную работу в 15 вариантах.
Примерное содержание одного варианта.
1. Привести к общему показателю корни:
$\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{3}$
2. Сократить показатели корней и подкоренных выражений:
$\sqrt[4]{25x^2y^2}$
3. Извлечь корень:
$\sqrt{25 \cdot 64}$; $\sqrt[n]{a^{3n} \cdot (a-b)^n}$
4. Выполните действия:
а) $0{,}5\sqrt{24} - 3\sqrt{40} - \left(\sqrt{150} + \sqrt{54} - \sqrt{1000}\right)$
б) $\sqrt[4]{7 - \sqrt{33}} \cdot \sqrt[4]{7 + \sqrt{33}}$
5. Вычислите:
$-0{,}5^2 : 0{,}5^3 - 27^{\frac{1}{3}} + 4^4 \cdot 4^{-2} - 0{,}2^0$

Вариант 1

1. Вычислите:

а) $\sqrt[4]{0,0625} - \sqrt[5]{-243}$;

б) $\sqrt[4]{2^3 \cdot 3^5} \cdot \sqrt[4]{2^5 \cdot 3^7}$.

2. Расположите числа в порядке убывания: $\sqrt[3]{31}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt[6]{666}$.

3. Постройте график функции: $y = -\sqrt[3]{x-1} + 3$.

4. Вычислите: $\sqrt{40\sqrt{12}} - 4\sqrt[4]{75}$.

5. Решите уравнение: $\sqrt[3]{x^2 - x - 131} = -5$.

---

6. Найдите значение выражения

$\sqrt{9b^2} - \sqrt[3]{8b^3} - \sqrt[4]{256b^4} + \sqrt[8]{2401}$ при $b = \sqrt{7} - 3$.

---

7. Решите уравнение $\sqrt[3]{81x} + \sqrt[3]{243x^2} = 6$.

Вариант 2

1. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{-0,343} + \sqrt[6]{729}$;

б) $\sqrt[5]{2^7 \cdot 11^3} \cdot \sqrt[5]{2^8 \cdot 11^7}$.

2. Расположите числа в порядке возрастания: $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{11}$.

3. Постройте график функции: $y = -\sqrt[4]{x+3} - 5$.

4. Вычислите: $6\sqrt[4]{75} - 2\sqrt{15\sqrt{27}}$.

5. Решите уравнение: $\sqrt[5]{x^2 - x - 44} = -2$.

---

6. Найдите значение выражения

$\sqrt{25a^2} + \sqrt[3]{64a^3} - \sqrt[4]{16a^4} - \sqrt[6]{676}$ при $a = \sqrt[3]{26} - 3$.

---

7. Решите уравнение $\sqrt[5]{128x^2} = 24 + \sqrt[5]{64x}$.

Практическая работа №42: Понятие степени с рациональным показателем, свойства степеней

Цель: Обобщить и систематизировать знания по теме «Свойства корней и степеней»; закрепить умения использовать полученные знания для преобразования алгебраических выражений

Теоретические сведения к практической работе:

Определение. Степенью числа a>0 с рациональным показателем $r=\frac{m}{n}$, где *m* - целое число, а*n* - натуральное (n>1), называется число $\sqrt[n]{a^m}$, т.е.

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},\ a > 0$ $a^0=1,\ a^{-r} = \frac{1}{a^r}$.

Свойства степени с рациональным показателем.

$a>0,\ b>0,\ p\in \mathbf{Q},\ q\in \mathbf{Q}$

1. $a^p\cdot a^q=a^{p+q}$;
2. $\dfrac{a^p}{a^q}=a^{p-q}$;
3. $(a^p)^q=a^{pq}$;
4. $(ab)^p=a^p\cdot b^p$;
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^p=\dfrac{a^p}{b^p}$.

Задания для самостоятельного решения:

<u>1 вариант</u>

<u>Задание 1.</u> Вычислить

а) $\sqrt[3]{12+4\sqrt{5}}\times\sqrt[3]{12-4\sqrt{5}}$;

б) $(6+\sqrt{27})^{\frac{1}{2}}\times(6-\sqrt{27})^{\frac{1}{2}}$;

в) $(\sqrt{5^3}+\frac{1}{\sqrt{5^3}})\div(\sqrt{5}+\sqrt{\frac{1}{5}})$;

г) $\frac{7-4\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}}+\frac{7+4\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}}$

<u>Задание 2.</u> Упростить выражение и найти его значение

а) $\dfrac{a^{\frac{7}{3}}+a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}}$ при *а = 2*

б) $\dfrac{a^{\frac{5}{3}}c^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{2}{3}}c^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{5}{3}}c^{\frac{5}{3}}}$ при *а=7, с=3*

<u>Задание 3.</u> Избавиться от иррациональности в знаменателе

а) $\frac{5}{2\sqrt{3}}$; б) $\frac{3\sqrt{c}}{\sqrt{c}+\sqrt{b}}$; в) $\frac{5-\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}$; г) $\frac{6}{\sqrt[7]{64}}$ д) $\frac{a^6}{\sqrt[9]{a}}$

<u>2 вариант</u>

<u>Задание 1.</u> Вычислить

а) $\sqrt[5]{10+2\sqrt{17}}\times\sqrt[5]{10-2\sqrt{17}}$;

б) $(12-\sqrt{19})^{\frac{1}{3}}\times(12+\sqrt{19})^{\frac{1}{3}}$;

в) $(\sqrt{7^3}-\frac{1}{\sqrt{7^3}})\div(\sqrt{7}-\sqrt{\frac{1}{7}})$;

г) $\dfrac{8-4\sqrt{3}}{8+4\sqrt{3}}+\dfrac{8+4\sqrt{3}}{8-4\sqrt{3}}$.

<u>Задание 2.</u> Упростить выражение и найти его значение

а) $\dfrac{b^{\frac{5}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{3}{2}}}$ при $b=3$

б) $\dfrac{a^{\frac{7}{5}}c^{\frac{2}{5}}+a^{\frac{2}{5}}c^{\frac{7}{5}}}{a^{\frac{7}{5}}c^{\frac{7}{5}}}$ при $a=9, c=2$

Задание 3. Избавиться от иррациональности в знаменателе

а) $\frac{7}{5\sqrt{3}}$; б) $\frac{5\sqrt{c}}{\sqrt{c}-\sqrt{b}}$; в) $\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$; г) $\frac{12}{\sqrt[7]{81}}$; д) $\frac{a^7}{\sqrt[6]{a}}$

Контрольные вопросы:

1. Что называют степенью с рациональным показателем?
2. Перечислить свойства степени с рациональным показателем.

Практическая работа №43: Свойства степенных функций и их графики

Цель: сформировать навыки исследования свойств степенных функций и построения их графиков в зависимости от показателя; формировать компоненты ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество; ОК 6. Работать в коллективе и в команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями; ОК8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации

Теоретическая часть:

Вы уже знакомы с функциями $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$, $y=1/x$. Все эти функции являются частными случаями СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ, те функции $\mathbf{y = x^p}$.

Свойства степенной функции зависят от свойств степени с действительным показателем, а в частности от того, при каких значениях **x** и **p** имеет смысл степень $\mathbf{x^p}$.

Давайте вспомним определение функции, дадим понятие степенной функции и рассмотрим ее свойства через таблицу.

- **Функция** – это соответствие между двумя множествами такое, что каждому элементу одного множества X ставится в соответствие единственный элемент другого множества Y. Первое множество называют **областью определения функции**, а второе – **областью значений функции**. Обозначают: $D(y)$ и $E(y)$ соответственно.

- **Степенная функция** — это функция вида $\mathbf{y = x^p}$, где p — заданное действительное число.

Необходимые обозначения:

X - область определения функции

Y - область изменения функции

X_0 - нули функции

X_+ - область положительных значений функции

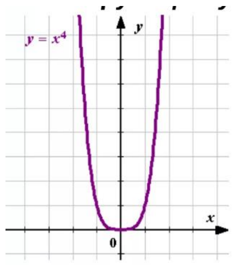
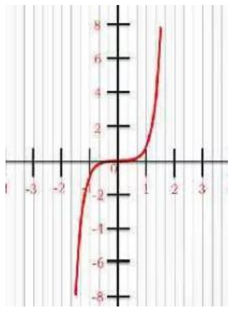
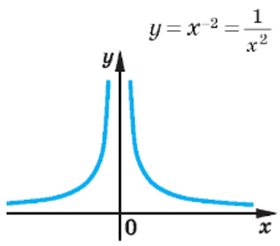
X_- - область отрицательных значений функции

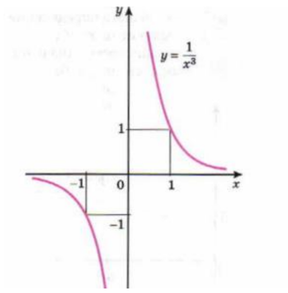
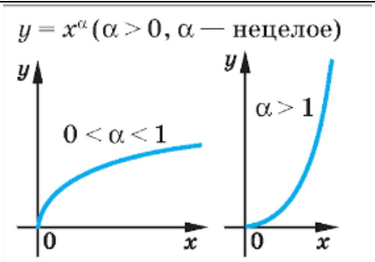
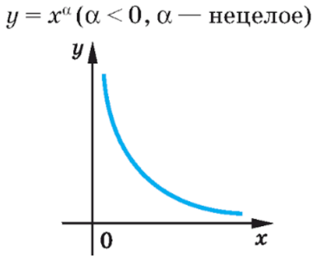
max - точки максимума функции

min - точки минимума функции

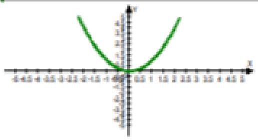
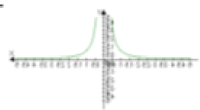
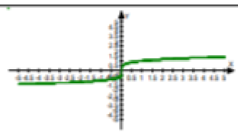
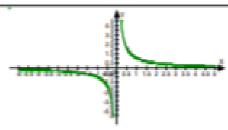
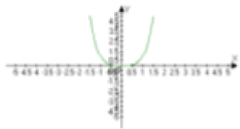
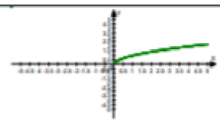
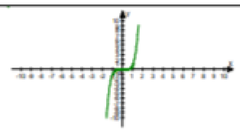
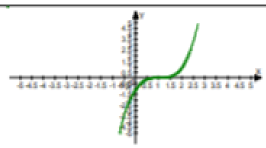
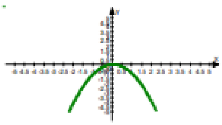
$X\uparrow$ - область возрастания функции

$x \downarrow$ - область убывания функции

Название(P)	*График*	*Свойства*
P=2n (четное натуральное число)	 *парабола*	• область определения — все действительные числа, т. е. множество R; • множество значений — неотрицательные числа, т. е. $y \geq 0$; функция четная; • функция является убывающей на промежутке $x \leq 0$ и возрастающей на промежутке $x \geq 0$. *Пример функции с показателем p = 2n:* $\mathbf{y = x^4}$.
P=2n-1 (нечетное натуральное число)	 *кубическая парабола*	• область определения — множество R; • множество значений — множество R; • функция нечетная; • функция является возрастающей на всей действительной оси. *Пример функции с показателем p = 2n - 1:* $\mathbf{y = x^5}$.
P = -n где **n** — **отрицательное натуральное число:**	 *гипербола*	• область определения — множество R, кроме $x = 0$; • множество значений — положительные числа $y > 0$; • функция четная; • функция является возрастающей на промежутке $x < 0$ и убывающей на промежутке $x > 0$. *Пример* $\mathbf{y = 1/x^2}$.

P = -(2n - 1), где n — нечетное натуральное число:	 *гипербола*	• область определения — множество R, кроме x = 0; • множество значений — множество R, кроме y = 0; • функция нечетная; • функция является убывающей на промежутках x < 0 и x > 0. *Пример* $\mathbf{y = 1/x^3}$.
p — положительная дробь		• множество значений — неотрицательные числа y ≥ 0; • функция является возрастающей на промежутке x ≥ 0. • область определения — неотрицательные числа x ≥ 0; *Пример* $\mathbf{y = x^{4/3}}$.
p — отрицательная дробь		• область определения — положительные числа x > 0; • множество значений — положительные числа y > 0; • функция является убывающей на промежутке x > 0. *Пример:* $\mathbf{y = x^{-1/3}}$.

Сопоставьте графическому изображению степенной функции ее аналитическое выражение. Введите ответ в режиме «Т2» в форме цифра-буква

Аналитическое выражение		Графическое изображение степенных функций	
1	$y = x^3$	А	
2	$y = x^5$	Б	
3	$y = x^2$	В	
4	$y = x^{-2}$	Г	
5	$y = x^4$	Д	
6	$y = \frac{1}{x}$	Е	
7	$y = x^{0,5}$	Ж	
8	$y = -x^2$	и	
9	$y = (x-1)^3$	к	

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Отметка о выполнении									

«+» - правильный ответ

«-» - неверный ответ

Практическая работа №44,45:

Методы решения показательных уравнений и неравенств

Цель работы: Определение типов показательных уравнений и методов их решения, решение простейших показательных неравенств.
Определение. Уравнение вида $a^x = b$, где $a > 0, a \neq 1$, называется *показательным.* Если $b > 0$, *то урвнение имеет единтсвенный корень, если* $b \leq 0$, *то корней нет*.

Способы решения показательных уравнений.

1. Приравнивание показателей.

Суть метода:
1. Уединить слагаемое, содержащее переменную;
2. Привести степени к одному основанию;
3. Приравнять показатели;
4. Решить полученное уравнение;
5. Записать ответ.

Пример:

$3^x - 27 = 0.$

$3^x = 27;$

$3^x = 3^3;$

$x = 3.$

Ответ: $x = 3$.

2. Вынесение общего множителя за скобки.

Примечание: выносим за скобки множитель с меньшим показателем.
Пример:

$3^x - 3^{x+3} = -78.$

$3^x\left(1 - 3^3\right) = -78;$

$3^x(1 - 27) = -78;$

$3^x(-26) = -78;$

$3^x = 3;$

$x = 1.$

Ответ: $x = 1$

3. Введение новой переменной

Как правило, уравнения, решаемые этим способом, сводятся к квадратным.
Пример: $4^{2x} - 5 \cdot 4^x + 4 = 0.$
Пусть $4^x = a$ тогда уравнение можно записать в виде:

$a^2 - 5a + 4 = 0;$

$D = 25 - 16 = 9;$

$a_1 = \frac{5+3}{2} = 4;$

$a_2 = \frac{5-3}{2} = 1.$

Сделаем обратную замену:
$4^x = 4$ или $4^x = 1$;
$x = 1$ или $x = 0$

Ответ: $x = 1$ или $x = 0$

4. Использование однородности

Определение Показательные уравнения вида $a^{f(x)} = b^{f(x)}$ называются однородными.
Суть метода: Так как показательная функция не может принимать значение, равное нулю, и обе части уравнения можно делить на одно и то же не равное нулю число, разделим обе части уравнения, например, на $b^{f(x)}$.
Пример: $2^x = 3^x$
Разделим обе части уравнения на $3^x \neq 0$:

$$\frac{2^x}{3^x} = \frac{3^x}{3^x};$$

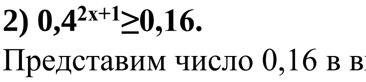
$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1;$$

$$x = 0.$$

Ответ: $x = 0$.
Определение. *Показательным* неравенством называется неравенство, в котором переменная содержится в показателе степени.

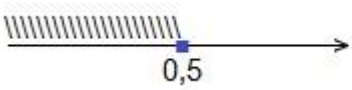
Решение простейших показательных неравенств.

Простейшими считаются показательные неравенства вида: $\mathbf{a^x<a^y}$, $\mathbf{a^x>a^y}$. ($a^x \le a^y$, $a^x \ge a^y$).
Так же, как и при решении простейших показательных уравнений, одинаковые основания степеней опускают, но **знак** нового неравенства **сохраняют**, **если** функция $y=a^x$ является возрастающей **(a>1)**; **если** же показательная функция $y=a^x$ убывает **(0<a<1)**, то
знак нового неравенства **меняют на противоположный**:
$a^x<a^y \to x<y$, если **a>1**; знак сохранен, так как функция возрастает;
$a^x<a^y \to x>y$, если **0<a<1**; функция убывает – знак поменялся;
$a^x>a^y \to x>y$, если **a>1**; знак сохранен, так как функция возрастает
$a^x>a^y \to x<y$, если **0<a<1**; функция убывает – знак поменялся.
Примеры.
Решить неравенство:
1) $\mathbf{4^{5-2x}<0,25}$.
Представим правую часть в виде: $0,25=(^{25}/_{100})=(^{1}/_{4})=4^{-1}$;
$4^{5-2x}<4^{-1}$; функция $y=4^x$ с основанием $4>1$ **возрастает на R**, поэтому, опуская основания степеней, знак неравенства сохраним:
$5-2x<-1$;
— $2x<-1-5$;
— $2x<-6$ |:(-2) при делении обеих частей неравенства на отрицательное число, знак неравенства меняют на противоположный:
$x>3$.



Ответ: $(3; +\infty)$.
2) $\mathbf{0,4^{2x+1} \ge 0,16}$.
Представим число 0,16 в виде степени числа 0,4. Получаем:
$0,4^{2x+1} \ge 0,4^2$; основание степеней – число **0,4** — удовлетворяет условию: **0<0,4<1**; поэтому, опускаем основания степеней, а знак неравенства меняем на противоположный:
$2x+1 \le 2$;

2x≤2-1;
2x≤1 |:2
x≤0,5.



Ответ: (-∞; 0,5].

ВАРИАНТ – I	**ВАРИАНТ – II**
1. Решите уравнения: **а.** $7^{x}=49$ **;** **б.** $8^{x^2-2}=64^{x}$ **;** **в.** $5^{x-4}=1$ **г.** $25^{x}=7^{2x}$ **2. Решите уравнение:** $\left(\frac{16}{9}\right)^{x}=\left(\frac{3}{4}\right)^{5}$ **3. Найдите сумму корней уравнения** $5^{2x}-6\cdot 5^{x}+5=0$ **4. Решите неравенства:** **а.** $2^{x}\geq 4$ **б.** $0{,}6^{x^2+3x}\geq 0{,}6^{0}$ **5. Найдите наибольшее целое решение неравенства** $2^{x}+2^{x+2}\leq 20$	**1. Решите уравнения:** **а.** $2^{4x}=8$ **;** **б.** $9^{x-5}=1$ **;** **в.** $6^{4x^2-2x}=36$ **г.** $27^{x}=5^{3x}$ **2. Решите уравнение:** $\left(\frac{4}{25}\right)^{x+2}=\left(\frac{5}{2}\right)^{6}$ **3. Найдите сумму корней уравнения** $2^{2x}-6\cdot 2^{x}+8=0$ **4. Решите неравенства:** **а.** $2^{x}\leq 8$ **б.** $0{,}3^{x+4}\leq 0{,}3^{2}$ **5. Найдите наименьшее целое решение неравенства** $3^{x}+3^{x+2}\succ 30$

АРИАНТ – III

1. Решите уравнения:

а. $3^{2x} = 81$**;**
б. $4^{3x} = 64^{x^2-6}$**;**
в. $2^{3x+6} = 1$
г. $3^{6x} = 8^{6x}$

2. Решите уравнение:

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{3-2x} = \left(\frac{49}{9}\right)^{-3}$$

3. Найдите сумму корней уравнения

$$3^{2x} - 6\cdot 3^{x} - 27 = 0$$

4. Решите неравенства:

а. $3^{x} \le 81$

б. $0{,}5^{2x+4} \ge 0{,}5^{x-1}$

5. Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$4^{x} + 4^{x+2} \le 68$$

ВАРИАНТ – IV

1. Решите уравнения:

а. $4^{x} = 64$**;**
б. $3^{6-x} = 3^{3x-2}$**;**
в. $3^{x^2-4x} = 1$
г. $4^{x} = 9^{2x}$

2. Решите уравнение:

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{x} = \left(\frac{4}{25}\right)^{2}$$

3. Найдите сумму корней уравнения

$$2\cdot 2^{2x} - 5\cdot 2^{x} + 2 = 0$$

4. Решите неравенства:

а. $5^{x} \succ 125$

б. $0{,}7^{x+8} \le 0{,}7^{2}$

5. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$5^{x} + 5^{x+2} \ge 650$$

ВАРИАНТ – V

1. Решите уравнения:
а. $2^{14-x} = 4$;
б. $8^{x+5} = 1$;
в. $625^{x^2-5x} = 25^{12}$;
г. $7^{3x-10} = 4^{3x-10}$.

2. Решите уравнение:
$5^{2-3x} = \frac{1}{25}$

3. Найдите сумму корней уравнения
$$10\cdot 3^{2x} - 7\cdot 3^{x} - 3 = 0$$

4. Решите неравенства:
а. $4^{x} \le 64$
б. $0{,}3^{2x-1} < 0{,}3^{x+4}$

5. Найдите наибольшее целое решение неравенства
$$6^{x} + 6^{x+2} \le 222$$

ВАРИАНТ – VI

1. Решите уравнения:
а. $3^{x+11} = 9$;
б. $16^{x-4} = 1$;
в. $7^{x^2-9x+22} = 49$;
г. $17^{4x-1} = 22^{4x-1}$.

2. Решите уравнение:
$6^{2-3x} = \frac{1}{36}$

3. Найдите сумму корней уравнения
$$9^{x} - 6\cdot 3^{x} - 27 = 0$$

4. Решите неравенства:
а. $3^{x} > 27$
б. $0{,}9^{2x} \le 0{,}9^{4x-3}$

5. Найдите наименьшее целое решение неравенства
$$8^{x} + 8^{x+1} \le 72$$

Практическая работа №46:

Понятие логарифма. Основное логарифмическое тождество

Цель:

Знать определение логарифма, основное логарифмическое тождество.
Уметь вычислять логарифмы, применять основное логарифмическое тождество.
Уметь вычислять значения выражений содержащих логарифмы, содержащие логарифмы, логарифмировать и потенцировать выражения.

Логарифмом числа b по основания a называется такой показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b.

$$\boldsymbol{\log_a b = x \quad <=> \quad a^x = b}, \text{ где } b>0;\ a>0;\ a\neq 1$$

Примеры: $\log_2 8 = 3$; т.к. $2^3=8$

$\log_5 625 = 4$; т.к. $5^4=625$

$\log_4 16 = 2$; т.к. $4^2=16$

$\log_3 \frac{1}{9} = -2$; т.к. $3^{-2}=\frac{1}{9}$

$\log_5 \frac{1}{5} = -1$; т.к. $5^{-1}=\frac{1}{5}$

$\log_4 \frac{1}{64} = -3$; т.к. $4^{-3}=\frac{1}{64}$

$\log_2 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}$; т.к. $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$

$\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$; т.к $25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$

$\log_{243} 3 = \frac{1}{5}$

$\log_7 7 = 1$; $\quad \log_6 1 = 0$

Пользуясь определением можно записать основное логарифмическое тождество:

$$\boldsymbol{a^{\log_a b} = b}$$

Примеры: $5^{\log_5 3} = 3$

$8^{\log_8 5} = 5$

$3^{-2\log_3 5} = \left(3^{\log_3 5}\right)^{-2} = 5^{-2} = \frac{1}{25}$

$2^{3+\log_2 7} = 2^3 \cdot 2^{\log_2 7} = 8 \cdot 7 = 56$

Практическая часть:

Вариант №1	**Вариант №2**
I уровень 1. Вычислите: а) $\log_3 27 - \log_{\frac{1}{7}} 7$, б) $2^{1+\log_2 5}$ в) $\lg 4 + 2\lg 5$, г) $\log_5 \sqrt{10} - \log_5 \sqrt{2}$ 2. Найдите x: $\log_3 x = 4\log_3 a + 7\log_3 b$	***I уровень*** 1. Вычислите: а) $\log_2 16 - \log_{\frac{1}{3}} 9$, б) $5^{\log_5 9 - 1}$ в) $\log_6 9 + 2\log_6 2$, г) $\lg\sqrt{30} - \lg\sqrt{3}$ 2. Найдите x: $\log_5 x = 2\log_5 a - 3\log_5 b$

3. Прологарифмируйте по основанию 5 выражение: $125a^4 : b^4$.

II уровень

1. Вычислить: а) $\dfrac{\log_2 24 - \frac{1}{2}\log_2 72}{\log_3 18 - \frac{1}{3}\log_3 72}$

б) $36^{\log_6 5} + 10^{1-\lg 2} - 8^{\log_2 3}$

2. Найдите *x*:

$\log_2 x = \frac{1}{2}\log_2 a - \frac{2}{3}\log_2 b - \frac{1}{3}\log_2 b + 5$

3. Прологарифмируйте выражение по основанию *e*: $\dfrac{e^2 \cdot \sqrt[3]{e} \cdot m^4}{\sqrt[4]{n^2 \cdot p^3}}$

4. Упростите выражение:

$\dfrac{\lg b}{\lg a} + \dfrac{2}{\log_a b} - \log_a b^2$

3. Прологарифмируйте по основанию 5: $25a^6b^7$

II уровень

1. Вычислите:

а) $\dfrac{\log_7 14 - \frac{1}{3}\log_7 56}{\log_6 30 - \frac{1}{2}\log_6 150}$,б)

$\left(81^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}\right) \cdot 49^{\log_7 2}$

2. Найдите *x*:

$\log_{\frac{1}{3}} x = 3 - \frac{2}{3}\log_{\frac{1}{3}} a - 8\log_{\frac{1}{3}} b + 2\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{3}} c$

3. Прологарифмируйте выражение по основанию 3: $\dfrac{c^2\sqrt{c}}{243\left(ab^3\right)^{\frac{1}{2}}}$

4. Упростите выражение:

$a^{2\log_a b} - \left(\log_a a^b\right)^2$

Вариант №3

I уровень

1. Вычислите: а) $\log_2 16 + \log_{\frac{1}{5}} 5$, б) $12^{2-\log_{12} 4}$

в) $3\lg 2 + 3\lg 5$, г) $\log_8 \sqrt{80} - \log_5 \sqrt{10}$

2. Найдите *x*: $\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}} a - \frac{1}{5}\log_{\frac{1}{2}} b$

3. Прологарифмируйте по основанию 2 $48a\sqrt{a} \cdot b^4$

II уровень

1. Вычислите: а) $\dfrac{\log_2 4 + \log_2 \sqrt{10}}{\log_2 20 + 3\log_2 2}$

б) $16^{1-\log_4 5} + 4^{\frac{1}{2}\log_2 3 - 3\log_8 5}$

2. Найдите *x*:

$\log_3 x = \frac{2}{3}\log_3 a - 4 + 5\log_3 b - \frac{1}{2}\log_3 b$

3. Прологарифмируйте выражение по основанию *5*: $\dfrac{0{,}04 \cdot \sqrt[3]{a^2b}}{ac^2}$

4. Упростите выражение:

$\dfrac{3}{\log_a b} - \log_b a^2 - \dfrac{\log_3 a}{\log_3 b}$

Вариант №4

I уровень

1. Вычислите: а) $\log_8 64 + \log_{\frac{1}{3}} 3$, б) $\left(\frac{1}{9}\right)^{1-\log_9 18}$

в) $\frac{1}{2}\lg 4 + \lg 5$, г) $\log_3 \sqrt{90} - \log_5 \sqrt{10}$

2. Найдите *x*: $\log_{\frac{2}{3}} x = \frac{1}{4}\log_{\frac{2}{3}} a - \frac{4}{7}\log_{\frac{2}{3}} b$

3. Прологарифмируйте по основанию 10: $\dfrac{0{,}001b^2}{a^3}$

II уровень

1. Вычислите:

а) $\dfrac{3\log_7 2 - \frac{1}{2}\log_7 64}{4\log_5 2 + \frac{1}{3}\log_5 27}$, б)

$72 \cdot \left(49^{\frac{1}{2}\log_7 9 - \log_7 6} + 5^{-\log_{\sqrt{5}} 4}\right)$

2. Найдите *x*:

$\log_{25} x = \frac{3}{5}\log_{25} a + \frac{1}{2} - 5\log_{25} b + 4\log_{25} b$

3. Прологарифмируйте по основанию *4*: $\dfrac{\sqrt{r^5}}{256 \cdot \left(p^2q\right)^3}$

	4. Упростите выражение: $\log_b b^a - b^{2\log_b \sqrt{a}}$

Практическая работа №47,48:

Свойства логарифмической функции и её график

Цель: <u>Знать</u> свойства логарифма, формулы перехода к другому основанию.
<u>Уметь</u> преобразовывать выражения, содержащие логарифмы.

Для *a>0; a≠1; x>0; y>0* справедливы формулы:

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
4. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
5. $\log_a x^p = p \log_a x$
6. $\log_{a^p} x \quad = \frac{1}{p}$

Примеры: а) $\log_6 18 + \log_6 2 = \log_6 18 \cdot 2 = \log_6 36 = 2$

б) $\log_{12} 48 + \log_{12} 4 = \log_{12} 48 \div 4 = \log_{12} 12 = 1$

в) $\log_3 3^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\log_3 3 \quad = \frac{1}{4}$

г) $\log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2}\log_5 12 + \log_5 50 = \log_5 \sqrt{3} - \log_5 \sqrt{12} + \log_5 50 =$

$$= \log_5 \frac{\sqrt{3} \cdot 50}{\sqrt{12}} = \log_5 25 = 2$$

Десятичные и натуральные логарифмы.

Десятичные логарифм числа называют логарифм этого числа по основанию 10.

$$\boxed{\lg b \; = \; \log_{10} b}$$

Примеры: $\lg 100 \; = 2,$

$\lg 1000 \; = 4,$

$\lg 0{,}00001 \; = \; -5,$

$\lg 0{,}01 \; = \; -2.$

Натуральным логарифмом числа называется логарифм этого числа по основанию e, где $\mathrm{e} = 2{,}71828$

$$\boxed{\ln b \; = \; \log_e b}$$

$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{1\times 2\times 1} + \; \dots + \frac{1}{1\times 2\times 3 \dots n} + \; \dots$

Примеры: $\ln e^2 = 2,$

$\ln \frac{1}{e} = \; -1$,

$\ln \frac{1}{\sqrt[5]{e^2}} = -\frac{2}{5}$

Для натуральных и десятичных логарифмов составлены специальные таблицы.
Для вычисления других логарифмов используют ***формулу перехода к другому основанию*** :

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

$$\boxed{\log_a b \; = \; \frac{1}{\log_b a}}$$

Пример: $\frac{\log_5 2}{\log_5 6} + \frac{\log_4 3}{\log_4 6} = \log_6 2 + \log_6 3 = \log_6 6 = 1$

Функция – это отображение, при котором каждому значению одного множества ставится в соответствие единственной значение второго множества. Причем отображение называется обратимым если каждому элементу второго множества ставится в соответствие единственный элемент первого множества. Графики обратных функций симметричный относительно прямой *y=x*

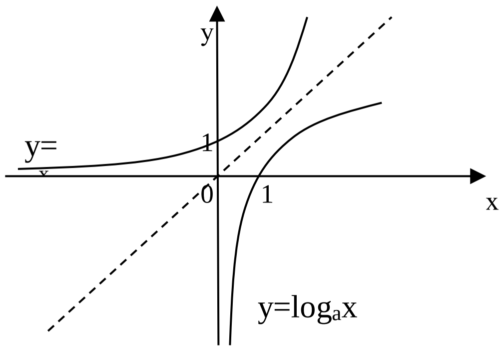


Рис 1. Графики показательной и логарифмической функций.

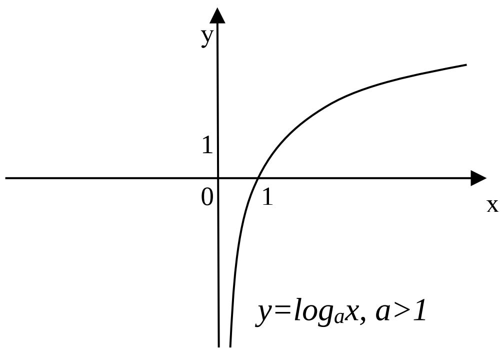
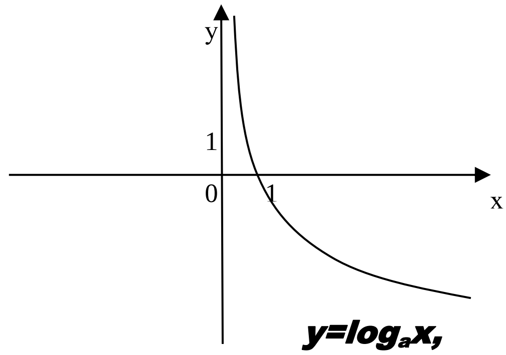
Вспомните определение и свойства показательной функции: y= a^x, при *a>0,* $a \neq 1$. Эта функция возрастает на всей числовой прямой при *a>1* и убывает при *0<a<1*. То есть при любом значении *a* показательная функция монотонна. Для нее существует обратная функция. Можно ее построить. (Рис 1). Функция, обратная показательной называется логарифмической.

Функцию, заданную формулой

$$\boxed{y=\log_a x,\ где\ a>0,\ a \neq 1}$$

называют ***логарифмической функцией*** с основанием *a*.

Для показательной функции существует два случая поведения функции: при a>1 и при *0<a<1. Логарифмическую функцию рассмотрим*

y=log$_a$x, где a>1	***y=log$_a$x, где 0<a<1***
График функции 	***График функции*** 
Свойства функции 1. D(f)=(0;+∞). *Область определения – это все допустимые значения независимого переменного x.* 2. E(f)=R.	***Свойства функции*** 1. D(f)=(0;+∞). 2. E(f)=R.

Область значения – это все допустимые значения зависимого переменного у. 3. Возрастает на всей области определения *Функция называется возрастающей, если большему значению аргумента ставится в соответствие большее значении функции.* 4. Проходит через точку (1;0)	3. Убывает на всей области определения *Функция называется убывающей, если большему значению аргумента ставится в соответствие большее значении функции.* 4. Проходит через точку (1;0)

Пример 1. Построить график функции $y=log_3(x-2)$. Описать ее свойства.
Решение. График искомой функции получается из графика функции $y=log_3x$.

X	1/3	3	9
y	-1	1	2

График функции $y=log_3(x-2)$ получаем из предыдущего сдвигом по оси Ох на 2 единицы вправо (Рис 11).

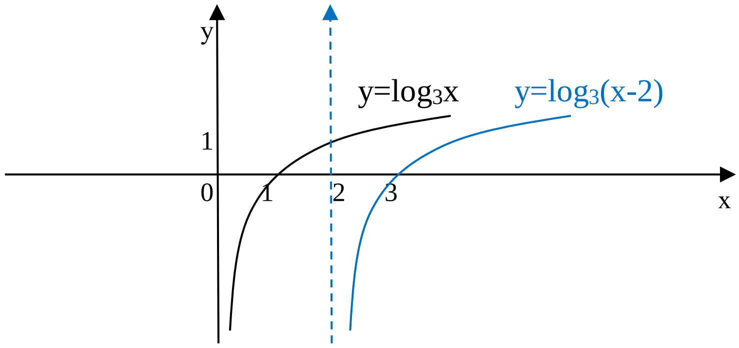
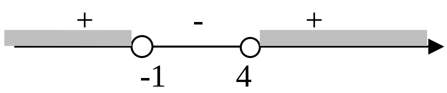
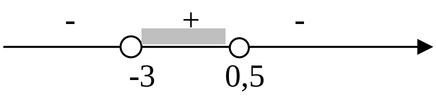


Рис 11**.** График функции $y=log_3(x-2)$.

Пример 2. Найдите область определения функции $y=log_5(6-2x)$.
Решение. Областью определения логарифмической функции является множество положительных действительных чисел. Поэтому аргумент логарифма должен быть строго больше нуля. $6-2x>0;\ -2x>-6;\ x<3$.
Ответ $x\epsilon(-\infty;3)$
Пример 3. Найдите область определения функции $y=log_5(x^2-3x-4)$.
Решение. $x^2-3x-4>0$.
Решим неравенство методом интервалов: $f(x)=x^2-3x-4$
$x^2-3x-4=0;\ x_1=-1;\ x_2=4$
$x\epsilon(-\infty;-1\cup(4;+\infty)$



Ответ: $x\epsilon(-\infty;-1\cup(4;+\infty)$
Пример 3. Найдите область определения функции $y=log_8\frac{2x+6}{5-10x}$
Решение. $\frac{2x+6}{5-10x}>0$
Решим неравенство методом интервалов*:* $f(x)=\frac{2x+6}{5-10x}$
$\frac{2x+6}{5-10x}=0$*;* Дробь равна 0 когда числитель равен 0, а знаменатель не равен 0. Т.О. получим:
$2x+6=0$ и $5-10x\neq0$
$x=-3 \qquad x\neq0{,}5$
$x\epsilon(-3;0{,}5)$



Ответ: $x\epsilon(-3;0{,}5)$

Практическая часть:

№	1 вариант	№	2 вариант
1. Постройте график функции:			
a	$y = log_3(x-2)$	**a**	$y = log_2(x+1)$
b	$y = -log_{\frac{1}{2}}x$	**b**	$y = log_{\frac{1}{3}}x + 2$

1. Выполните действия:

Свойства логарифмов		***Вариант 1***
А) Выберите номер правильного ответа		
А1	Вычислите: $log_{12}160 + log_{12}0,9$	**1)** 2; **2)** 1; **3)** 3; **4)** 0
А2	Упростите: $5^{2+log_5 3}$	**1)** 50; **2)** 3; **3)** 75; **4)** 12
А3	Вычислите: $2log_2 12 - log_2 18$	**1)** 3; **2)** 4; **3)** 1; **4)** 2
А4	Найдите значение выражения: $\log_4(16c)$, если $\log_2 c = 0,5$	**1)** 1; **2)** 2,25; **3)** 3,75; **4)** 4,5
А5	Найдите значение выражения: $\dfrac{log_5 144}{log_5 12} - 8$	**1)** 4; **2)** 6; **3)** $log_5 12 - 8$; **4)** -6
А6	Вычислите: $\log_2(24m)$, если $\log_2 3m = 8,5$	**1)** 11,5; **2)** $-5,5$; **3)** 19,5; **4)** 20
А7	Найдите значение выражения: $\log_5 \dfrac{25}{c}$, если $\log_c 5 = 0,2$	**1)** 3; **2)** 7; **3)** -3 **4)** 5
А8	Вычислите $81^{log_3 \sqrt[4]{5}} - 2^{log_{0,5} 5}$	**1)** 5; **2)** 5,2; **3)** 4,8; **4)** 4,5
Свойства логарифмов		***Вариант 2***
А) Выберите номер правильного ответа		
А1	Вычислите: $log_{11}110 + log_{11}1,1$	**1)** 1; **2)** 3; **3)** 2; **4)** -1
А2	Упростите: $6^{2-log_6 2}$	**1)** 18; **2)** 15; **3)** 75; **4)** 25
А3	Вычислите: $log_3 96 - 5log_3 2$	**1)** 3; **2)** 1; **3)** -1; **4)** 2
А4	Найдите значение выражения: $\log_4 \dfrac{16}{c}$, если $\log_4 c = -0,5$	**1)** $-0,5$; **2)** 3,5; **3)** 1,5; **4)** 2,5
А5	Найдите значение выражения: $\dfrac{log_7 169}{log_7 13} + 5$	**1)** 6; **2)** 7; **3)** $log_7 13 + 5$; **4)** -2
А6	Вычислите: $\log_5(100m)$, если $\log_5 4m = 7,5$	**1)** 6,5; **2)** $-4,5$; **3)** 9,5; **4)** 10
А7	Найдите значение выражения: $\log_6 \dfrac{216}{c}$, если $\log_c 6 = 0,5$	**1)** 3; **2)** 1; **3)** -2 **4)** 2
А8	Вычислите $64^{log_4 \sqrt[3]{7}} - 5^{log_{0,2} 2}$	**1)** 6,5; **2)** 5; **3)** 6,2; **4)** 7,5

Свойства логарифмов		***Вариант 3***
А) Выберите номер правильного ответа		
А1	Вычислите: $lg125+lg8$	**1)** 1; **2)** 2; **3)** 3; **4)** 4
А2	Упростите: $6^{2-log_6 9}$	**1)** 4; **2)** 6; **3)** 9; **4)** 12
А3	Вычислите: $2log_{15}3+log_{15}25$	**1)** 3; **2)** 4; **3)** 1; **4)** 2
А4	Найдите значение выражения: $\log_9(27c)$, если $\log_3 c=0,5$	**1)** 1; **2)** 1,75; **3)** 0,75; **4)** 1,5
А5	Найдите значение выражения: $\dfrac{log_3 121}{log_3 11}+5$	**1)** 11; **2)** 6; **3)** $log_3 11+5$; **4)** 7
А6	Вычислите: $\log_5(50m)$, åñëè $\log_5 2m=4,5$	**1)** 8,5; **2)** 6,5; **3)** 9,5; **4)** 9
А7	Найдите значение выражения: $\log_4 \dfrac{16}{c}$, если $\log_c 4=0,1$	**1)** −8; **2)** −6; **3)** −3 **4)** 4
А8	Вычислите $64^{log_2 \sqrt[3]{5}}+3^{log_{\frac{1}{3}}5}$	**1)** 5; **2)** 25,2; **3)** 15,1; **4)** $4\frac{1}{3}$
Свойства логарифмов		***Вариант 4***
А) Выберите номер правильного ответа		
А1	Вычислите: $log_9 810-log_9 10$	**1)** 1; **2)** 2; **3)** 3; **4)** −1
А2	Упростите: $3^{3+log_3 2}$	**1)** 54; **2)** 48; **3)** 81; **4)** 29
А3	Вычислите: $log_5 12,5-log_5 0,1$	**1)** 3; **2)** 1; **3)** −2; **4)** 4
А4	Найдите значение выражения: $\log_{36}(6c)$, если $\log_6 c=0,2$	**1)** 1,2; **2)** 1,5; **3)** 0,6; **4)** 1,8
А5	Найдите значение выражения: $\dfrac{log_9 64}{log_9 4}-2$	**1)** 2; **2)** 8; **3)** 1; **4)** $log_9 4-2$
А6	Вычислите: $\log_3(54m)$, если $\log_3 2m=1,5$	**1)** 4,5; **2)** −2,5; **3)** 1,5; **4)** 5
А7	Найдите значение выражения: $\log_7 \dfrac{49}{c}$, если $\log_c 7=0,25$	**1)** −3; **2)** 1; **3)** 2 **4)** -2
А8	Вычислите $216^{log_6 \sqrt[3]{3}}+7^{log_{\frac{1}{7}}5}$	**1)** 4,8; **2)** −3; **3)** 3,2; **4)** 10,5

2. Определите множество значений функции:

А1	Определите множество значений функции: $y=11-\log_7(x+5)$	**1)** $[5;+\infty)$; **2)** $(-\infty;+\infty)$; **3)** $(-\infty;11]$; **4)** $(5;11)$
А2	Определите множество значений функции: $y=\dfrac{4}{log_3(x^2+9)}$	**1)** $(1;9]$; **2)** $(-\infty;2]$; **3)** $(0;2]$; **4)** $[2;+\infty)$

А3	Определите множество значений функции: $y=12+\log_3(4-x)$	**1)** $[12;+\infty)$; **2)** $(-\infty;12)$; **3)** $(-\infty;+\infty)$; **4)** $(4;12)$
А4	Определите множество значений функции: $y=log_2(\lvert x\rvert+1)$	**1)** $(-\infty;0)$; **2)** $(-\infty;+\infty)$; **3)** $[1;+\infty)$; **4)** $(0;+\infty)$
А5	Определите множество значений функции: $y=\log_4^2(x+3)$	**1)** $[0;+\infty)$; **2)** $(-\infty;+\infty)$; **3)** $(-\infty;3]$; **4)** $(0;3)$
А6	Определите множество значений функции: $y=\dfrac{3}{log_2(x^2+8)}$	**1)** $(0;1]$; **2)** $(-\infty;1]$; **3)** $(1;3]$; **4)** $[3;+\infty)$
А8	Определите множество значений функции: $y=log_2(x^2+16)$	**1)** $(-\infty;+\infty)$; **2)** $(-\infty;4]$; **3)** $[4;+\infty)$; **4)** $[16;+\infty)$

Практическая работа №49,50:

Методы решения логарифмических уравнений

<u>Цель работы:</u> закрепить знания и умения студентов при решении логарифмических уравнений и неравенств.

<u>Теортическая часть</u>

Логарифмическое уравнение

Определение: Логарифмическое уравнение – это уравнение вида

$$\log_a b(x) = \log_a c(x), \quad \text{где } a > 0,\ a \neq 1.$$

Уравнения, сводящиеся к этому виду, также называются логарифмическими уравнениями.

<u>Пример</u>.

Решим уравнение

$\log_3 (x^2 - 3x - 5) = \log_3 (7 - 2x)$.

<u>Решение</u>.

1) Поскольку основания в левой и правой частях одинаковые (равны 3), то мы можем освободиться от знаков логарифмов и прийти к уравнению вида $b(x) = c(x)$:

$x^2 - 3x - 5 = 7 - 2x$

2) Приравниваем уравнение к нулю и получаем квадратное уравнение:

$x^2 - 3x - 5 - 7 + 2x = 0$

$x^2 - x - 12 = 0$

Решив квадратное уравнение, находим его корни:

$x_1 = 4$, $x_2 = -3$.

3) Проверим, при каком из двух значений x уравнение имеет смысл.

Мы уже знаем, что логарифмическое уравнение равносильно уравнению $b(x) = c(x)$ только в том случае, если $b(x) > 0$ и $c(x) > 0$. Следовательно, выводим два неравенства:

$x^2 - 3x - 5 > 0$,

$7 - 2x > 0$.

При $x = 4$ неравенства неверны. Значит, 4 не является решением уравнения.

При $x = -3$ неравенства верны. Значит, 3 является единственным решением уравнения.

Логарифмическое неравенство

Определение: Логарифмическое неравенство – это неравенство вида

$$\log_a b(x) > \log_a c(x), \quad \text{где } a > 0,\ a \neq 1.$$

Неравенства, сводящиеся к этому виду, также называются логарифмическими неравенствами.

Если $b(x) > 0$ и $c(x) > 0$, то:

- при $a > 1$ логарифмическое неравенство $\log_a b(x) > \log_a c(x)$ равносильно неравенству $b(x) > c(x)$;
- при $0 < a < 1$ логарифмическое неравенство $\log_a b(x) > \log_a c(x)$ равносильно неравенству с противоположным смыслом $b(x) < c(x)$

Пример.

Решим неравенство $\log_3 (2x - 4) > \log_3 (14 - x)$.

Решение.

1) В основании обеих частей уравнения – одно и то же число 3. Значит, можем убрать значки логарифмов. Поскольку 3 больше 1, то, следуя правилу, составляем следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} 2x - 4 > 0 \\ 14 - x > 0 \\ 2x - 4 > 14 - x. \end{cases}$$

Решаем неравенства и получаем:

$$\begin{cases} x > 2 \\ x < 14 \\ x > 6 \end{cases}$$

Мы видим, что x больше не только двух, но и больше шести. Значит, неравенство $x > 2$ мы уже в расчет не берем: если x больше 6, то естественно и больше 2. Таким образом, для нас важны только два других неравенства, согласно которым x больше 6, но меньше 14. Это и есть ответ:

$6 < x < 14$.

Текст задания:

Решение логарифмических уравнений и неравенств **Вариант 1**		
А) Выберите номер правильного ответа		
А1	Если x_0 - корень уравнения $\log_{0,5}(6-2x) = -2$, то значение выражения $x_0^2 + 5$ равно	**1)** 5; **2)** 30; **3)** 9; **4)** 6
А2	Найдите произведение корней уравнения $\lg^2 x - \lg x^3 + 2 = 0$	**1)** 1000; **2)** 0,01; **3)** 0,1; **4)** 100
А3	Найдите сумму корней уравнения $\log_5(2x^2+3) - 1 = \log_5 x$	**1)** −2; **2)** 4,5; **3)** 2,5; **4)** 3
А4	Найдите наибольшее целое решение неравенства $\log_{1/3}(x-2) \le \log_{1/3}(6-x)$	**1)** −1; **2)** 4; **3)** 5; **4)** −3
А5	Найдите область определения функции $y = \sqrt{log_{0,2}(4-x)}$	**1)** $[3;+\infty)$; **2)** $(-\infty;3]$; **3)** $[3;4)$; **4)** $(-\infty;4)$
В) Напишите правильный ответ		

B1	Найдите произведение корней уравнения $\log_x 2+\log_{2x} 2=\log_4 2$	
B2	Укажите количество целых решений неравенства: $\log_{1/2}\left(3x-1\right)-2>\log_2 x$	
B3	Если x_0 и y_0 - решение системы уравнений $\begin{cases} x+2y=5, \\ \log_{16}\left(y+x\right)=0,5; \end{cases}$ то значение выражения $2x_0+y_0$ равно	
С) Приведите подробное решение данного задания.		
С	При каких значениях параметра a уравнение $\log_3\left(2a-9^x\right)=x$ не имеет корней	
Решение логарифмических уравнений и неравенств **Вариант 2**		
А) Выберите номер правильного ответа		
А1	Если x_0 - корень уравнения $\log_{0,25}\left(3x+1\right)=-2$, то значение выражения $x_0^2-x_0$ равно	**1)** 45; **2)** 20; **3)** 4; **4)** 31
А2	Найдите произведение корней уравнения $\lg^2 x-\lg x^2-3=0$	**1)** 1000; **2)** 0,01; **3)** 0,1; **4)** 100
А3	Найдите сумму корней уравнения $\log_6\left(4x^2+32\right)-2=\log_6 x$	**1)** 9; **2)** 11; **3)** -10; **4)** 3
А4	Найдите наибольшее целое решение неравенства $\log_{3/\pi}\left(2x+13\right)<\log_{3/\pi}\left(5+3x\right)$	**1)** 7; **2)** 6; **3)** -6; **4)** -7
А5	Найдите область определения функции $y=\sqrt{log_{0,5}\left(x+1\right)}$	**1)** $(-1;0)$; **2)** $(-1;0]$; **3)** $(-\infty;0]$; **4)** $(-1;+\infty)$
В) Напишите правильный ответ		
В1	Найдите наименьший корень равнения $\log_2 x+\log_3 x=1$	
В2	Укажите количество целых решений неравенства $\log_{1/2}\left(x-0,5\right)-\log_2\left(x-1\right)\ge 1$	
В3	Если x_0 и y_0 - решение системы уравнений $\begin{cases} 3x+2y=5, \\ \log_{16}\left(y+x\right)=0,25; \end{cases}$ то значение выражения $2x_0+y_0$ равно	
С) Приведите подробное решение данного задания.		
С	При каких значениях параметра a уравнение $\log_2\left(a^3+4^x\right)-x=0$ имеет ровно два корня	

Практическая работа №51: Переход к новому основанию логарифма

Цель: закрепить знания и умения студентов по освоению логарифмов и свойств логарифмической функции.

Теоретическая часть:

Основные свойства логарифмов

Сложение и вычитание логарифмов

1. $\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$;

2. $\log_a x - \log_a y = \log_a (x : y)$.

Вынесение показателя степени из логарифма

1. $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$;

2. $\log_{a^k} x = \frac{1}{k} \cdot \log_a x$

3. $\log_{a^k} x^n = \frac{n}{k} \cdot \log_a x$

Переход к новому основанию $\log_a x = \dfrac{\log_c x}{\log_c a}$

В частности, если положить c = x, получим: $\log_a x = \dfrac{1}{\log_x a}$

Основное логарифмическое тождество

Часто в процессе решения требуется представить число как логарифм по заданному основанию. В этом случае нам помогут формулы:

1. $n = \log_a a^n$

2. $a = b^{\log_b a}$

Логарифмическая единица и логарифмический ноль

1. $\log_a a = 1$ — это логарифмическая единица. Запомните раз и навсегда: логарифм по любому основанию a от самого этого основания равен единице.

2. $\log_a 1 = 0$ — это логарифмический ноль. Основание a может быть каким угодно, но если в аргументе стоит единица — логарифм равен нулю! Потому что $a^0 = 1$ — это прямое следствие из определения.

Переход к новому основанию $\log_a в = \dfrac{\log_c в}{\log_c a}$, частности, если с = b, то $\log_в в = 1$,

и тогда: $\log_a в = \dfrac{1}{\log_в a}$.

$$\log_{0,8} 3 \cdot \log_3 1{,}25 = \log_{0,8} 3 \cdot \frac{\log_{0,8} 1{,}25}{\log_{0,8} 3} = \log_{0,8} 1{,}25 = \log_{\frac{4}{5}} \frac{5}{4} = -1$$

Логарифмирование – это нахождение логарифмов заданных чисел или выражений.

Пример: Найдем логарифм $x = a^2 \cdot \frac{b}{c}$.

Решение.
Последовательно воспользуемся сразу всеми тремя основными свойствами логарифмов, которые изложены выше (логарифм произведения, логарифм частного и логарифм степени):

$$\lg x = \lg \left(a^2 \cdot \frac{b}{c}\right) = \lg a^2 + \lg b - \lg c = 2\lg a + \lg b - \lg c.$$

Потенцирование – это нахождение чисел или выражений по данному логарифму числа (выражения).
Потенцировать – значит освобождаться от значков логарифмов в процессе решения логарифмического выражения.

Пример:

$$x = 3a\sqrt[3]{4b^2}, \quad \ln x = \ln 3a\sqrt[3]{4b^2}, \ln x = \ln 3 + \ln a + \frac{1}{3}(\ln 4 + 2\ln b), \ln x = \ln 3 + \ln a + \frac{1}{3}\ln 4 + \frac{2}{3}\ln b,$$

Ответ: $\ln x = \ln 3 + \ln a + \frac{1}{3}\ln 4 + \frac{2}{3}\ln b.$

Выполните действия:

A1	Вычислите: $log_{12}160 + log_{12}0,9$	1)2 2) 1 3)3 4) 0
A2	Упростите: $5^{2+log_5 3}$	1) 50 2) 3 3) 75 4) 12
A3	Вычислите: $2log_2 12 - log_2 18$	1) 3 2) 4 3) 1 4) 2
A4	Найдите значение выражения: $\log_4(16c)$, если $\log_2 c = 0,5$	1) 1 2) 2,25 3) 3,75 4) 4,5
A5	Найдите значение $\frac{log_5 144}{log_5 12} - 8$ выражения:	1) 4 2) 6 3) $log_5 12 - 8$; 4) -6
A6	Вычислите: $\log_2(24m)$, если $\log_2 3m = 8,5$	1) 11,5 2) -5,5 3) 19,5 4) 20
A7	Найдите значение выражения: $\log_5 \frac{25}{c}$, если $\log_c 5 = 0,2$	1) 3 2) 7 3) -3 4) 5

A8	Вычислите $81^{\log_3 \sqrt[4]{5}} - 2^{\log_{0,5} 5}$	1) 5 2) 5,2 3) 4,8 4) 4,5
	2 вариант	
A1	Вычислите: $\log_{11} 110 + \log_{11} 1,1$	1) 1 2) 3 3) 2 4) -1
A2	Упростите: $6^{2-\log_6 2}$	1) 18 2) 15 3) 75 4) 25
A3	Вычислите: $\log_3 96 - 5\log_3 2$	1) 3 2) 1 3) -1 4) 2
A4	Найдите значение выражения: $\log_4 \frac{16}{c}$, если $\log_4 c = -0,5$	1) -0,5 2) 3,5 3) 1,5 4) 2,5
A5	Найдите значение выражения: $\frac{\log_7 169}{\log_7 13} + 5$	1) 6 2) 7 3) $\log_7 13 + 5$; 4) -2
A6	Вычислите: $\log_5 (100m)$, если $\log_5 4m = 7,5$	1) 6,5 2) -4,5 3) 9,5 4) 10
A7	Найдите значение $\log_6 \frac{216}{c}$, если $\log_c 6 = 0,5$ выражения:	1) 3 2) 1 3) -2 4) 2
A8	Вычислите $64^{\log_4 \sqrt[3]{7}} - 5^{\log_{0,2} 2}$	1) 6,5 2) 5 3) 6,2 4) 7,5

Практическая работа №52: Правила вычисления первообразных

ЦЕЛЬ : Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Вычисление первообразной функции».

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.
2. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности уч-ся.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

1. Ответить на контрольные вопросы:
   а) Что называется первообразной функции?
   б) Сформулируйте основное свойство первообразной.
   в) Сформулируйте три правила нахождения первообразных.
2. Изучить образцы решенных примеров.
3. Выполнить задания для самоконтроля.
4. Изучить условие заданий для практической работы.

5. Оформить отчет о работе.

УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

ПРИМЕР 1. Выясните, является ли $F(x)=\frac{2}{9}x^3-3x+cos\,x-1$ первообразной для функции $f(x)=\frac{2}{3}x^2-3-sin\,x$ на $\boldsymbol{R}$?

РЕШЕНИЕ. Находим

$$F'(x)=\left(\frac{2}{9}x^3-3x+cos\,x\right)'=\frac{2}{9}\cdot 3x^2-3\cdot 1+(-sin\,x)=\frac{2}{3}x^2-3-sin\,x=f(x).$$

Следовательно, по определению $F(x)=\frac{2}{9}x^3-3x+cos\,x-1$ является первообразной для функции $f(x)=\frac{2}{3}x^2-3-sin\,x$ на $\boldsymbol{R}$.

ПРИМЕР 2. Для функции $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{cos^2 x}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{4};1+2\sqrt{\pi}\right)$.

РЕШЕНИЕ. По основному свойству первообразных любая первообразная функции $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{cos^2 x}$ записывается в виде $F(x)=2\cdot 2\sqrt{x}-tgx+C=4\sqrt{x}-tgx+C$.

Координаты точки $M\left(\frac{\pi}{4};1+2\sqrt{\pi}\right)$ графика искомой первообразной должны удовлетворять уравнению:

$$1+2\sqrt{\pi}=4\sqrt{\frac{\pi}{4}}-tg\frac{\pi}{4}+C.$$

Отсюда находим, что

$$1+2\sqrt{\pi}=2\sqrt{\pi}-1+C,$$
$$C=2.$$

Следовательно, уравнение искомой первообразной имеет вид: $F(x)=4\sqrt{x}-tgx+2$.

ТЕСТ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ.

Выберите правильный вариант ответа.

1. Функция $F(x)=3x^2+0{,}5cos\,2x+5$ является первообразной для функции: а) $f(x)=6x-sin\,2x$; б) $f(x)=3x^3+0{,}5cos\,2x$; в) $f(x)=9x^3-2\,sin\,2x$.
2. Дана функция $g(x)=\frac{1}{sin^2 x}-\frac{2}{\sqrt{x}}$. Первообразная для функции *g(x)*, график которой проходит через точку $\left(\frac{\pi}{4};2\sqrt{\pi}-1\right)$, это:

   а) $G(x)=-4\sqrt{x}-ctgx+4\sqrt{\pi}$; б) $G(x)=ctgx-4\sqrt{x}+2$; в) $G(x)=-ctgx-4\sqrt{x}+2$.

ВАРИАНТЫ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ.

Вариант 1.

1. Является ли функция $F(x)=x^2+3x+1$ первообразной для функции $f(x)=2x+3$ на $\boldsymbol{R}$?
2. а) Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)=\frac{x^2}{3}-\frac{3}{x^2}$.

   б) Для функции $f(x)=\sin 2x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{4};-2\right)$.

Вариант 2.

1. Является ли функция $F(x)=-\frac{x^4}{4}+5x+2$ первообразной для функции $f(x)=-x^3+5$ на $\boldsymbol{R}$?
2. а) Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)=\frac{3}{x^4}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

   б) Для функции $f(x)=(4-5x)^3$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(1;\frac{1}{20}\right)$.

Вариант 3.

1. Является ли функция $F(x)=x^2-x$ первообразной для функции $f(x)=2x-1$ на $\boldsymbol{R}$?
2. а) Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)=\frac{7}{\cos^2 x}-3x-x^3$.

   б) Для функции $f(x)=\sin 3x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{12};0\right)$.

Вариант 4.

1. Является ли функция $F(x)=\frac{1}{x^2}-\sin x$ первообразной для функции $f(x)=-\frac{1}{x^3}-\cos x$ на $\boldsymbol{R}$?
2. а) Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)=x(x+1)(x+2)$.

   б) Для функции $f(x)=-\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M(0;3)$.

Вариант 5.

1. Является ли функция $F(x)=x^3+1$ первообразной для функции $f(x)=\frac{x^4}{4}+x$ на $\boldsymbol{R}$?
2. а) Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)=\left(x^{10}-\frac{1}{x^{10}}\right)^2$.

   б) Для функции $f(x)=x-10\sin 2x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M(0;-5)$.

Вариант 6.

1. Является ли функция $F(x)=x+\cos x$ первообразной для функции $f(x)=1-\sin x$ на $\boldsymbol{R}$?
2. а) Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)=3e^x+5\cos x-7x^4$.

б) Для функции $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\left(2x-1\right)^3}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(1;2\right)$.

Вариант 7.

1. Является ли функция $F\left(x\right)=2x^3+\dfrac{3}{4}x^4+5$ первообразной для функции $f\left(x\right)=3\left(x+2\right)x^2$ на $\boldsymbol{R}$?
2. а) Найдите общий вид первообразных для функции $f\left(x\right)=\sqrt[7]{x}+7^x+2x^2$.

   б) Для функции $f\left(x\right)=-6\sin 2x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\dfrac{\pi}{4};-3\right)$.

Вариант 8.

1. Является ли функция $F\left(x\right)=x+\dfrac{1}{2x^2}$ первообразной для функции $f\left(x\right)=1-\dfrac{1}{x^3}$, $x>0$?
2. а) Найдите общий вид первообразных для функции $f\left(x\right)=2\sin x+2^x-\dfrac{1}{x^3}$.

   б) Для функции $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\dfrac{\pi}{2};\sqrt{2}\right)$.

Практическая работа №53: Вычисление неопределённого интеграла
Цель: Отработать навыки вычислениея неопределённого интеграла

Вариант 1

1. $\int x dx$
2. $\int x^2 dx$
3. $\int x^5 dx$
4. $\int 2dx$
5. $\int 6x dx$
6. $\int \frac{1}{3}t^3 dt$
7. $\int (3-x)dx$
8. $\int (4x-x^2)dx$
9. $\int 5(x-2)dx$
10. $\int (8x^3+4x-7)dx$
11. $\int x^2(1+3x)dx$
12. $\int (x+4)^2 dx$
13. $\int 3(2x-3)^2 dx$
14. $\int x(3-x)^2 dx$
15. $\int 4\sqrt{x}dx$
16. $\int \sqrt[3]{x^2}dx$
17. $\int \frac{dx}{x^2}$
18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$
19. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$
20. $\int \frac{3dx}{4\sqrt[4]{x}}$
21. $\int \frac{xdx}{2\sqrt{x}}$
22. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{4x}dx$
23. $\int \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}}dx$
24. $\int \left(\frac{2}{x^2}-\frac{4}{\sqrt{x}}+3\sqrt[3]{x^2}\right)dx$
25. $\int \frac{2\sqrt[3]{x}-3x^2}{x^2}dx$
26. $\int \frac{x-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}dx$
27. $\int 4\sin x dx$
28. $\int 2\cos x dx$

29. $\int \frac{2dx}{\cos^2 x}$

30. $\int \frac{3dx}{\sin^2 x}$

31. $\int (1+\cos x)dx$

32. $\int (2-3\sin x)dx$

33. $\int (3x^2 - 2\cos x)dx$

34. $\int \left(\frac{2}{\cos^2 x} - \frac{3}{\sin^2 x}\right)dx$

35. $\int 3e^u du$

36. $\int 2a^{\varphi} d\varphi$

37. $\int (x-5e^x)dx$

38. $\int (2e^t - 3\cos t)dt$

39. $\int \frac{3dt}{2t}$

40. $\int \left(\frac{2}{x} - x\right)dx$

41. $\int \frac{6dx}{1+x^2}$

42. $\int \frac{3dx}{4\sqrt{1-x^2}}$

43. $\int \frac{2\cos^2 v+1}{\cos^2 v}dv$

44. $\int \frac{\sin^2 t - 2}{\sin^2 t}dx$

45. $\int \frac{e^{2x} + e^x \sin x}{e^x}dx$

46. $\int tg^2 x dx$

47. $\int \frac{x^2 dx}{x^2+1}$

Практическая работа по теме «Интегралы»
Вариант 2

1. $\int xdx$
2. $\int x^3 dx$
3. $\int x^6 dx$
4. $\int 3dx$
5. $\int 5xdx$
6. $\int \frac{1}{3}t^3 dt$
7. $\int (4-x)dx$
8. $\int (5x-x^2)dx$
9. $\int 3(x-3)dx$
10. $\int (4x^3+8x-2)dx$
11. $\int x^2(1+4x)dx$
12. $\int (x-2)^2 dx$
13. $\int 4(3x-2)^2 dx$
14. $\int x(5-x)^2 dx$
15. $\int 2\sqrt{x}dx$
16. $\int \sqrt[3]{x^2}dx$
17. $\int \frac{dx}{x^2}$
18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$
19. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$
20. $\int \frac{3dx}{4\sqrt[4]{x}}$
21. $\int \frac{xdx}{2\sqrt{x}}$
22. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{4x}dx$
23. $\int \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}}dx$
24. $\int \left(\frac{2}{x^2} - \frac{4}{\sqrt{x}} + 3\sqrt[3]{x^2}\right)dx$
25. $\int \frac{2\sqrt[3]{x} - 3x^2}{x^2}dx$
26. $\int \frac{x - \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}dx$
27. $\int 4\sin xdx$
28. $\int 2\cos xdx$
29. $\int \frac{2dx}{\cos^2 x}$
30. $\int \frac{3dx}{\sin^2 x}$
31. $\int (1+\cos x)dx$
32. $\int (2-3\sin x)dx$
33. $\int (3x^2 - 2\cos x)dx$
34. $\int \left(\frac{2}{\cos^2 x} - \frac{3}{\sin^2 x}\right)dx$
35. $\int 3e^u du$
36. $\int 2a^{\varphi} d\varphi$
37. $\int (x-5e^x)dx$
38. $\int (2e^t - 3\cos t)dt$
39. $\int \frac{3dt}{2t}$
40. $\int \left(\frac{2}{x} - x\right)dx$
41. $\int \frac{6dx}{1+x^2}$
42. $\int \frac{3dx}{4\sqrt{1-x^2}}$
43. $\int \frac{2\cos^2 v+1}{\cos^2 v}dv$

44. $\int \frac{\sin^2 t - 2}{\sin^2 t} dx$

45. $\int \frac{e^{2x} + e^x \sin x}{e^x} dx$

46. $\int tg^2 x dx$

47. $\int \frac{x^2 dx}{x^2 + 1}$

Практическая работа по теме «Интегралы»
Вариант 3

1. $\int x dx$
2. $\int x^8 dx$
3. $\int x^2 dx$
4. $\int 4 dx$
5. $\int 3x dx$
6. $\int \frac{1}{3} t^3 dt$
7. $\int (5 - x) dx$
8. $\int \left(3x - \frac{1}{2} x^2\right) dx$
9. $\int 2(x - 2) dx$
10. $\int (4x^3 + 2x - 5) dx$
11. $\int x^2 (1 + 5x) dx$
12. $\int (x - 3)^2 dx$
13. $\int 2(4x - 1)^2 dx$
14. $\int x(3 - x)^2 dx$
15. $\int 4\sqrt{x} dx$
16. $\int \sqrt[5]{x^3} dx$
17. $\int \frac{dx}{x^2}$
18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$
19. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$
20. $\int \frac{3dx}{4\sqrt[4]{x}}$
21. $\int \frac{x dx}{2\sqrt{x}}$
22. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{4x} dx$
23. $\int \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}} dx$
24. $\int \left(\frac{2}{x^2} - \frac{4}{\sqrt{x}} + 3\sqrt[3]{x^2}\right) dx$
25. $\int \frac{2\sqrt[3]{x} - 3x^2}{x^2} dx$
26. $\int \frac{x - \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}} dx$
27. $\int 4 \sin x dx$
28. $\int 2 \cos x dx$
29. $\int \frac{2dx}{\cos^2 x}$
30. $\int \frac{3dx}{\sin^2 x}$
31. $\int (1 + \cos x) dx$
32. $\int (2 - 3 \sin x) dx$
33. $\int (3x^2 - 2 \cos x) dx$
34. $\int \left(\frac{2}{\cos^2 x} - \frac{3}{\sin^2 x}\right) dx$
35. $\int 3e^u du$
36. $\int 2a^{\varphi} d\varphi$
37. $\int (x - 5e^x) dx$
38. $\int (2e^t - 3\cos t) dt$
39. $\int \frac{3dt}{2t}$
40. $\int \left(\frac{2}{x} - x\right) dx$
41. $\int \frac{6dx}{1 + x^2}$
42. $\int \frac{3dx}{4\sqrt{1 - x^2}}$
43. $\int \frac{2\cos^2 v + 1}{\cos^2 v} dv$
44. $\int \frac{\sin^2 t - 2}{\sin^2 t} dx$
45. $\int \frac{e^{2x} + e^x \sin x}{e^x} dx$
46. $\int tg^2 x dx$
47. $\int \frac{x^2 dx}{x^2 + 1}$

Практическая работа по теме «Интегралы»
Вариант 4

1. $\int x dx$
2. $\int x^9 dx$
3. $\int x^3 dx$
4. $\int 6 dx$
5. $\int 4x dx$
6. $\int \frac{1}{3} t^3 dt$

7. $\int (6-x)dx$

8. $\int (2x-x^2)dx$

9. $\int 3(x-5)dx$

10. $\int (2x^3+2x-3)dx$

11. $\int x^2(1+6x)dx$

12. $\int (x+2)^2 dx$

13. $\int 6(2x-3)^2 dx$

14. $\int x(2-x)^2 dx$

15. $\int 2\sqrt{x}dx$

16. $\int \sqrt[5]{x^2}dx$

17. $\int \frac{dx}{x^2}$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

20. $\int \frac{3dx}{4\sqrt[4]{x}}$

21. $\int \frac{xdx}{2\sqrt{x}}$

22. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{4x}dx$

23. $\int \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}}dx$

24. $\int \left(\frac{2}{x^2}-\frac{4}{\sqrt{x}}+3\sqrt[3]{x^2}\right)dx$

25. $\int \frac{2\sqrt[3]{x}-3x^2}{x^2}dx$

26. $\int \frac{x-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}dx$

27. $\int 4\sin xdx$

28. $\int 2\cos xdx$

29. $\int \frac{2dx}{\cos^2 x}$

30. $\int \frac{3dx}{\sin^2 x}$

31. $\int (1+\cos x)dx$

32. $\int (2-3\sin x)dx$

33. $\int (3x^2-2\cos x)dx$

34. $\int \left(\frac{2}{\cos^2 x}-\frac{3}{\sin^2 x}\right)dx$

35. $\int 3e^u du$

36. $\int 2a^{\varphi}d\varphi$

37. $\int (x-5e^x)dx$

38. $\int (2e^t-3\cos t)dt$

39. $\int \frac{3dt}{2t}$

40. $\int \left(\frac{2}{x}-x\right)dx$

41. $\int \frac{6dx}{1+x^2}$

42. $\int \frac{3dx}{4\sqrt{1-x^2}}$

43. $\int \frac{2\cos^2 v+1}{\cos^2 v}dv$

44. $\int \frac{\sin^2 t-2}{\sin^2 t}dx$

45. $\int \frac{e^{2x}+e^x\sin x}{e^x}dx$

46. $\int tg^2 xdx$

47. $\int \frac{x^2dx}{x^2+1}$

Практическая работа по теме «Интегралы»
Вариант 0

1. $\int x dx$
2. $\int x^4 dx$
3. $\int x^{n-1} dx$
4. $\int 5 dx$
5. $\int 2x dx$
6. $\int \frac{1}{2} t^2 dt$
7. $\int (2-x) dx$
8. $\int (3x - x^2) dx$
9. $\int 3(x-2) dx$
10. $\int (4x^3 + 4x - 3) dx$
11. $\int x^2 (1+2x) dx$
12. $\int (x+3)^2 dx$
13. $\int 4(2x-1)^2 dx$
14. $\int x(1-x)^2 dx$
15. $\int \sqrt{x} dx$
16. $\int \sqrt[3]{x^2} dx$
17. $\int \frac{dx}{x^2}$
18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$
19. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$
20. $\int \frac{3dx}{4\sqrt[4]{x}}$
21. $\int \frac{xdx}{2\sqrt{x}}$
22. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{4x} dx$
23. $\int \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}} dx$

24. $\int\left(\frac{2}{x^2}-\frac{4}{\sqrt{x}}+3\sqrt[3]{x^2}\right)dx$

25. $\int\frac{2\sqrt[3]{x}-3x^2}{x^2}dx$

26. $\int\frac{x-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}dx$

27. $\int 4\sin x dx$

28. $\int 2\cos x dx$

29. $\int\frac{2dx}{\cos^2 x}$

30. $\int\frac{3dx}{\sin^2 x}$

31. $\int(1+\cos x)dx$

32. $\int(2-3\sin x)dx$

33. $\int(3x^2-2\cos x)dx$

34. $\int\left(\frac{2}{\cos^2 x}-\frac{3}{\sin^2 x}\right)dx$

35. $\int 3e^u du$

36. $\int 2a^{\varphi}d\varphi$

37. $\int(x-5e^x)dx$

38. $\int(2e^t-3\cos t)dt$

39. $\int\frac{3dt}{2t}$

40. $\int\left(\frac{2}{x}-x\right)dx$

41. $\int\frac{6dx}{1+x^2}$

42. $\int\frac{3dx}{4\sqrt{1-x^2}}$

43. $\int\frac{2\cos^2 v+1}{\cos^2 v}dv$

44. $\int\frac{\sin^2 t-2}{\sin^2 t}dx$

45. $\int\frac{e^{2x}+e^x\sin x}{e^x}dx$

Практическая работа №54:Вычисление определённого интеграла

ЦЕЛЬ: Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Вычисление определенного интеграла».

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.
2. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности уч-ся.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

1. Ответить на контрольные вопросы:
   а) Что называется первообразной функции?
   б) Сформулируйте основное свойство первообразной.
   в) Сформулируйте три правила нахождения первообразных.
   г) Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
2. Изучить образцы решенных примеров.
3. Выполнить задания для самоконтроля.
4. Изучить условие заданий для практической работы.
5. Оформить отчет о работе.

УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

ПРИМЕР 1. Вычислите интеграл $\int_{-2}^{2}\left(-4x+4+x^2\right)dx$.

РЕШЕНИЕ. Найдем множество всех первообразных для функции $-4x+4+x^2$:

$$F(x)=-4\cdot\frac{x^2}{2}+4\cdot x+\frac{x^3}{3}+C=-2x^2+4x+\frac{x^3}{3}+C.$$

Пользуясь формулой Ньютона-Лейбница, получаем:

$$\int_{-2}^{2}\left(-4x+4+x^2\right)dx=\left(-2x^2+4x+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2}=\left(-2\cdot 2^2+4\cdot 2+\frac{2^3}{3}\right)-\left(-2\cdot(-2)^2+4\cdot(-2)+\frac{(-2)^3}{3}\right)=$$

$$=\left(-8+8+\frac{8}{3}\right)-\left(-8-8-\frac{8}{3}\right)=21\frac{1}{3}.$$

О т в е т: $21\frac{1}{3}$.

ПРИМЕР 2. Выясните, при каком отрицательном значении переменной a верно равенство

$$\int_{-2a}^{a}2x^3dx=-7{,}5\,?$$

РЕШЕНИЕ. Поскольку для $2x^3$ одной из первообразных является $\frac{x^4}{2}$,

$$\int_{-2a}^{a}2x^3dx=\left(\frac{x^4}{2}\right)\Bigg|_{-2a}^{a}=\frac{a^4}{2}-\frac{(-2a)^4}{2}=-\frac{15a^4}{2}.$$

Следовательно, нужно решить уравнение:

$$-\frac{15a^4}{2}=-7{,}5,$$

$$-\frac{15a^4}{2}=-\frac{15}{2},$$

$$a^4=1,$$

$$a=\pm 1.$$

Отрицательный корень этого уравнения – это число –1.

О т в е т: -1.

ТЕСТ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ.

Выберите правильный вариант ответа.

1. Значение $\int_{-1}^{1}\left(-6x+x^2+9\right)dx$ равно:

   а) $18\frac{1}{3}$; б) $18\frac{2}{3}$; в) $19\frac{1}{3}$.

2. Равенство $\int_{a}^{2a} x^3 dx = 3{,}75$ (где $a > 0$) верно, если a равно:

   а) 1; б) 2; в) 3.

ВАРИАНТЫ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ.

<u>Вариант 1.</u>

1. Вычислите интегралы: а) $\int_{-1}^{2} x^2 dx$; б) $\int_{0}^{\frac{\pi}{12}}\left(1+\cos 2x\right)dx$.

2. Докажите справедливость равенства: $\int_{0}^{1}\left(2x+1\right)dx = \int_{0}^{2}\left(x^3-1\right)dx$.

<u>Вариант 2.</u>

1. Вычислите интегралы: а) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} -2\sin x dx$; б) $\int_{-2}^{2}\frac{dx}{\sqrt{2x+5}}$.

2. Докажите справедливость равенства: $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx = \int_{0}^{\sqrt[3]{3}} x^2 dx$.

<u>Вариант 3.</u>

1. Вычислите интегралы: а) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}$; б) $\int_{1}^{2}\frac{dx}{\left(x+1\right)^2}$.

2. Докажите справедливость равенства: $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sin x dx = \int_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

<u>Вариант 4.</u>

1. Вычислите интегралы: а) $\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{dx}{\cos^2\left(\frac{2x}{9}\right)}$.

2. Докажите справедливость равенства: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{cos^2 x} = \int_0^1 dx$.

Вариант 5.

1. Вычислите интегралы: а) $\int_{-1}^{2} - x^3 dx$; б) $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) dx$

2. Верно ли неравенство: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{sin^2 x} < \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{x^2}$?

Вариант 6.

1. Вычислите интегралы: а) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} - \frac{dx}{sin^2 x}$; б) $\int_0^2 (1+3x)^4 dx$.

3. Верно ли неравенство: $\int_{-1}^{1} x^4 dx < \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$?

Вариант 7.

1. Вычислите интегралы: а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 cos\, x dx$; б) $\int_2^7 \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$.

2. Верно ли неравенство: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{cos^2 x} > \int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$?

Вариант 8.

1. Вычислите интегралы: а) $\int_1^5 x^4 dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\, 2x dx$.

2. Верно ли неравенство: $\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} cos\, x dx > \int_2^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{x^2}$?

Практическая работа №55: Применение определенного интеграла для нахождения площади криволинейной трапеции

Цель: научиться определять форму полученной фигуры в сравнении с криволинейной трапецией, аналитически выражать и вычислять площадь полученной фигуры.

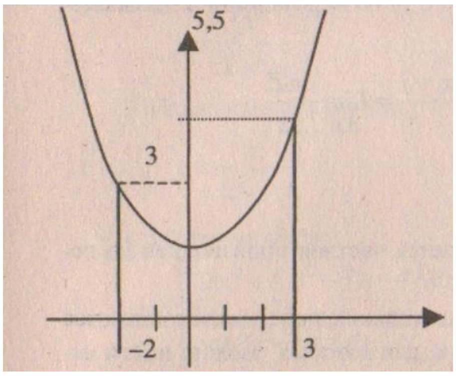
Содержание

Часть 1. Теоретическая

Пример.

Вычислить площадь земельного участка, если на плоскости он ограничен линиями: $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$; $y = 0$; $x = -2$; $x = 3$.

Решение. $S = \int_{-2}^{3}(\frac{1}{2}x^2 + 1)dx = (\frac{1}{2}x^3 + x)\Big|_{-2}^{3} = (\frac{1}{6}3^3 + 3) - \left(\frac{1}{6}(-2)^3 - 2\right) = 10\frac{5}{6}$.



Таким образом, площадь земельного участка составляет $10\frac{5}{6}$единиц.

Пример.

Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4x$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 4$.

Решение. $V = \pi\int_0^4 4x\,dx = 2\pi x^2\Big|_0^4 = 32\pi$. В решении использована формула $V = \pi\int_a^b f(x)\,dx$.

Пример.

Вычислить массу стержня, расположенного на отрезке $[0;6]$, если плотность задается функцией $p(x) = 2x^2 + 3$.

Решение. Используем формулу $m = \int_a^b p(x)\,dx$, где $p(x)$ - плотность стержня.

$m = \int_0^6(2x^2 + 3)\,dx = (\frac{2}{3}x^3 + 3x)\Big|_0^6 = \frac{2\cdot6^3}{3} + 3\cdot 6 = 162$.

Часть 2. Практическая

Задание 1. Воспользовавшись соответствующим приложением определенного интеграла к задачам геометрии, найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

№	Задание	№	Задание
1	$y = x^2$, $y = 7x - 12$	6	$y = \ln x$, $y = 1$ $y = 4$
2	$y = x^2$, $y = \frac{1}{3}x^3$	7	$y = x^2 - 2x + 3$, $y = 3x - 1$
3	$y = \ln x$, $x = e^{-1}$, $x = e$	8	$y = x^3 - 3x$, $y = x$
4	$y = 2^x$, $x = 0$, $x = e$	9	$y = -x^3$, $y = -9x$
5	$y = 9 - x^2$, $y = 0$	10	$y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^3$

Задание 2. Решите задачу.

№	Задание	№	Задание
1	Скорость движения точки определяется по закону v=$(2t-1)^2$м/с. Найдите путь S, пройденный точкой за 3-ю секунду	6	Скорость движения точки определяется по закону v=$(3t-2)^2$м/с. Найдите путь S, пройденный точкой за 2-ю секунду
2	Скорость движения точки определяется по закону v=$(3t+2)^2$м/с. Найдите путь S, пройденный точкой за 4-ю секунду	7	Скорость движения точки определяется по закону v= $3t^2+2t+1$м/с. Найдите путь S, пройденный точкой за 10-ю секунду
3	Скорость движения точки определяется по закону v=$(2-3t)^2$м/с. Найдите путь S, пройденный точкой за 4-ю секунду	8	Скорость движения точки определяется по закону v=$(4t-3)^2$м/с. Найдите путь S, пройденный точкой за 4-ю секунду
4	Скорость движения точки определяется по закону v=$(3t-1)^2$м/с. Найдите путь S, пройденный точкой за 2-ю секунду	9	Скорость движения точки определяется по закону v=$t(t-2)^2$м/с. Найдите путь S, пройденный точкой за 4-ю секунду
5	Скорость движения точки определяется по закону v=$(2t+1)^2$м/с. Найдите путь S, пройденный точкой за 3-ю секунду	10	Скорость движения точки определяется по закону v= $9t^2-8t$ м/с. Найдите путь S, пройденный точкой за 4-ю секунду

Задание 3. Найдите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями. Сделайте чертеж.

№	Задание	№	Задание
1	$y=\sqrt{x}$, y=0, x=9	6	y=x+1, x=0, x=2, y=0
2	y=2+x, x=1, x=2, y=0	7	y=3x, x=2, y=0
3	y=2x, x=1, x=4, y=0	8	$y=\sqrt{x}$, y=0, x=1, x=4
4	y=2-x, x=0, y=0	9	y= 2x, x=3, y=0
5	y=x, x=5, y=0	10	$y=\sqrt{x}$, y=0, x=4

Вопросы к практическому занятию

1. Сформулируйте определение криволинейной трапеции.
2. Сформулируйте определение первообразной.
3. Сколько первообразных может иметь каждая функция?
4. Каков алгоритм вычисления площади криволинейной трапеции?
5. Какие известны правила вычисления первообразных?
6. По какой формуле вычисляется площадь криволинейной трапеции?

Перечислите виды задач, решаемые с помощью определенного интегр

Практическая работа №56: Элементы цилиндра. Элементы конуса. Элементы сферы и шара. Площадь поверхности

Цели урока:

Дидактическая - способствовать формированию умений и навыков при решении задач по вычислению площади поверхности цилиндра и конуса.

Задачи:

1.Уметь применять формулы вычисления площади поверхности цилиндра и конуса.

2. Уметь решать задачи на вычисление площади поверхности цилиндра и конуса.

Проверка готовности выполнения практической работы:

Фронтальный опрос.

Закончить предложение:

1. Цилиндром называется тело, которое состоит из…
2. Конусом называется тело, которое состоит из …
3. Образующей цилиндра называется отрезок, соединяющий ..
4. Образующей конуса называется отрезок, соединяющий ..
5. Радиусом цилиндра и конуса называется …
6. Основанием цилиндра и конуса является …
7. Высотой цилиндра называется отрезок соединяющий …
8. Высотой конуса называется отрезок соединяющий …
9. Площадь поверхности цилиндра вычисляется..
10. Площадь поверхности конуса вычисляется …
11. Шаром называется тело которое состоит из …
12. Площадь поверхности шара вычисляется....

Обучающийся должен знать:

- основные элементы цилиндра, конуса, шара;
- формулы вычисления площади поверхности цилиндра, конуса, шара.

Обучающийся должен уметь:

- вычислять площадь боковой поверхности цилиндра и конуса;
- вычислять площадь поверхности шара.
- вычислять площадь полной поверхности цилиндра и конуса;

Рекомендации по выполнению практической работы:

1. Прочтите задание.
2. Запишите условие задачи.
3. Запишите кратко дано
4. Выполните рисунок.
5. Запишите решение и ответ.

Краткие теоретические положения:

Цилиндр (рис. 1.18)

Площадь боковой поверхности:

$S_{бок} = 2\pi RH.$

Площадь полной поверхности:

Конус (рис. 1.19)

Площадь боковой поверхности:

$S_{бок} = \pi RL.$

Площадь полной поверхности:

$S_{цил} = 2\pi RH + 2\pi R^2.$ $S_{кон} = \pi RL + \pi R^2.$

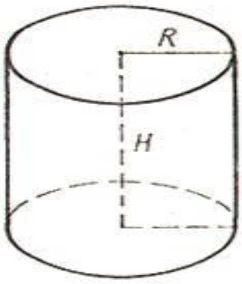


Рис. 1.18

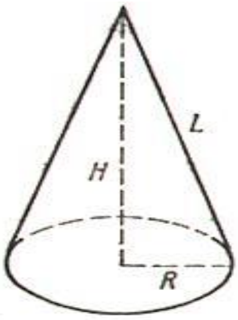
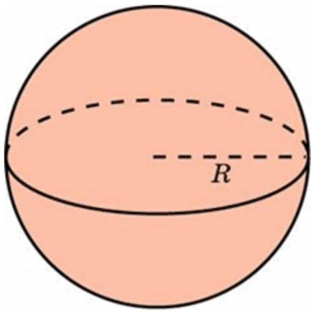


Рис. 1.19

Шар



Площадь поверхности S и объём V шара радиуса r определяются формулами:

- $S = 4\pi r^2$
- $S = \pi d^2$
- $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Задача 1.

Площадь боковой поверхности цилиндра равна 21 π, а диаметр основания равен 7. Найдите высоту цилиндра.

Решение.

Высота цилиндра равна

$h = \frac{S_{бок}}{2\pi R} = \frac{S_{бок}}{\pi D} = \frac{21\pi}{7\pi} = 3.$

Ответ: 3.

Задача 2.

Площадь основания конуса 36π см^2 , а его образующая 10 см.

Вычислить боковую поверхность конуса.

Решение.

Зная площадь основания, найдем его радиус.

$S = \pi R^2$, $36\pi = \pi R^2$, $R^2 = 36$, $R = 6$

Площадь боковой поверхности конуса найдем по формуле:

$S = \pi Rl$, где R - радиус основания , l - длина образующей,

откуда

$$S = \pi \cdot 6 \cdot 10 = 60\pi$$

Ответ: 60π см^2.

Задача 3. Объем шара равен 288 π. Найдите площадь боковой поверхности конуса вписанного в шар. Основанием конуса является больший круг.

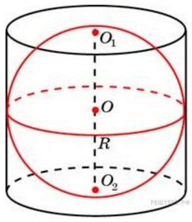
Решение.

Объем шара радиуса R вычисляется по формуле $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, откуда найдем радиус шара

$$R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 288\pi}{4\pi}} = 6$$
.

Площадь боковой поверхности конуса равна $S = \pi Rl$, $l = R\sqrt{2}$.
следовательно $S = \pi 6 \cdot 6\sqrt{2} = 36\sqrt{2}\pi$ О т в е т: $36\sqrt{2}\pi$.

Задача 4. Около шара описан цилиндр, площадь поверхности которого равна 18. Найдите площадь поверхности шара.



Решение.

По построению радиусы шара и основания цилиндра равны. Площадь поверхности цилиндра, с радиусом основания r и высотой $2r$ равна

$$S = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 2r = 6\pi r^2.$$

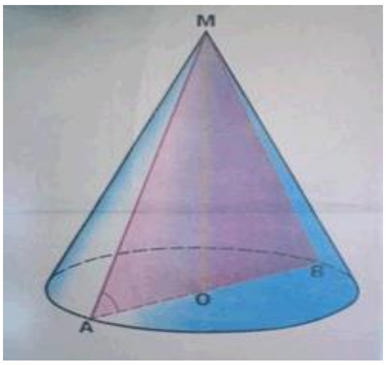
Площадь поверхности шара радиуса r равна $S = 4\pi r^2$, то есть в 1,5 раза меньше площади поверхности цилиндра. Следовательно, площадь поверхности шара равна 12.

О т в е т: 12.

Задания для практической работы

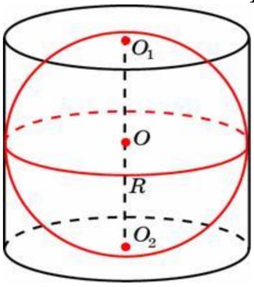
1 вариант

1. Площадь осевого сечения прямого круглого цилиндра равна 24. Найдите площадь его боковой поверхности.
2. Высота цилиндра 6дм, радиус основания 5дм. Найдите боковую поверхность цилиндра.
3. Диагональ осевого сечения цилиндра наклонена к плоскости основания под углом 60° и равна 20 см. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
4. Высота конуса равна 6, образующая равна 10. Найдите площадь боковой поверхности конуса.



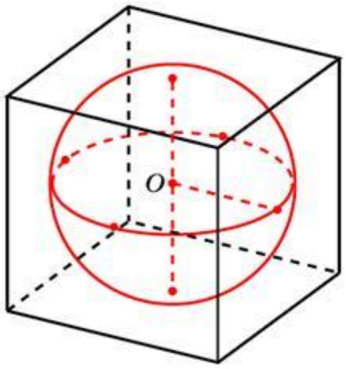
5. Образующая конуса равна 18 см и наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите площадь полной поверхности конуса.
6. Во сколько раз уменьшится площадь боковой поверхности конуса,
если радиус его основания уменьшить в 1,5 раза?
7. Во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить в три раза?
8. Радиусы трех шаров равны 6, 8 и 10. Найдите радиус шара, объем которого равен сумме их объемов.
9. Площадь большого круга шара равна 3. Найдите площадь поверхности шара.

10. Объем шара равен 972 π . Найдите площадь его поверхности.



11. Около шара описан цилиндр, площадь поверхности которого равна 81. Найдите площадь поверхности шара.

12. В куб с ребром 3 вписан шар. Найдите площадь поверхности этого шара.

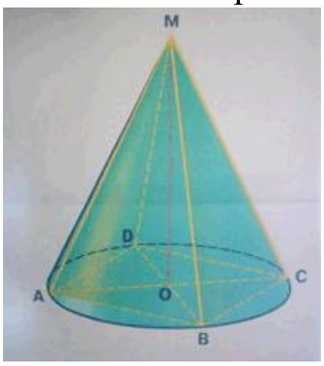


За каждое задание практической работы получаете 2 баллов.

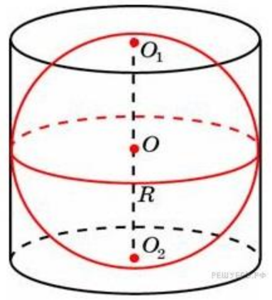
Отметка	*Число баллов, необходимое для получения отметки*
«3» (удов.)	*8 - 12*
«4» (хорошо)	*13-20*
«5» (отлично)	*Более 20*

2 вариант

1. Площадь осевого сечения прямого круглого цилиндра равна 4. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
2. Диагональ осевого сечения цилиндра 13 см, высота 5см. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
3. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 8√2 см и образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.
4. Радиус основания конуса равен 3, высота равна 4. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

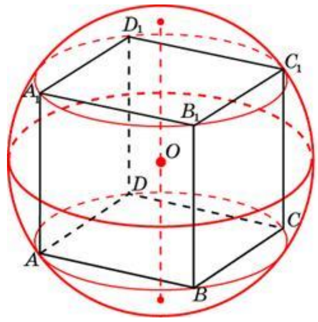


5. В конус, высота которого 20 см, вписана пирамида. Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 18 см и 20 см. Найдите образующую и радиус основания конуса, площадь поверхности конуса.
6. Площадь осевого сечения конуса равна 0,6 $см^2$. Высота конуса равна 1,2 см. Вычислить площадь полной поверхности конуса.
7. Во сколько раз увеличится площадь поверхности шара, если его радиус увеличить в два раза?
8. Радиусы двух шаров равны 6, 8. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей их поверхностей.
9. Площадь большого круга шара равна 1. Найдите площадь поверхности шара.
10. Объем шара равен 36 π. Найдите площадь его поверхности



11. Около шара описан цилиндр, площадь поверхности которого равна 54. Найдите площадь поверхности шара.

12. Около куба с ребром $\sqrt{3}$ описан шар. Найдите площадь поверхности этого шара.



За каждое задание практической работы получаете 2 баллов.

Отметка	*Число баллов, для получения отметки*
«3» (удов.)	*8 - 12*
«4» (хорошо)	*13-20*
«5» (отлично)	*Более 20*

Вопросы для самоконтроля

1. Как вычисляется площадь поверхности цилиндра?
2. Как вычисляется площадь поверхности конуса?
3. Как вычисляется площадь поверхности шара?

Практическая работа №57: Правило суммы. Правило произведения

Цель: Отработка навыков решения задач

Теоретическая часть:

Комбинаторика – это раздел математики, посвящённый решению задач выбора и расположения элементов некоторого множества в соответствии с заданными правилами. Комбинаторика изучает комбинации и перестановки предметов, расположение элементов, обладающее заданными свойствами. Обычный вопрос в комбинаторных задачах: сколькими способами….

К комбинаторным задачам относятся также задачи построения магических квадратов, задачи расшифровки и кодирования.

Рождение комбинаторики как раздела математики связано с трудами великих французских математиков 17 века Блеза Паскаля (1623–1662) и Пьера Ферма (1601–1665) по теории азартных игр. Эти труды содержали принципы определения числа комбинаций элементов конечного множества. С 50-х годов 20 века интерес к комбинаторике возрождается в связи с бурным развитием кибернетики.

Основные правила комбинаторики – это **правило суммы** и **правило произведения**.

- **Правило суммы**

Если некоторый элемент А можно выбрать **n** способами, а элемент В можно выбрать **m** способами, то выбор «либо А, либо В» можно сделать **n** + **m** способами.

Например, Если на тарелке лежат 5 яблок и 6 груш, то один плод можно выбрать 5 + 6 = 11 способами.

- **Правило произведения**

Если элемент А можно выбрать **n** способами, а элемент В можно выбрать **m** способами, то пару А и В можно выбрать **n • m** способами.

Например, если есть 2 разных конверта и 3 разные марки, то выбрать конверт и марку можно 6 способами (2 • 3 = 6).

Правило произведения верно и в том случае, когда рассматривают элементы нескольких множеств.

Например, если есть 2 разных конверта, 3 разные марки и 4 разные открытки, то выбрать конверт, марку и открытку можно 24 способами (2 • 3 • 4 = 24).

Произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно называется n – факториалом и обозначается символом n!

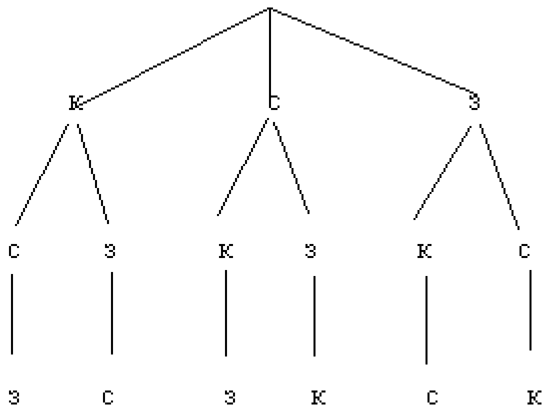
n! = 1 • 2 • 3 • 4 •…• n.
Например, 5! = 1 • 2 • 3 • 4 • 5 = 120.

Принято считать 0! равным 1.
Число перестановок из n равна n!

Например, если есть 3 шарика – красный, синий и зелёный, то выложить их в ряд можно 6 способами (3 • 2 • 1 = 3! = 6).

Иногда комбинаторная задача решается с помощью построения **дерева возможных вариантов**.

Например, решим предыдущую задачу о 3-х шарах построением дерева.



Практическая часть

ЗАДАЧИ и решения

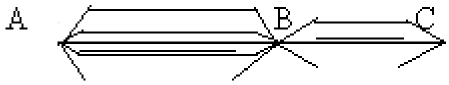
1. В вазе 6 яблок, 5 груш и 4 сливы. Сколько вариантов выбора одного плода?

6 + 5 + 4 = 15

Ответ: 15 вариантов.
2. Сколько существует вариантов покупки одной розы, если продают 3 алые, 2 алые и 4 жёлтые розы?

3 + 2 + 4 = 9

Ответ: 9 вариантов.
3. Из города А в город В ведут пять дорог, а из города В в город С ведут три дороги. Сколько путей, проходящих через В, ведут из А в С?



5 • 3 = 15

Ответ: 15 путей.
4. Сколькими способами можно составить пару из одной гласной и одной согласной букв слова «платок»?

гласные: а, о – 2 шт.
согласные: п, л, т, к – 4 шт.
2 • 4 = 8

Ответ: 8 способами.
5. Сколько танцевальных пар можно составить из 8 юношей и 6 девушек?

6 • 8 = 48

Ответ: 48 пар.
6. В столовой есть 4 первых блюда и 7 вторых. Сколько различных вариантов обеда из двух блюд можно заказать?

4 • 8 = 28

Ответ: 28 вариантов.

7. Сколько различных двузначных чисел можно составить, используя цифры 1, 4 и 7, если цифры могут повторяться?

1 цифра – 3 способа
2 цифра – 3 способа
3 цифра – 3 способа
3 • 3 = 9

Ответ: 9 различных двузначных чисел.
8. Сколько различных трёхзначных чисел можно составить, используя цифры 3 и 5, если цифры могут повторяться?

1 цифра – 2 способа
2 цифра – 2 способа
3 цифра – 2 способа
2 • 2 • 2 = 8

Ответ: 8 различных чисел.
9. Сколько различных двузначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, если цифры могут повторяться?

1 цифра – 3 способа
2 цифра – 4 способа
3 • 4 = 12

Ответ: 12 различных чисел.
10. Сколько существует трёхзначных чисел, у которых все цифры чётные?

Чётные цифры – 0, 2, 4, 6, 8.

1 цифра – 4 способа
2 цифра – 5 способов
3 цифра – 5 способов
4 • 5 • 5 = 100

Ответ: существует 100 чисел.
11. Сколько существует четных трёхзначных чисел?

1 цифра – 9 способов (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)
2 цифра – 10 способов (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)
3 цифра – 5 способов (0, 2, 4, 6, 8)
9 • 10 • 5 = 450

Ответ: существует 450 чисел.
12.Сколько различных трёхзначных чисел можно составить из трёх различных цифр 4, 5, 6?

1 цифра – 3 способа
2 цифра – 2 способа
3 цифра – 1 способ
3 • 2 • 1 = 6

Ответ: 6 различных чисел.
13. Сколькими способами можно обозначить вершины треугольника, используя буквы A, B, C, D?

1 вершина – 4 способа
2 вершина – 3 способа
3 вершина – 2 способа
4 • 3 • 2 = 24

Ответ: 24 способа.
14. Сколько различных трёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5,при условии, что ни одна цифра не повторяется?

1 цифра – 5 способов
2 цифра – 4 способа
3 цифра – 3 способа
5 • 4 • 3 = 60

Ответ: 60 различных чисел.
15. Сколько различных трёхзначных чисел, меньших 400, можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, 9, если любая из этих цифр может быть использована только один раз?

1 цифра – 2 способа
2 цифра – 4 способа
3 цифра – 3 способа
2 • 4 • 3 = 24

Ответ: 24 различных числа.
16. Сколькими способами можно составить флаг, состоящий из трёх горизонтальных полос различных цветов, если имеется материал шести цветов?

1 полоса – 6 способов
2 полоса – 5 способов
3 полоса – 4 способа
6 • 5 • 4 = 120

Ответ: 120 способов.
17. Из класса выбирают 8 человек, имеющих лучшие результаты по бегу. Сколькими способами можно составить из них команду из трёх человек для участия в эстафете?

1 человек – 8 способов
2 человек – 7 способов
3 человек – 6 способов
8 • 7 • 6 = 336

Ответ: 336 способов.
18. В четверг в первом классе должно быть четыре урока: письмо, чтение, математика и физкультура. Сколько различных вариантов расписания можно составить на этот день?

1 урок – 4 способа
2 урок – 3 способа
3 урок – 2 способа
4 урок – 1 способ
4 • 3 • 2 • 1 = 24

Ответ: 24 варианта.
19. В пятом классе изучаются 8 предметов. Сколько различных вариантов расписания можно составить на понедельник, если в этот день должно быть 5 уроков и все уроки разные?

1 урок – 8 вариантов
2 урок – 7 вариантов
3 урок – 6 вариантов
4 урок – 5 вариантов
5 урок – 4 варианта
8 • 7 • 6 • 5 • 4 = 6720

Ответ: 6720 вариантов.
20. Шифр для сейфа составляется из пяти различных цифр. Сколько различных вариантов составления шифра?

1 цифра – 5 способов
2 цифра – 4 способа
3 цифра – 3 способа
4 цифра – 2 способа
5 цифра – 1 способ
5 • 4 • 3 • 2 • 1 = 120

Ответ: 120 вариантов.
21. Сколькими способами можно разместить 6 человек за столом, на котором поставлено 6 приборов?

6 • 5 • 4 • 3 • 2 • 1 = 720

Ответ: 720 способов.
22. Сколько вариантов семизначных телефонных номеров можно составить, если исключить из них номера, начинающиеся с нуля и 9?

1 цифра – 8 способов
2 цифра – 10 способов
3 цифра – 10 способов
4 цифра – 10 способов
5 цифра – 10 способов
6 цифра – 10 способов
7 цифра – 10 способов
8 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10 = 8.000.000

Ответ: 8.000.000 вариантов.

23. Телефонная станция обслуживает абонентов, у которых номера телефонов состоят из 7 цифр и начинаются с 394. На сколько абонентов рассчитана эта станция?

№ телефона 394 $\underbrace{****}_{\text{4 цифры}}$

10 • 10 • 10 • 10 = 10.000

Ответ: 10.000 абонентов.
24. Имеется 6 пар перчаток различных размеров. Сколькими способами можно выбрать из них одну перчатку на левую руку и одну перчатку на правую руку так, чтобы эти перчатки были различных размеров?

Левые перчатки – 6 способов
Правые перчатки – 5 способов (6 перчатка того же размера, что и левая)
6 • 5 = 30

Ответ: 30 способов.
25 . Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составляют пятизначные числа, в которых все цифры разные. Сколько таких чётных чисел?

5 цифра – 2 способа (две чётные цифры)
4 цифра – 4 способа
3 цифра – 3 способа
2 цифра – 2 способа
1 цифра – 1 способ
2 • 4 • 3 • 2 • 1 = 48

Ответ: 48 чётных чисел.
26. Сколько существует четырёхзначных чисел, составленных из нечётных цифр и делящихся на 5?

Нечётные цифр – 1, 3, 5, 7, 9.
Из них делятся на 5 – 5.

4 цифра – 1 способ (цифра 5)
3 цифра – 4 способа
2 цифра – 3 способа
1 цифра – 2 способа
1 • 4 • 3 • 2 = 24

Ответ: 24 числа.
27. Сколько существует пятизначных чисел, у которых третья цифра – 7, последняя цифра – чётная?

1 цифра – 9 способов (все, кроме 0)
2 цифра – 10 способов
3 цифра – 1 способ (цифра 7)
4 цифра – 10 способов
5 цифра – 5 способов (0, 2, 4, 6, 8)
9 • 10 • 1 • 10 • 5 = 4500

Ответ: 4500 чисел.
28. Сколько существует шестизначных чисел, у которых вторая цифра – 2, четвёртая – 4, шестая – 6, а все остальные – нечётные?

1 цифра – 5 вариантов (из 1, 3, 5, 7, 9)
2 цифра – 1 вариант (цифра 2)

3 цифра – 5 вариантов
4 цифра – 1 вариант (цифра 4)
5 цифра – 5 вариантов
6 цифра – 1 вариант (цифра 6)
5 • 1 • 5 • 1 • 5 • 1 = 125

Ответ: 125 чисел.
29.Сколько различных чисел, меньших миллиона, можно записать с помощью цифр 8 и 9?

Однозначных – 2
Двузначных – 2 • 2 = 4
Трёхзначных – 2 • 2 • 2 = 8
Четырёхзначных – 2 • 2 • 2 • 2 =16
Пятизначных – 2 • 2 • 2 • 2 • 2 = 32
Шестизначных – 2 • 2 • 2 • 2 2 • 2 = 64
Всего: 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 126
Ответ: 126 чисел.
30. В футбольной команде 11 человек. Нужно выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

Капитан – 11 способов
Заместитель – 10 способов
11 • 10 = 110

Ответ: 110 способов.
31.В классе учатся 30 человек. Сколькими способами из них можно выбрать старосту и ответственного за проездные билеты?

Староста – 30 способов
Ответ. за билеты – 29 способов
30 • 29 = 870

Ответ: 870 способов.
32. В походе участвуют 12 мальчиков, 10 девочек и 2 учителя. Сколько вариантов групп дежурных из трёх человек (1 мальчик, 1 девочка, 1 учитель) можно составить?

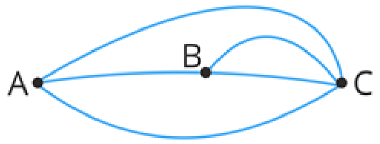
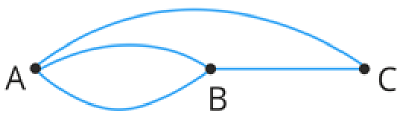
12 • 10 • 2 = 240

Ответ: 240 способов.
33. Сколько комбинаций из четырёх букв русского алфавита (в алфавите всего 33 буквы) можно составить при условии, что 2 соседние буквы будут разными?

1 буква – 33 способа
2 буква – 32 способа
3 буква – 32 способа
4 буква – 32 способа
33 • 32 • 32 • 32 = 1.081.344

Ответ: 1.081.344 комбинаций.

№	1 вариант	№	2 вариант
1	По телевизору в субботу показывают 5 приключенче ских фильмов, 2 комедии и 2 фильма ужасов. Запиши, сколькими различными	1	В группе 11 человек имеют «5» по математике, 6 человек — «5» по философии. В сессии 2 экзамена. Известно, что 3 человека сдали сессию отлично. Сколько человек имеют хотя бы одну пятерку в сессии?

	способами можно выбрать один из всех предложенных фильмов?		
2	Отметь, сколькими различными способами можно попасть из города А в город С, если на данном рисунке схематически изображены варианты путей? 	2	В классе 26 человек, из них 8 человек изучают язык программирования Бейсик, и 9 человек изучают Паскаль. Сколько человек не изучают языки программирования, если известно, что других языков в этом классе не изучают и каждый человек знает не более одного языка программирования?
3	На дне рождения Сергея присутствовали 4 мальчика и 4 девочки. Сергей станцевал 8 парных танцев, Игорь — 10 парных танцев, Андрей и Дима — по 8 танцев, Света — 8 танцев, Илона — 9 танцев, а Ира — 7 танцев. Сколько парных танцев станцевала Наташа?	3	Сосчитай, сколькими различными способами можно попасть из города А в город С, если на данном рисунке схематически изображены варианты путей? 
4	В магазине продаются синие, красные, жёлтые и коричневые рубашки размеров M, L и XL. Определи, сколько различных рубашек можно купить.	4	Найди, сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 0;1;2;3;4;5, если эти цифры **не могут** повторяться.
5	Даны цифры 0,1,2,3,4,5,6,7,8. Вычисли, сколько различных трёхзначных чисел, делящихся на 2, можно составить из этих цифр, если цифры не должны повторяться.	5	У учеников 7 класса в четверг могут быть только следующие предметы: литература, геометрия, биология, физика, история и физическая культура. Определи, сколько существует вариантов поставить 6 различных уроков в четверг.

Практическая работа №58 Перестановки. Перестановки без повторений. Размещения. Размещения с повторениями

Цель работы:

- научиться решать задачи по комбинаторике;
- научиться применять формулы комбинаторики при решении задач.

В результате выполнения практической работы студент должен:

знать:

- формулы комбинаторики;

уметь:

- применять формулы комбинаторики при решении задач.

Краткие теоретические сведения

1 а) Перестановки $P_n = n!$ По определению, считают, что 0!=1,1!=1.

б) Перестановки с повторениями $P_n(m_1, m_2, ..., m_k) = \dfrac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot ... \cdot m_n!}$

Пример 1. Сколько слов можно получить, переставляя буквы в слове ГОРА?

1) *Что делаем с буквами (меняем местами – значит перестановки)*
2) *Повторяются ли буквы (нет – значит перестановки без повторения)*

Решение. $P_n = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

Пример 2. Сколько слов можно получить, переставляя буквы в слове ИНСТИТУТ?

1) *Что делаем с буквами (меняем местами – значит перестановки)*
2) *Повторяются ли буквы (да – значит перестановки с повторениями)*

Решение.

$$P_n(2,1,1,3,1) = \frac{8!}{2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 3! \cdot 1!} = 3360$$

2 а) Сочетания $C_n^m = \dfrac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$

б) Сочетания с повторениями $\tilde{C}_n^m = \dfrac{(n+m-1)!}{m! \cdot (n-1)!}$

Пример 1. Сколькими способами из колоды в 36 карт можно выбрать 3 карты?

1) *3 из 36*
2) *Порядок важен? (нет – значит сочетания)*

3) *Повторяться могу? (нет – значит сочетания без повторений)*

Решение. $C_n^m = \dfrac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$

Пример 2. В кондитерском магазине продавались 4 сорта пирожных: наполеоны, эклеры, песочные и картошка. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

1) *7 из 4*
2) *Порядок важен? (нет – значит сочетания)*
3) *Повторяться могу? (да – значит сочетания с повторениями)*

Решение.

$$\tilde{C}_4^7 = \frac{(4+7-1)!}{7!\cdot(4-1)!} = \frac{10!}{7!\cdot 3!} = 120$$

3 а) Размещения $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$

б) Размещения с повторениями $\tilde{A}_n^m = n^m$

Пример 1. Сколько различных 3-х значных цифр можно составить из 2,4,6,8, если цифры не повторяются?

1) *3 из 4*
2) *Порядок важен? (да – значит размещения)*
3) *Цифры повторяются (нет)*

Решение. $A_4^3 = \dfrac{4!}{(4-3)!} = \dfrac{4!}{1!} = 24$

Пример 2. Сколько различных 3-х значных цифр можно составить из 2,4,6,8?

1) *3 из 4*
2) *Порядок важен? (да – значит размещения)*
3) *Цифры повторяются (да – значит размещения с повторениями)*

Решение. $\tilde{A}_4^3 = 4^3 = 64$

Образец решения задач

Перестановки, сочетания и размещения без повторения

1. Сколько четырёхзначных чисел можно составить из четырёх карточек с цифрами 1, 5, 7, 9? $P_n = 4! = 24$

2. Сколько трёхзначных чисел можно составить из четырёх карточек с цифрами 1, 5, 7, 9, если цифры не повторяются?

$$A_4^3 = 24$$

3. Сколькими способами из колоды в 36 карт можно выбрать 3 карты?

$$C_{36}^3 = 7140$$

4. Сколькими способами из колоды в 36 карт можно выбрать 1 даму и 2 туза?

$$C_4^1 \cdot C_4^2 = 4 \cdot 6 = 24$$

5. Сколькими способами можно рассадить 6 человек за столом?

$$P_n = 6! = 720$$

6. Сколькими способами можно рассадить 3 мальчика и 3 девочки за столом?

$$P_n = 6! = 720$$

7. Сколькими способами можно рассадить в 2 ряда 3 мальчика и 3 девочки?

$$P_n = 3! \cdot 3! = 6 \cdot 6 = 36$$

8. Студенческая группа состоит из 23 человек, среди которых 10 юношей и 13 девушек. Сколькими способами можно выбрать 2-х человек одного пола?

$$C_{10}^2 + C_{13}^2 = 45 + 78 = 123$$

9. У Васи дома живут 4 кота.

а) сколькими способами можно рассадить котов по углам комнаты?

$$P_n = 4! = 24$$

б) сколькими способами можно отпустить гулять котов?

$$C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$$

в) сколькими способами Вася может взять на руки 2-х котов (одного на левую, другого – на правую)?

$$A_4^2 = 12$$

10. Группу из 20 студентов нужно разделить на 3 бригады, причем в первую бригаду должны входить 3 человека, во вторую — 5 и в третью — 12. Сколькими способами это можно сделать.

$$C_{20}^3 \cdot C_{17}^5 \cdot C_{12}^{12} = 1140 \cdot 6188 \cdot 1 = 7054320$$

11. Для участия в команде тренер отбирает 5 мальчиков из 10. Сколькими способами он может сформировать команду, если 2 определенных мальчика должны войти в команду? *(2 мальчика точно входят, т.е. осталось выбрать 3 из 8)*

$$C_8^3 = 56$$

12. В шахматном турнире принимали участие 15 шахматистов, причем каждый из них сыграл только одну партию с каждым из остальных. Сколько всего партий было сыграно в этом турнире?

$$C_{15}^2 = 105$$

13. Сколько различных дробей можно составить из чисел 3, 5, 7, 11, 13, 17 так, чтобы в каждую дробь входили 2 различных числа?

$$A_6^2 = 30$$

14. Имеется 3 фрукта. Сколькими способами можно взять **хотя бы один** фрукт?

$$C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 3 + 3 + 1 = 7$$

Перестановки, сочетания и размещения с повторениями

15. Алексей занимается спортом, причём 4 дня в неделю – лёгкой атлетикой, 2 дня – силовыми упражнениями и 1 день отдыхает. Сколькими способами он может составить себе расписание занятий на неделю?

$$\tilde{P}_n = \frac{7!}{4! \cdot 2!} = 105$$

16. Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 ладьи, 2 коня, 2 слона, ферзь и король) на первой линии шахматной доски?

$$\tilde{P}_n = \frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 5040$$

17. В кошельке находится достаточно большое количество рублей, 2-х, 5-ти и десятирублёвых монет. Сколькими способами можно извлечь три монеты из кошелька?

$$\tilde{C}_3^3 = \frac{(3+3-1)!}{3! \cdot 2!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

18. В коробке лежат шары трех цветов—красного, синего и зеленого. Шары одного цвета считаются одинаковыми. Вопрос: сколькими способами можно составить набор из двух шаров?

$$\tilde{C}_3^2 = \frac{(2+3-1)!}{2! \cdot 2!} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$$

19. Возьмем буквы Б, А, Р. Какие размещения из этих букв, взятых по две, можно получить? Сколько таких наборов получиться, если: 1) буквы в наборе не повторяются; 2) буквы могут повторяться?

1) $A_3^2 = 6$

2) $\tilde{A}_3^2 = 3^2 = 9$

20. Сколько существует четырёхзначных пин-кодов?

$$\tilde{A}_{10}^4 = 10^4 = 10000$$

Практическая часть

1. В школьной столовой на первое можно заказать борщ, солянку, грибной суп, на второе - мясо с макаронами, рыбу с картошкой, курицу с рисом, а на третье - чай и компот. Сколько различных обедов можно составить из указанных блюд?

2. В школьной столовой на первое можно заказать борщ, солянку, грибной суп, на второе - мясо с макаронами, рыбу с картошкой, курицу с рисом, а на третье - чай и компот. Сколько различных обедов переставить буквы в слове абракадабра?

3. Сколькими способами можно разместить восемь пассажиров в три вагона?

4. Из учащихся пяти 11 классов нужно выбрать двоих дежурных. Сколько пар дежурных можно составить (ученики в паре не должны быть из одного класса)?

5. Сколько различных двузначных чисел можно составить при помощи цифр 4, 7, 9? (Цифры в записи числа не повторяются).

6. Сколько различных трёхзначных чисел можно составить с помощью цифр 1, 3, 7?

7. Саша, Петя, Денис, Оля, Настя часто ходят в кафе. Каждый раз, обедая там, они рассаживаются по-разному. Сколько дней друзья смогут это сделать без повторения?

8. Секретный замок состоит из 3 барабанов, на каждом из которых можно выбрать цифры от 0 до 9. Сколько различных вариантов выбора шифра существует?

9. К 60-летию Победы группа школьников отправилась по местам боевых действий в Смоленской области. Они планировали осуществить поход по маршруту деревни Сосновка-Быковка- Масловка- Видово. Из С в Б можно проплыть по реке или пройти пешком, из Б в М- пешком или на автобусе, из М в В - по реке, пешком или автобусе. Сколько вариантов похода есть у щкольников?
10. В начале игры каждому игроку раздается 6 карт из колоды, в которой 36 различных карт. Сколько существует различных комбинаций карт, которые игрок может получить в начале игры?

11. В 8 “а” классе лучше всех математику знают 5 учеников: Вася, Дима, Олег, Катя и Аня. На олимпиаду по математике нужно отправить пару, состоящую из 1 мальчика и 1 девочки. Сколькими способами учительница может эту пару выбрать?

12. На прививку в медпункт отправились 7 друзей. Сколькими разными способами они могут встать в очередь у медицинского кабинета?

13. На выборах победили 9 человек - Сафонов, Николаев, Петров, Кулаков, Мишин, Гусев, Володин, Афонин, Титов. Из них нужно выбрать председателя, заместителя и профорга. Сколькими способами это можно сделать?

14. В лифт 12-этажного дома сели 3 пассажира. Каждый независимо от других с одинаковой вероятностью может выйти на любом (начиная со 2-го) этаже. Сколькими способами люди могут выйти на разных этажах?

15. Сколько нечетных трёхзначных чисел можно составить из цифр 3, 4, 8, 6? (Цифры в записи числа не могут повторяться).

Контрольные вопросы

1 Формулы комбинаторики: перестановки, размещения и сочетания с повторениями и без.

Практическая работа №59: Сочетания и их свойства

Цель: Отработать навыки решения задач

Теоретическая часть

Сочетания (без повторений)

Пусть множество *X* состоит из *n* элементов.

Определение. Любое *k*-элементное подмножество *Y* множества *X* называется ***сочетанием из n элементов по k.***

Очевидно, что ***k* должно быть не больше *n*.**

Число всех сочетаний из *n* элементов по *k* обозначается символом C_n^k и вычисляется по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k-1)}{k!} \qquad \textbf{(4)}$$

В частности, $C_n^0 = \frac{n!}{0!\cdot n!} = 1, C_n^n = \frac{n!}{n!\cdot 0!} = 1,$ что согласуется с тем, что у любого множества *X* имеется только одно подмножество из нуля элементов (*пустое подмножество*), и только одно подмножество из *n* элементов (совпадающее с самим множеством *X*).

При рассмотрении сочетаний очень мощно используется теория множеств!

Докажем формулу (4).

Пусть *Y* какое-либо произвольное подмножество множества *X*, содержащее *k* элементов (то есть сочетание из *n* элементов по *k*). Число таких подмножеств обозначим символом C_n^k. Необходимо выяснить, чему равно это число.

Составляя, всевозможные перестановки из элементов этого множества *Y* получим *k*! различных строк длиной *k*. Если указанную операцию проделать с каждым подмножеством *Y* содержащим *k* элементов, то получим всего $C_n^k \cdot k!$ различных строк, длиной *k*. С другой стороны, таким образом должны получиться все без исключения строки, длиной *k* без повторений, которые можно составить из элементов множества *X*. Число таких строк равно A_n^k, следовательно, $C_n^k \cdot k! = A_n^k$. Выражая из этого равенства C_n^k, получим:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k-1)}{k!}.$$ Формула (4) доказана.

Числа C_n^k называют биномиальными коэффициентами – они входят в формулу бинома Ньютона, изучение которого также входит в программу по математике для профильных классов.

Числа C_n^k обладают рядом замечательных свойств:

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$ (доказывается непосредственно по формуле (4));

2. $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$ (можно доказать с помощью известной теоремы из теории множеств о том, что число различных подмножеств n-элементного множества равно 2^n; другой способ доказательства - комбинаторный);

3. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ для любых n и k, $1 \le k \le n$ (доказывается с помощью формулы (4)); на основе этого свойства строится знаменитый треугольник Паскаля.

Таблица 1.Треугольник Паскаля

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$	$\binom{n}{9}$	$\binom{n}{10}$
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Заметим, что Блез Паскаль называл числовой треугольник, начало которого содержится в таблице 1, *арифметическим*. Паскаль посвятил свойствам арифметического треугольника основополагающий "Трактат об арифметическом треугольнике" (1654). Справедливости ради, стоит упомянуть, что биномиальные коэффициенты были хорошо известны в Азии за много веков до рождения Паскаля. В Италии треугольник Паскаля называют треугольником Тартальи.

Из определения сочетания следует, что если спрашивается «Сколькими способами можно выбрать k объектов из n?», то нужно отвечать: «$\boldsymbol{C_n^k}$ числом способов»!!!

Пример. Во взводе 5 сержантов и 50 солдат. Сколькими способами можно составить наряд из одного сержанта и трёх солдат.

Решение. Одного сержанта из пяти можно выбрать 5-ю разными способами. Для любого из этих способов выбора сержанта трёх солдат (порядок тройки не важен) из 50-ти можно выбрать $C_{50}^{3}=\frac{50!}{3!\cdot 47!}=\frac{48\cdot 49\cdot 50}{1\cdot 2\cdot 3}=19600$ числом способов. Тогда по правилу произведения весь наряд, то есть одного сержанта ***и*** трёх солдат, можно выбрать $5\cdot 19600=98000$ способами.

Подобные задачи очень часто встречаются в комбинаторике и в теории вероятностей. Поэтому рассмотрим **модель этой задачи и её решение.**

Пусть имеется *n* объектов I типа и *m* объектов II типа. Сколькими способами можно выбрать из них *k* объектов I типа и *s* объектов II типа?

Условие задачи рекомендуется оформить таблицей, чтобы не запутаться в числах при составлении числа сочетаний.

	I тип		II тип
Есть:	n объектов	**И**	m объектов
Необходимо выбрать:	k объектов	**И**	s объектов

Тогда k объектов I типа из n можно выбрать C_n^k числом способов. Для каждого из этих способов выбора объектов I типа s объектов II типа из m имеющихся можно выбрать C_m^s числом способов. Применяя правило произведения, получаем ответ: $C_n^k\cdot C_m^s$.

Аналогично решается задача для объектов трёх, четырёх и т.д. типов.

К подобной задаче сводятся задачи, в которых известно общее количество имеющихся объектов и общее количество тех, которые нужно выбрать.

Пример. В классе 36 человек, из которых 6 – отличники. Сколькими способами можно разбить класс на два класса по 18 человек так, чтобы отличников в каждом классе было поровну?

Решение. Разбить класс на две части по 18 человек – это всё равно, что выбрать 18 человек из 36. Отобранные 18 человек составляют один класс, оставшиеся – другой. Оформим условие задачи в указанном выше виде.

	I тип - отличники		II тип – не отличники
Есть 36 человек:	6отличников	**И**	27 не отличников

Необходимо выбрать 18 человек:	3 отличника	**И**	15 не отличников

Ответ: $C_6^3 \cdot C_{27}^{15}$ способов.

1. Ф. У лесника 3 собаки: Астра (А), Вега (В) и Гриф (Г). На охоту лесник решил пойти с двумя собаками. Перечислить все варианты выбора лесником пары собак.

Решение.

Это задача о выборе двух элементов из трех без учета порядка. Перечислим варианты выбора из А, Б, В по два: А, Б; А, В; Б, В. Если учащиеся знают формулу для числа сочетаний, то количество вариантов равно: $C_3^2 = C_3^{3-2} = C_3^1$ =3.

Ответ: 3 варианта.

2. Ф. Сколько существует способов выбрать троих ребят из четверых желающих дежурить по столовой?

Решение.

Количество сочетаний из 4 по 3 (порядок выбора не имеет значения) равно: $C_4^3 = C_4^{4-3} = C_4^1 = 4$ = 4. Иначе можно рассуждать так. Вместо выбора троих дежурных выберем одного, который не будет дежурить, а трех оставшихся отправим на дежурство. Количество способов выбрать одного из четверых ребят равно 4.

Ответ: 4 способа.

3. Т. В классе 7 человек успешно занимаются математикой. Сколькими способами можно выбрать из них двоих для участия в математической олимпиаде?

Решение.

Выбираем 2 учащихся из 7, порядок выбора не имеет значения (оба выбранных пойдут на олимпиаду как полностью равноправные); количество способов выбора равно числу сочетаний из 7 по 2: $C_7^2 = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21$ способ.

Ответ: 21 способ.

4. Т. В магазине «Филателия» продается 8 различных наборов марок, посвященных спортивной тематике. Сколькими способами можно выбрать из них 3 набора?

Решение.

Выбор из 8 по 3 без учета порядка: $C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ = 56 способов.

Ответ: 56 способов.

5. Т. Учащимся дали список из 10 книг, которые рекомендуется прочитать во время каникул. Сколькими способами ученик может выбрать из них 6 книг?

Решение.

Выбор 6 из 10 без учета порядка: $C_{10}^{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210$ способов.

Ответ: 210 способов.

6. Т. Из лаборатории, в которой работают заведующий и 10 сотрудников, надо отправить 5 человек в командировку. Сколькими способами это можно сделать, если:

а) заведующий лабораторией должен ехать в командировку;

б) заведующий лабораторией должен остаться?

Решение.

Из 11 человек 5 должны поехать в командировку.

а) Заведующий едет, нужно выбрать еще 4 из 10 оставшихся: $C_{10}^{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210$ способов.

в) Заведующий остается, нужно выбрать 5 из 10 сотрудников: $C_{10}^{5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 252$ способа.

Ответ: а) 210 способов; б) 252 способа.

7. Т. В библиотеке читателю предложили на выбор из новых поступлений 10 книг и 4 журнала. Сколькими способами он может выбрать из них 3 книги и 2 журнала?

Решение.

Нужно сделать два выбора: 3 книги из 10 (C_{10}^{3} способов) и 2 журнала из 4 (C_{4}^{2} способов) ; порядок выбора не имеет значения. Каждый выбор книг может сочетаться с каждым выбором журналов, поэтому общее число способов выбора по правилу произведения равно: $C_{10}^{3} \cdot C_{4}^{2} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 720$ способов.

Ответ: 720 способов.

8. Т. Из 12 солдат, в число которых входят Иванов и Петров, надо отправить в наряд трех человек. Сколькими способами это можно сделать, если:

а) Иванов и Петров должны пойти в наряд обязательно;

б) Иванов и Петров должны остаться;

в) Иванов должен пойти в наряд, а Петров – остаться?

Решение.

Выбираем три элемента из 12; порядок выбора не имеет значения (все трое идут в наряд).

а) Иванов и Петров идут в наряд, еще одного нужно выбрать из других 10 солдат; количество способов: $C^1_{10} = 10$.

б) Иванов и Петров не идут в наряд; троих идущих в наряд нужно выбрать из других 10 солдат; количество способов: $C_{10}^3 = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 120$ способов.

в) Иванов идет в наряд, а Петров остается. Еще двоих, идущих в наряд с Ивановым, нужно выбрать из других 10 солдат (Иванова и Петрова не считаем); количество способов: $C_{10}^2 = \frac{10\cdot 9}{1\cdot 2} = 45$.

Ответ: а) 10способов; б) 120 способов; в) 45 способов.

9. Т. В классе учатся 16 мальчиков и 12 девочек. Для уборки территории требуется выделить четырех мальчиков и трех девочек. Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

Нужно сделать два выбора: 4 мальчиков из 16 (всего C_{12}^2 способов); порядок выбора значения не имеет (все идущие на уборку равноправны). Каждый вариант выбора мальчиков может сочетаться с каждым выбором девочек,

Поэтому по правилу произведения общее число способов выбора равно:

$$C_{16}^4 \cdot C_{12}^3 = \frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3} = 400400 \text{ способов.}$$

Ответ: 400 400 способов.

10. В 9 «А» классе учатся 25 учащихся, в 9 «Б» -20 учащихся, а в 9 «В» - 18 учащихся. Для работы на пришкольном участке надо выделить трех учащихся из 9 «А», двух - из 9 «Б» и одного - из 9 «В». Сколько существует способов выбора учащихся для работы на пришкольном участке?

Решение.

Выбор из трех совокупностей без учета порядка; каждый вариант выбора из первой совокупности (C_{25}^3) может сочетаться с каждым вариантом выбора из второй (C^2_{20}) и с каждым вариантом выбора из третьей (C^1_{18}); по правилу произведения получаем:

$$C_{25}^3 \cdot C_{20}^2 \cdot C_{18}^1 = \frac{25\cdot 24\cdot 23}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{20\cdot 19}{1\cdot 2}\cdot\frac{18}{1} = 7866000$$

способов выбора учащихся

Ответ: 1 866 000 способов.

11. Т. Сколькими способами группу из 12 человек можно разбить на две группы: а) по 4 и 8 человек; б) по 5 и 7 человек?

Решение.

Количество способов разбиения множества на две части равно количеству способов формирования одной из частей (любой). Поскольку порядок расположения элементов не учитывается, имеем:

а) $C_{12}^{4} = C_{12}^{8} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 495$ способов разбиения на 4 и 8 элементов.

б) $C_{12}^{5} = C_{12}^{7} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 792$ способов разбиения на 5 и 7 элементов.

Ответ: а) 495 способов; б) 792 способа.

Замечание. Задача иллюстрирует свойство биноминальных коэффициентов: $C_n^m = C_n^{n-m}$.

12. Т. В отделе работают 5 ведущих и 8 старших научных сотрудников. В командировку надо послать двух ведущих и трех старших научных сотрудников. Сколькими способами может быть сделан выбор сотрудников, которых надо послать в командировку?

Решение.

Выбор из двух разных совокупностей без учета порядка; каждый вариант выбора из первой совокупности (их C_5^2) может сочетаться с каждым вариантом выбора из второй совокупности (их C_8^3), по правилу произведения общее число способов выбрать сотрудников, уезжающих в командировку, равно:

$C_5^2 \cdot C_8^3 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ = 560 способов.

Ответ: 560 способов.

13. М. Встретились 11 футболистов и 6 хоккеистов, и каждый стал по одному разу играть с каждым в шашки.

а) Сколько встреч было между футболистами?
б) Сколько встреч было между хоккеистами?
в) Сколько встреч было между футболистами и хоккеистами?
г) Сколько встреч было всего?

Решение.

а) Выбираем пары из 11футболистов без учета порядка; количество возможных встреч: $C_{11}^{2} = \frac{11 \cdot 10}{2} = 55.$

б) Выбираем пары из 6 хоккеистов без учета порядка; количество встреч равно: $C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15.$

в) Количество пар «футболист - хоккеист» найдем по правилу произведения: выбрать 1 футболиста можно 11 способами, поел этого выбрать одного хоккеиста можно 6 способами; количество разных выборов «футболист, затем хоккеист» равно $11 \cdot 6$ = 66.Количество встреч между футболистами и хоккеистами равно 66.

г) Общее количество встреч равно количеству пар из 11 + 6 = 17 элементов без учета порядка: $C_{17}^2 = \frac{17 \cdot 16}{2} = 136.$ Понятно, что сумма первых трех величин должна равняться последней: 55+ 15 + 66 = 136.

Ответ: а) 55; б) 15; в) 66; г) 136.

14. М. В правильном 17-угольнике провели все диагонали.

а) Сколько всего получилось отрезков?

б) Сколько имеется сторон?

в) Сколько провели диагоналей?

г) Сколько всего диагоналей в выпуклом n-угольнике?

Решение.

Правильный многоугольник имеет 17 вершин; никакие три из этих 17 точек не лежат на одной прямой.

а) Общее число отрезков равно количеству пар из 17 точек без учета порядка : $C_{17}^2 = \frac{17 \cdot 16}{2} = 136.$

б) Стороны соединяют только соседние точки (точки, расстояние между которыми наименьшее). Поэтому количество сторон равно количеству интервалов между 18 точками на прямой (чтобы получить замкнутую линию, будем считать, что 1-я и 18-я точки совпадают). Количество интервалов между n точками на прямой равно n - 1, поэтому количество сторон 17-угольника равно 18 - 1 = = 17.

Можно рассуждать иначе. Пронумеруем вершины 17-угольника. Из каждой вершины, начиная с первой, исходит сторона 17-угольника, которая заканчивается в следующей по номеру вершине. Сторона, исходящая из 17-й вершины, заканчивается в вершине № 1. Поэтому количество сторон равно количеству вершин, т. е. 17.

в) Диагональю 17-угольника будет отрезок, соединяющий каждую вершину с каждой из вершин, не являющихся соседними для данной, т. е. с 17 - 1 - 2 = 14 разными вершинами (мы вычли 1 -вершину, из которой исходит диагональ, и 2 - две соседние вершины). Таким образом, из каждой вершины 17-угольника исходит 14 диагоналей. Но произведение $17 \cdot 14$ будет включать каждую диагональ дважды (сначала как исходящую из i-й вершины в k-ю, потом как исходящую из k-й вершины в i-ю). Поэтому общее количество диагоналей равно $\frac{17 \cdot 14}{2}$ = 119. Понятно, что количество сторон плюс количество диагоналей должно равняться количеству отрезков:

17 + 119= 136.

г) В выпуклом n-угольнике из каждой вершины можно провести n - 1 - 2 = n -3 диагонали; общее количество диагоналей равно $\frac{n(n-3)}{2}$ (объяснение такое же, как в пункте в).

Ответ: а) 136; б) 17; в) 119; г) $\frac{n(n-3)}{2}$

15. М. Встретились несколько человек и стали здороваться друг с другом. Известно, что рукопожатий было от 60 до 70. Сколько человек встретились, если известно, что:

а) каждый здоровался с каждым;

б) только один человек не здоровался ни с кем;

в) только двое не поздоровались между собой;

г) четверо поздоровались только между собой.

Решение.

а) Число рукопожатий равно числу различных пар из п элементов без учета порядка выбора, поэтому: $60 \le C_n^2 \le 70$; $60 \le \frac{n(n-1)}{2} \le 70$; $120 \le n^2$ -n ≤ 140;

Можно решать двойное неравенство и выбрать натуральное п из полученного интервала. Однако в этом простейшем случае легко находится подбором: n = 12. При n = 11 n^2 - n = 110, а при n= 13 n^2- n= 156.

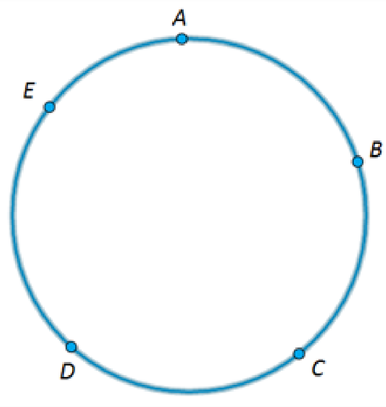
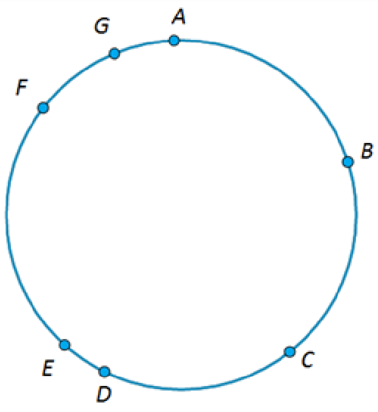
б) Если один человек не здоровался ни с кем, то пары образовывались из n- 1 элемента, т. е. $60 \le C_{n-1}^2 \le 70$; 120 ≤ (n - 1) (n - 2) ≤ 140; поскольку 12 • 11 =132, то n = 13.

в) Если двое не поздоровались между собой, то количество рукопожатий было на 1 меньше: $60 \le C_n^2 - 1 \le 70$; $61 \le C_n^2 \le 71$;

$122 \le п(п-1) \le 142$. Поскольку $12 \bullet 11 = 132$, то n = 12.

Ответ: а) 12; б) 13; в) 12; г) 15.

Практическая часть

№	**1 вариант**	**№**	**2 вариант**
1	Вычисли значение выражения. C_{29}^{3}	**1**	Вычисли значение выражения. C_{7}^{2}
2	Рита написала 14 картин. Для выставки нужны две картины от автора. Сколько различных пар картин Рита может отослать на выставку?	**2**	Марина написала 11 картин. Для выставки нужны две картины от автора. Сколько различных пар картин Марина может отослать на выставку?
3	На полке лежат 8 различных книг. Сколькими различными способами можно выбрать две книги?	**3**	На полке лежат 11 различных книг. Сколькими различными способами можно выбрать две книги?
4	На окружности отмечены точки A, B, C, D и E. Сколько различных треугольников с вершинами в этих точках можно составить? 	**4**	На окружности отмечены точки A, B, C, D, E, F и G. Сколько различных треугольников с вершинами в этих точках можно составить? 
5	Сколькими различными способами можно выбрать двух дежурных из 24 учеников?	**5**	Сколькими различными способами можно выбрать 4 книги из 8 книг?