

Государственное бюджетное
профессиональное образовательное учреждение
«Кунгурский колледж агротехнологий и управления»



**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
К ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
ЕН.01 Математика
по специальности 35.02.03 Технология деревообработки**


углублённой подготовки

2023 г.

Рассмотрено и одобрено
на заседании методической комиссии
естественнонаучных дисциплин

Протокол № 1
от 30 августа 2023 г.

Председатель МК

 _____ В.Н. Чернышёва

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора

 _____

Методические рекомендации по выполнению практических работ составлены в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины ЕН.01 Математика

Организация-разработчик: **государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение «Кунгурский сельскохозяйственный колледж»**

Составитель:

Волкова О.В. преподаватель

Ф.И.О., должность

	ОГЛАВЛЕНИЕ	Стр.
1	<i>Пояснительная записка</i>	4
2	<i>Практическая работа №1:</i> Линейные операции над матрицами	5
3	<i>Практическая работа №2:</i> Вычисление определителей 2 и 3 порядка	12
4	<i>Практическая работа №3:</i> Вычисление обратных матриц 2 и 3 порядков	15
5	<i>Практическая работа №4:</i> Применение формул Крамера к решению систем линейных уравнений	23
6	<i>Практическая работа №5:</i> Решение систем линейных уравнений методом Гаусса	24
7	<i>Практическая работа №6:</i> вычисление интегралов методом непосредственного интегрирования	25
8	<i>Практическая работа №7:</i> Вычисление интегралов методом замены переменной	26
9	<i>Практическая работа №8:</i> Вычисление интегралов методом «по - частям»	27
10	<i>Практическая работа №9:</i> Вычисление определённого интеграла	31
11	<i>Практическая работа №10:</i> Решение линейных дифференциальных уравнений 1 порядка	34
12	<i>Практическая работа №11</i> Решение задач на перестановки, сочетания, размещения	36
13	<i>Практическая работа №12,13:</i> Вычисление вероятности событий с применением теорем	37
14	<i>Практическая работа №14:</i> Преобразование прямоугольных координат в полярные и обратно	45
15	<i>Практическая работа №15:</i> Составление уравнений кривых второго порядка	51

Пояснительная записка

Методические рекомендации к выполнению практических работ по дисциплине «ЕН.01 Математика» предназначены для организации самостоятельной работы обучающихся второго курса очного отделения специальности 35.02.03 Технология деревообработки на уроке.

Учебным планом на изучение дисциплины отводится 96 часов, в том числе практические занятия – 30 часов. Практические занятия являются важной формой образовательного процесса и направлены на экспериментальное подтверждение теоретических положений и формирование учебных и профессиональных практических умений, они составляют важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки.

Перед выполнением практической работы преподавателем проводится инструктаж, который включает цель задания, его содержание, время выполнения, основные требования к результатам работы, критерии оценки выполнения задания. Выполнению практических занятий предшествует проверка знаний студентов - их теоретической готовности к выполнению задания. Практические занятия носят репродуктивный характер. Работы, носящие репродуктивный характер, отличаются тем, что при их проведении студенты пользуются подробными инструкциями, в которых указаны: цель работы, пояснения (теория, основные характеристики), порядок выполнения работы.

Критерии оценивания при выполнении практической работы:

Процент результативности (%)	Оценка уровня подготовки	Оценка
91 – 100	отлично	5
70 - 90	хорошо	4
50 - 69	удовлетворительно	3
Менее 50	неудовлетворительно	2

Время выполнения практической работы составляет 90 минут. В процессе инструктажа преподаватель обращает внимание обучающихся на возможные встречающиеся типичные ошибки.

Практическая работа №1: Линейные операции над матрицами

Операции над матрицами

Цель: закрепить навыки выполнения действий над матрицами

Содержание работы:

Основные понятия

1 Матрицей размерности $m \times n$ называется прямоугольная таблица $m \times n$ чисел a_{ij} , $i=1, \dots, m$, $j=1, \dots, n$, расположенных в m строках и n столбцах:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2 Матрица называется квадратной, если $m=n$ (n - порядок матрицы).

3 Матрица называется единичной, если все элементы на ее главной диагонали равны 1. (Все остальные элементы при этом равны 0.) Единичная матрица чаще всего обозначается буквой E или E_n , где n - порядок матрицы.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

4 Две матрицы A и B равны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый размер $m \times n$ и их соответствующие элементы равны. Пусть заданы две матрицы A и B , причем размерность первой из них равна размерности второй.

5 Чтобы умножить матрицу на число, нужно умножить на это число все элементы матрицы.

6 Суммой двух матриц одинаковой размерности, называется матрица той же размерности, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов слагаемых.

7 Произведением матриц называется матрица, элементы которой вычисляются по формуле: $c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}$, $i=1, \dots, m$, $j=1, \dots, k$. Произведение матриц A и B обозначается AB , т.е. $C=AB$. Пусть заданы две матрицы A и B , причем число столбцов первой из них равно числу строк второй.

8 Произведение матриц существует тогда и только тогда, когда число столбцов в первой матрице равно числу строк во второй.

9 Матрица, получающаяся из матрицы A заменой строк столбцами, называется транспонированной по отношению к матрице и обозначается A^T

10 Матрица называется обратной к матрице A и обозначается A^{-1} , т.е. $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

11 Определителем n -го порядка называется число, полученное из квадратной таблицы размерности $n \times n$.

12 Определитель 2-го порядка - это число вида

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

13 Определители третьего порядка можно вычислять по правилу Саррюса, методом треугольника, разложением по строке или столбцу.

14 Пусть a_{ij} - элемент определителя Δ . Минором M_{ij} будем называть определитель, полученный из исходного вычеркиванием i - строки и j -го столбца.

15 Алгебраическим дополнением к элементу a_{ij} называется число вида $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

16 Обратную матрицу можно найти методом Гаусса $(A|E) \rightarrow \dots \rightarrow (E|A^{-1})$ или по формуле $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A_{ij})^T$

17 Для того, чтобы матрица имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы определитель этой матрицы был отличен от нуля.

Задание

Даны матрицы A и B .

- 1 Выписать матрицу A^T , минор матрицы M_{21} , отвечающий элементу a_{21} .
- 2 Вычислить $|A|$ тремя способами.
- 3 Вычислить $3A$, $2A - 3B$, $A \cdot B$, $B \cdot A$.
- 4 Вычислить B^{-1} двумя способами.
- 5 Вычислить $4A + 5B^{-1} + A \cdot B$

Пример выполнения:

Исходные данные:

Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Решение:

Задание 1 $A^T = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $M_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

Задание 2

а) $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot 0 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 0 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 \cdot 4 - 2 \cdot 3 \cdot 3 = 6;$

б) $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot 0 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 0 \cdot 1 -$

$-(-1) \cdot 2 \cdot 4 - 2 \cdot 3 \cdot 3 = 6;$

в) $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-8) - 2 \cdot (9 - 2) + 12 = 6$

Задание 3

а) $3A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 \\ 9 & 0 & 6 \\ 3 & 12 & 9 \end{pmatrix}$

б) $2A - 3B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & 4 \\ 2 & 8 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 3 & 15 & 6 \\ -9 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-6 & 4-(-3) & 2-(-3) \\ 6-3 & 0-15 & 4-6 \\ 2-(-9) & 8-3 & 6-6 \end{pmatrix} =$
 $= \begin{pmatrix} -8 & 7 & 5 \\ 3 & -15 & -2 \\ 11 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

$$\text{в) } A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) & -1 \cdot (-1) + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 1 & -1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) & 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 5 + 2 \cdot 1 & 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \\ 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) & 1 \cdot (-1) + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 12 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \\ -3 & 22 & 13 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 + (-1) \cdot 1 & 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot 4 & 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + (-1) \cdot 3 \\ 1 \cdot (-1) + 5 \cdot 3 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 5 \cdot 0 + 2 \cdot 4 & 1 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ (-3) \cdot (-1) + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 & (-3) \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 4 & (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 0 & -3 \\ 16 & 10 & 17 \\ 8 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Задание 4

$$\text{а) } B^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 16 & 8 & 0 & 3 & 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{11} & \frac{0}{11} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{11} & \frac{16}{11} & \frac{1}{11} & 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \frac{1}{8} & \frac{11}{8} \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{1}{8} & \frac{11}{8} \end{array} \right)$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ -1 & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \\ 2 & \frac{1}{8} & \frac{11}{8} \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } |B| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 5 \cdot (-3) - (-1) \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 = 8$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -8; \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 16;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 11;$$

$$B^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 8 & 1 & 3 \\ -8 & 1 & -5 \\ 16 & 1 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ -1 & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \\ 2 & \frac{1}{8} & \frac{11}{8} \end{pmatrix}$$

Задание 5

$$4A + 5B^{-1} + A \cdot B = 4 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ -1 & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \\ 2 & \frac{1}{8} & \frac{11}{8} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 12 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \\ -3 & 22 & 13 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 20,625 & 12,875 \\ 7 & -0,375 & 5,875 \\ 11 & 38,625 & 31,875 \end{pmatrix}$$

Задания к практической работе.

1	$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ -7 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$	2	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$
3	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$	4	$A = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -2 \\ 5 & -3 & -4 \\ 3 & -8 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 10 & 5 \\ -2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$
5	$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 6 & 10 & -7 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -5 & -3 & -6 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$	6	$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & -11 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -5 \\ 9 & 4 & -7 \\ 14 & 6 & -11 \end{pmatrix}$
7	$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 8 & 3 & -6 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$	8	$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 7 & -2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$
9	$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -5 \\ 4 & 3 & 6 \\ -7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	10	$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \\ 1 & -5 & 8 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 10 & 1 \\ -2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$
11	$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 2 \\ -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}$	12	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$
13	$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ -1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$	14	$A = \begin{pmatrix} 3 & -8 & -1 \\ 5 & -3 & -4 \\ 4 & -7 & -2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 10 & -6 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$
15	$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & -2 & 2 \\ 6 & 10 & -7 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	16	$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -4 & 7 & -11 \\ -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$
17	$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -3 & -6 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 14 & 6 & -11 \\ 5 & 3 & -5 \\ 9 & 4 & -7 \end{pmatrix}$	18	$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 7 & -2 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 6 & -4 & -5 \\ -7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
19	$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$	20	$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 8 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 8 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

Практическая работа №2: Вычисление определителей 2 и 3 порядка

Цель: сформировать умение вычислять определители второго, третьего и n-го порядка.

Теоретические сведения к практической работе

Определение. Определителем (детерминантом) второго порядка называют число, которое ставится в соответствие матрицы второго порядка, и вычисляется следующим образом (обозначается Δ , $|A|$, $\det A$):

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

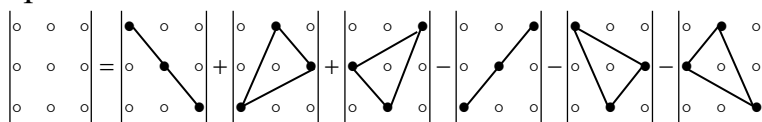
$$1) \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - 4 \cdot 5 = 18 - 20 = -2,$$

$$2) \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = (-4) \cdot 6 - 1 \cdot (-5) = -24 + 5 = -19.$$

Определение. Определителем (детерминантом) третьего порядка называют число, которое ставится в соответствие матрицы третьего порядка, и вычисляется по правилу:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Данный алгоритм называется «правилом треугольника», которое можно представить в виде схемы



Например, вычислим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot (-1) - 2 \cdot 5 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) \cdot 1 - (-1) \cdot 4 \cdot (-2) = -30 - 2 - 8 - 20 + 3 - 8 = -65.$$

Для вычисления определителя третьего порядка можно пользоваться алгоритмом Саррюса:

- 1) После записи определителя дописываем его первый и второй столбец и вычисляем по схеме

$$\begin{array}{c} (+) \quad (+) \quad (+) \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ (-) \quad (-) \quad (-) \end{array}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Например, вычислим определитель по алгоритму Саррюса

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & -6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot (-6) + (-4) \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) \cdot 1 - 2 \cdot 5 \cdot 3 - 1 \cdot 4 \cdot 1 - (-4) \cdot (-2) \cdot (-6) = -30 - 48 - 4 - 30 - 4 + 48 = -68.$$

Определение. Определителем (детерминантом) второго порядка называют число, которое ставится в соответствие матрицы второго порядка, и вычисляется следующим образом. Минором элемента a_{ij} определителя n -го порядка (обозначается M_{ij}) называется определитель $(n-1)$ -го порядка, который получают из определителя n -го порядка вычеркиванием строки и столбца, в которых стоит элемент a_{ij} .

Например, $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 5 \cdot (-4) = 22,$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-2) - 3 \cdot 5 = -13.$$

Определение. Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя n -го порядка (обозначается A_{ij}) называется соответствующий ему минор со знаком

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} = \begin{cases} M_{ij}, & \text{если } (i+j) - \text{четное число;} \\ -M_{ij}, & \text{если } (i+j) - \text{нечетное число.} \end{cases}$$

Например, для определителя $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 = 12 - 15 = -3,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -(4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) = -(36 - 42) = -(-6) = 6.$$

9) **(Теорема Лапласа)** Определитель равен сумме произведений элементов некоторого столбца (строки) на соответствующие им алгебраические дополнения.

Например, для определителя третьего порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}.$$

Пример. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix}$

Решение

1) Вычислим определитель.

а) по правилу треугольника.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1) \cdot (-2) + (-3) \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 2 \cdot 4 - (-3) \cdot (-1) \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 5 - 2 \cdot 3 \cdot (-2) =$$

$$= 2 - 45 + 16 - 12 - 10 + 12 = -37 .$$

б) по алгоритму Саррюса.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 2 \cdot 4 + (-3) \cdot 3 \cdot 5 - (-3) \cdot (-1) \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 5 - 2 \cdot 3 \cdot (-2) =$$

$$= 2 - 45 + 16 - 12 - 10 + 12 = -37 .$$

в) по теореме Лапласа.

Разложим определитель по первому столбцу:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + 3 \cdot A_{21} + 4 \cdot A_{31} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} + 3 \cdot (-1)^{2+1} \cdot M_{21} +$$

$$+ 4 \cdot (-1)^{3+1} \cdot A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-2) - 2 \cdot 5 -$$

$$- 3(2 \cdot (-2) - (-3) \cdot 5) + 4(2 \cdot 2 - (-3) \cdot (-1)) = 2 - 10 - 3(-4 + 15) + 4(4 - 3) =$$

$$= -8 - 33 + 4 = -37 .$$

Содержание практической работы:

Задание. Вычислить определители

$$\mathbf{1)} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}; \mathbf{2)} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 8 \end{vmatrix}; \mathbf{3)} \begin{vmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}; \mathbf{4)} \begin{vmatrix} -8 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}; \mathbf{5)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 6 & 13 \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{6)} \begin{vmatrix} 7 & 8 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 5 \end{vmatrix}; \mathbf{7)} \begin{vmatrix} 11 & 5 & 6 \\ 1 & -2 & -3 \\ 7 & 4 & 4 \end{vmatrix}; \mathbf{8)} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 10 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}; \mathbf{9)} \begin{vmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 7 & 12 & 5 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{10)} \begin{vmatrix} 20 & 3 & 7 \\ -5 & -6 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix}; \mathbf{11)} \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 9 & 5 & 7 \\ 8 & 4 & 3 \end{vmatrix}; \mathbf{12)} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 7 & 4 & 8 \\ -9 & 2 & -3 \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{13)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & 1 & 6 \end{vmatrix}; \mathbf{14)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \mathbf{15)} \begin{vmatrix} -2 & -5 & -1 & 3 \\ 2 & -5 & 9 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{16)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}; \mathbf{17)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \mathbf{18)} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Практическая работа №3: Вычисление обратных матриц 2 и 3 порядков

Учебные цели: закрепить и систематизировать знания по данной теме; закрепить навыки вычисления обратных матриц второго и третьего порядка; определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

Методические указания по выполнению работы: изучить краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия; изучить условие задания практического занятия; при выполнении работы соблюдать последовательность действий; ответить на контрольные вопросы; оформить отчет по практической работе.

Порядок выполнения работы:

Краткий теоретический материал

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя $D = |a_{ij}|$, где i и j меняются от 1 до n , называется такой новый определитель, который получается из данного определителя вычеркиванием строки и столбца, содержащих данный элемент.

Например, минор M_{12} , соответствующий элементу a_{12} определителя $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ получается, если вычеркнуть из определителя D первую строку и второй столбец, т.е. $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя D называется минор M_{ij} этого элемента, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$

$$\text{Т.о. } A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Пример 1

Найти алгебраические дополнения элементов a_{13} , a_{21} , a_{31} определителя

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Решение:

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 5 - 2 \cdot 3) = -4$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -6$$

Квадратная матрица A называется вырожденной, если ее определитель равен 0 и невырожденной, если ее определитель отличен от нуля.

Если A – квадратная матрица, то обратной по отношению к A называется матрица, которая будучи умноженной на A (как справа, так и слева), дает единичную матрицу.

A^{-1} – обратная матрица

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$$

При условии $D=|A| \neq 0$ обратная матрица находится по формуле

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{D} & \frac{A_{12}}{D} & \dots & \frac{A_{n1}}{D} \\ \frac{A_{12}}{D} & \frac{A_{22}}{D} & \dots & \frac{A_{n2}}{D} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{D} & \frac{A_{2n}}{D} & \dots & \frac{A_{nn}}{D} \end{pmatrix}$$

Вычисление обратных матриц второго и третьего порядка

Для нахождения обратной матрицы используют следующую схему:

1. Находят определитель матрицы A .
2. Находят алгебраические дополнения всех элементов a_{ij} матрицы A и записывают новую матрицу.

Меняют местами столбцы полученной матрицы (транспонируют матрицу)

3. Умножают полученную матрицу на $\frac{1}{D}$

Пример 2

Найти матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

Решение:

1. Найдем определитель матрицы A :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 7 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 0 \cdot 0 \cdot 3 - 3 \cdot (-1) \cdot 3 - 0 \cdot 2 \cdot 1 - 0 \cdot 2 \cdot 7 = -7 + 12 + 9 = 14$$

Поскольку $D \neq 0$, то матрица A невырожденная и, значит, можно найти обратную матрицу.

2. Найдем алгебраические дополнения всех элементов матрицы A

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -7$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -14$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{23} = 6$$

$$A_{31} = 7$$

$$A_{32} = -2$$

$$A_{33} = -1$$

Запишем обратную матрицу $\begin{pmatrix} -7 & 6 & 3 \\ -14 & -2 & 6 \\ 7 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

3. Транспонируем матрицу:

$$\begin{pmatrix} -7 & -14 & 7 \\ 6 & -2 & -2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Умножим полученную матрицу на $\frac{1}{D} = \frac{1}{14}$

$$A^{-1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -7 & -14 & 7 \\ 6 & -2 & -2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix}$$

Проверим полученный ответ

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Задания:

1. Найти матрицы, обратные данным:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Найти матрицы, обратные данным:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Контрольные вопросы:

- 1) Что такое минор?
- 2) Что такое алгебраическим дополнением?

Практическая работа №4,5: Применение формул Крамера к решению систем линейных уравнений. Решение линейных систем уравнений методом Гаусса

Задание к работе

1. Методом Крамера найти решение системы линейных алгебраических уравнений.
2. Установить, что система уравнений имеет единственное решение, и найти его с помощью обратной матрицы.
3. Методом Гаусса (или методом исключения неизвестных) найти решение системы линейных алгебраических уравнений.
4. Найти общее решение однородной системы линейных алгебраических уравнений.

Образец решения варианта.

1. Методом Крамера найти решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = 3 \\ 3x + 4y - 5z = -8 \\ 2y + 7z = 17 \end{cases} .$$

Решение.

Решение системы находим по формулам Крамера

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, z = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Вычислим определитель системы Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 56 - 18 + 20 + 21 = 79.$$

Последовательно заменив в Δ , первый, второй и третий столбцы столбцом свободных членов, получим соответственно

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -8 & 4 & -5 \\ 17 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 395, x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{395}{79} = 5;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & -8 & -5 \\ 0 & 17 & 7 \end{vmatrix} = -158, y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{158}{79} = -2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -8 \\ 0 & 2 & 17 \end{vmatrix} = 237, z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{237}{79} = 3.$$

Ответ : $x = 5, y = -2, z = 3$

2. Дана система из трех уравнений с тремя неизвестными. Установить, что система уравнений имеет единственное решение и найти его с помощью обратной матрицы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_3 = -8 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}.$$

Решение.

Если определитель системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение (теорема Крамера).

Вычислим определитель данной системы :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -2 \cdot (12 - 10) = -4 \neq 0,$$

следовательно, система имеет единственное решение.

Данную систему можно записать в матричной форме :

$$A \cdot X = B, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\det A = \Delta = -4 \neq 0$, то для матрицы A существует обратная матрица A^{-1} .

Умножив матричное уравнение $A \cdot X = B$ слева на A^{-1} , получим

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B, \text{ откуда } E \cdot X = A^{-1} \cdot B, \text{ или } X = A^{-1} \cdot B.$$

Найдем обратную матрицу A^{-1} по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} .

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 4, A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -7, A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -6,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -8, A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 9, A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 10,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5, A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Тогда } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 \cdot 4 + (-8) \cdot (-8) + 4 \cdot 0 \\ (-7) \cdot 4 + 9 \cdot (-8) + (-5) \cdot 0 \\ (-6) \cdot 4 + 10 \cdot (-8) + (-6) \cdot 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 80 \\ -100 \\ -104 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 25 \\ 26 \end{pmatrix}.$$

Ответ : $x_1 = -20, x_2 = 25, x_3 = 26$.

3. Методом Гаусса (или методом исключения неизвестных) найти решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases}.$$

Решение.

Выпишем расширенную матрицу B данной системы и приведем ее к ступенчатому виду

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & -2 & -3 & 8 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array} \right).$$

Последовательно умножим первую строку на (-2) и прибавим ее ко второй строке, затем умножим на (-3) и прибавим к третьей строке, умножим на (-2) и прибавим к четвертой строке, получим

$$B \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array} \right).$$

Ко второй строке полученной матрицы прибавим третью строку, умноженную на (-1) , затем во вновь полученной матрице умножим третью строку на $(-\frac{1}{2})$, четвертую – на (-1) , затем последовательно умножим вторую строку на 2 и прибавим ее к третьей строке, умножим на 7 и прибавим к четвертой строке, получим

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & -7 & 10 \\ 0 & 2 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 7 & 4 & -5 & 20 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 9 & -18 & 27 \\ 0 & 0 & 18 & -54 & 90 \end{array} \right).$$

Третью строку полученной матрицы умножим на $\frac{1}{9}$, четвертую – на $\frac{1}{18}$, затем третью строку умножим на (-1) и прибавим к четвертой строке, получим

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right).$$

Найденная матрица имеет треугольный вид; по этой матрице запишем систему уравнений, эквивалентную исходной системе,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ -x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 10 \\ x_3 - 2x_4 = 3 \\ -x_4 = 2 \end{cases}$$

Последовательно находим неизвестные, начиная с последнего уравнения, $x_4 = -2$; подставим в третье уравнение найденное x_4 , вычислим x_3 , $x_3 = -1$; затем из второго уравнения находим x_2 , $x_2 = 2$; из первого уравнения получим x_1 , $x_1 = 1$.

Ответ: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1, x_4 = -2$.

4. Найти общее решение однородной системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 5x + 3y = 0 \\ 10x + 6y = 0 \end{cases}$$

Решение.

Элементарными преобразованиями строк приведем матрицу системы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 6 \end{pmatrix} \text{ к эквивалентной матрице } \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ которой соответствует уравнение}$$

$5x + 3y = 0$, эквивалентное исходной системе. Таким образом, общее решение может

быть записано в форме $y = -\frac{5}{3}x, x \in \mathbf{R}$, или $x = -\frac{3}{5}y, y \in \mathbf{R}$. Решений

бесчисленное множество – любая пара, связанная указанной зависимостью, обращает левые части уравнений данной системы в нуль. В системе $n = 2$ – число неизвестных и число уравнений. $\text{rang}A = \text{rang}B = 1 < n$, A – матрица системы, B – расширенная матрица системы. В силу теоремы Кронекера-Капелли система имеет бесчисленное множество решений, зависящих от одного параметра ($n - r = 2 - 1 = 1$). Иногда общее решение удобнее использовать в форме

$$x = 3t, y = -5t, t \in \mathbf{R}.$$

Практическая часть

1. Методом Крамера найти решение системы линейных алгебраических уравнений.
2. Установить, что система уравнений имеет единственное решение, и найти его с помощью обратной матрицы.
3. Методом Гаусса (или методом исключения неизвестных) найти решение системы линейных алгебраических уравнений.

4. Найти общее решение однородной системы линейных алгебраических уравнений

Вариант 1

$$1.1 \begin{cases} 2x - y - 2z = -1 \\ 2y + z = 3 \\ -2x - 2y + 2z = -2 \end{cases} \quad 1.2 \begin{cases} 2x + y - 3z = 7 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 3x + 2y + z = 6 \end{cases}$$

$$1.3 \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 11 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 - 4x_2 + 8x_3 + x_4 = 15 \end{cases} \quad 1.4 \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases}$$

Вариант 2

$$2.1 \begin{cases} 3x + y - 3z = 8 \\ 3y - z = 7 \\ 3x - y - 3z = 4 \end{cases} \quad 2.2 \begin{cases} 4x + y + 4z = -3 \\ x + y + 2z = -4 \\ 2x - y + 2z = 3 \end{cases}$$

$$2.3 \begin{cases} 2x + 3y - 4z = 6 \\ 2x - y + 3z = -4 \\ x + 3y - 2z = 5 \\ 3x + 2y + z = 1 \end{cases} \quad 2.4 \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases}$$

Вариант 3

$$3.1 \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 4 \\ 4x + 9y + 16z = 6 \\ 8x + 27y + 64z = -2 \end{cases} \quad 3.2 \begin{cases} 3x - y + z = 12 \\ x + 2y + 4z = 6 \\ 5x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

$$3.3 \begin{cases} 3x - 2y + 4z + 5t = 5 \\ x - y - z + t = 0 \\ 2x - 2y + 3z - 3t = 1 \\ 4x + 2y - 6z - t = 0 \end{cases} \quad 3.4 \begin{cases} 3x - y = 0 \\ 2y - 6x = 0 \end{cases}$$

Вариант 4

$$4.1 \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$

$$4.2 \begin{cases} 2x - y + 3z = -4 \\ x + 3y - z = 11 \\ x - 2y + 2z = -7 \end{cases}$$

$$4.3 \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_1 - 7x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases} \quad 4.4 \begin{cases} 3y - x = 0 \\ 6y - 2x = 0 \end{cases}$$

Практическая работа №6,7,8: вычисление интегралов методом непосредственного интегрирования

Цель: проверить знание определения неопределённого интеграла, его свойства, табличные интегралы; формулы интегрирования при помощи замены переменной, умения вычислять неопределённые интегралы методом замены переменной.

Задание:

1. Найти неопределённые интегралы

1.

$$1.1. \int x^3(3x+1)^2 dx$$

$$1.11. \int 4x^2(4x+2)^2 dx$$

$$1.21. \int 3\sqrt{x}(2-3x)^2 dx$$

$$1.2. \int -2\sqrt{x}(4-3x)^2 dx$$

$$1.12. \int \frac{x^2 - 3x^3 + 2x^7}{x} dx$$

$$1.22. \int \frac{2x^3 + 3x^4 - 5x^6}{x^2} dx$$

$$1.3. \int \frac{4x^3 + x^4 - 8x^5}{x^3} dx$$

$$1.13. \int \frac{7x^4 - 4x^4 + 6x^4}{x^2} dx$$

$$1.23. \int \frac{x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{4}{7}} - x^{\frac{1}{2}}}{x} dx$$

$$2.1. \int \frac{\sqrt{3}}{9x^2 - 3} dx$$

$$2.11. \int \frac{1}{\sqrt{5x^2 + 3}} dx$$

$$2.21. \int \frac{1}{3x^2 - 2} dx$$

$$2.2. \int \frac{1}{\sqrt{9x^2 + 3}} dx$$

$$2.12. \int \frac{1}{\sqrt{4 - 7x^2}} dx$$

$$2.22. \int \frac{1}{4x^2 + 3} dx$$

2.3. $\int \frac{1}{9x^2 + 3} dx$

2.4. $\int \frac{9}{\sqrt{9x^2 - 3}} dx$

2.5. $\int \frac{1}{\sqrt{3 - 9x^2}} dx$

2.6. $\int \frac{1}{7x^2 - 4} dx$

2.7. $\int \frac{3}{\sqrt{7x^2 - 4}} dx$

2.8. $\int \frac{1}{5x^2 + 3} dx$

2.9. $\int \frac{1}{5x^2 - 3} dx$

2.10. $\int \frac{1}{\sqrt{3 - 5x^2}} dx$

2.13. $\int \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3 - 4x^2}} dx$

2.14. $\int \frac{1}{\sqrt{2x^2 - 9}} dx$

2.15. $\int \frac{1}{2x^2 + 7} dx$

2.16. $\int \frac{1}{\sqrt{3x^2 + 1}} dx$

2.17. $\int \frac{1}{3x^2 + 2} dx$

2.18. $\int \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7 - 2x^2}} dx$

2.19. $\int \frac{\sqrt{14}}{2x^2 - 7} dx$

2.20. $\int \frac{1}{8x^2 + 9} dx$

2.23. $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 3}} dx$

2.24. $\int \frac{1}{\sqrt{3 - 4x^2}} dx$

2.25. $\int \frac{1}{4x^2 - 3} dx$

2.26. $\int \frac{2}{4 + 3x^2} dx$

2.27. $\int \frac{2}{\sqrt{4x^2 - 3}} dx$

2.28. $\int \frac{1}{4x^2 + 7} dx$

2.29. $\int \frac{1}{8x^2 - 9} dx$

2.30. $\int \frac{1}{\sqrt{9 - 8x^2}} dx$

Найти интегралы методом интегрирования по частям

1. $\int x \cos 6x dx$

2. $\int x \sin(x - 5) dx$

3. $\int \arcsin 3x dx$

4. $\int \arctg 8x dx$

5. $\int x \sin(x - 2) dx$

6. $\int \arcsin 8x dx$

7. $\int x \sin(x + 3) dx$

8. $\int x \cos(x + 4) dx$

9. $\int \arccos 7x dx$

10. $\int \ln(2x - 4) dx$

11. $\int x \cos(x - 7) dx$

12. $\int \ln(x + 12) dx$

13. $\int (x - 4)e^x dx$

14. $\int x e^{-6x} dx$

15. $\int \arctg 7x dx$

1.16. $\int \arcsin 5x dx$

1.17. $\int \ln(x - 7) dx$

1.18. $\int x \cos(x + 6) dx$

1.19. $\int \arctg \frac{x}{2} dx$

1.20. $\int \ln(x + 8) dx$

1.21. $\int \arctg \frac{x}{5} dx$

22. $\int \arcsin \frac{x}{5} dx$

23. $\int \arccos 2x dx$

1.24. $\int \ln(2x - 1) dx$

1.25. $\int \ln(2x + 3) dx$

1.26. $\int \arccos \frac{x}{5} dx$

1.27. $\int \arctg \frac{x}{4} dx$

1.28. $\int \arcsin \frac{x}{7} dx$

1.29. $\int \arctg 6x dx$

1.30. $\int \arccos \frac{x}{3} dx$

Контрольные вопросы

1. Таблица неопределенных интегралов.
2. Свойства неопределенного интеграла.
3. Непосредственное интегрирование.
4. Интегрирование заменой переменной.
5. Какие интегралы находятся методом по частям?
6. Алгоритм решения методом по частям

Практическая работа №9: Вычисление определённого интеграла

Цель: закрепить навыки вычисления определенных интегралов

Основные понятия.

1 Определенный интеграл – это предел интегральных сумм:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ $i \in \overline{0, n-1}$, x_i - точки из отрезка $[a, b]$

$$a = x_0, \quad b = x_n, \quad c_i \in [x_i, x_{i+1}] \quad i \in \overline{0, n-1}$$

2 Формула Ньютона-Лейбница: $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$,

где $F(x)$ - первообразная для $f(x)$.

3 Свойства определенных интегралов

$$- \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$- \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

$$- \int_a^b C \cdot f(x)dx = C \int_a^b f(x)dx$$

$$- \int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$- \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

4 Замена переменных в определенном интеграле:

$$\int_a^\beta f(u(x))u' dx = \int_a^b f(u)du;$$

где $du = u'(x)dx$, $a = u(\alpha)$, $b = u(\beta)$.

5 Интегрирование по частям в определенном интеграле:

$$\int_a^\beta u dv = uv \Big|_a^\beta - \int_a^\beta v du.$$

Задание

- 1 Найти определенный интеграл, используя свойства интегралов
- 2 Найти интегралы методом замены переменной
- 3 Найти интегралы методом интегрирования по частям

Пример выполнения:

Исходные данные:

Вычислить интегралы.

Задание 1 $\int_1^3 \left(3\sqrt{x} + \frac{1}{x^3} - 4 \right) dx$

Задание 2 $\int_0^1 \sqrt{x+32} dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^{15} x \cos x dx$

Задание 3 $\int_0^e x \ln x dx$

Решение.

Задание 1

$$\begin{aligned}\int_1^4 \left(3\sqrt{x} + \frac{1}{x^3} - 4 \right) dx &= 3 \int_1^4 \sqrt{x} dx + \int_1^4 x^{-3} dx - 4 \int_1^4 dx = 3 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_1^4 + \frac{x^{-2}}{-2} \Big|_1^4 - 4x \Big|_1^4 = \\ &= 2\sqrt{x^3} \Big|_1^4 - \frac{1}{2x^2} \Big|_1^4 - 4x \Big|_1^4 = 2(\sqrt{4^3} - \sqrt{1^3}) - \left(\frac{1}{2 \cdot 4^2} - \frac{1}{2 \cdot 1^2} \right) - 4(4 - 1) = \\ &= 2(8 - 1) - \left(\frac{1}{32} - \frac{1}{2} \right) - 4 \cdot 3 = 14 + \frac{15}{32} - 12 = 2\frac{15}{32}.\end{aligned}$$

Задание № 2.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{x+32} dx &= \left| \begin{array}{l} u = x+32 \quad du = dx \\ 0 \mapsto 0 \quad 1 \mapsto 33 \end{array} \right| = \int_0^{33} \sqrt{u} du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^{33} = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{33} = \frac{2}{3} \left(33^{\frac{3}{2}} - 1 \right). \\ \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^{15} x \cos x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \sin x \quad du = \cos x dx \\ 0 \mapsto 0 \quad \frac{\pi}{3} \mapsto \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} u^{15} du = \frac{u^{16}}{16} \Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \\ &= \frac{1}{16} \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{16} - 0 \right) = \frac{3^8}{2^{20}}.\end{aligned}$$

Задание № 3

$$\begin{aligned}\int_0^e x \ln x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln x \quad dv = x dx \\ du = \frac{dx}{x} \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_0^e + \int_0^e \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_0^e + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^e x dx = \frac{e}{2} \ln e - \frac{1}{2} \ln 1 + \frac{x^2}{4} \Big|_0^e = \frac{e}{2} + \frac{e^2 - 0^2}{2} = \frac{e^2 + e}{2}.\end{aligned}$$

Задания к практической работе.

Задание 1

- | | | |
|---|--|--|
| 1 $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right) dx;$ | 2 $\int_2^{3.5} \left(\frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}\right)$ | 3 $\int_0^2 x(3-x) dx;$ |
| 4 $\int_0^9 (3\sqrt{x} - x) dx;$ | 5 $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-x-6}$ | 6 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+8}}$ |
| 7 $\int_1^4 \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx;$ | 8 $\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4x-32} dx$ | 9 $\int_1^5 ((x-3)^2 - 4) dx;$ |
| 10 $\int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2}$ | 11 $\int_0^1 \frac{1}{x+2} dx;$ | 12 $\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2-1} dx$ |
| 13 $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ | 14 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx;$ | 15 $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2+x-6}$ |
| 16 $\int_1^8 \sqrt[3]{x^2} dx;$ | 17 $\int_0^2 x^2(3-x) dx;$ | 18 $\int_{-1}^1 \left(\frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}\right)$ |
| 19 $\int_3^4 \frac{dx}{x^2-4x+5}$ | 20 $\int_0^2 x(4x^2+3x-2) dx;$ | 21 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-8}}$ |
| 22 $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2+2x+2}$ | 23 $\int_0^2 x(x^2+4x-1) dx;$ | 24 $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$ |
| 25 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+10}}$ | 26 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ | 27 $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$ |
| 28 $\int_1^5 ((x-2)^2 - 1) dx;$ | 29 $\int_1^4 ((x-2)^2 - 1) dx;$ | 30 $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ |

Задание 2

- | | | |
|--|---|--|
| 1 $\int_0^2 3^{2x+5} dx$ | 2 $\int_0^1 x(7x^2 - 5)^4 dx$ | 3 $\int_{-1}^0 4^{8x+7} dx$ |
| 4 $\int_1^4 \sqrt{x^2-1} \cdot x dx$ | 5 $\int_0^{\pi/4} \sin(4x) dx$ | 6 $\int_0^1 \left(\frac{dx}{\sqrt{4+5x}}\right)$ |
| 7 $\int_0^1 \left(\frac{dx}{\sqrt{4-3x}}\right)$ | 8 $\int_0^1 \left(\frac{dx}{\sqrt{10-3x}}\right)$ | 9 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x dx$ |
| 10 $\int_1^e \frac{\sin \ln x}{x} dx$ | 11 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx$ | 12 $\int_0^{\pi/3} \cos(3x) dx$ |

13 $\int_2^6 \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx$

14 $\int_{-1}^1 tg x dx$

15 $\int_2^3 \frac{2x+4}{x^2+4x-3} dx$

16 $\int_0^1 5^{2x-1} dx$

17 $\int_{-2}^0 5^{2x+9} dx$

18 $\int_{-2}^2 e^{2x+1} dx$

19 $\int_{-1}^1 9^{6x-1} dx$

20 $\int_0^1 2^{2x+1} dx$

21 $\int_1^e \frac{\cos \ln x}{x} dx$

22 $\int_1^2 3^{7x+1} dx$

23 $\int_0^2 3^{3x-2} dx$

24 $\int_{-1}^1 5^{3x+1} dx$

25 $\int_{-2}^1 7^{2x+5} dx$

26 $\int_0^3 \frac{2x-3}{x^2-3x+1} dx$

27 $\int_{-1}^2 2^{2x-1} dx$

28 $\int_{-1}^1 5^{9x+4} dx$

29 $\int_1^2 5^{3x-4} dx$

30 $\int_1^2 e^{3x+2} dx$

Задание 3

1 $\int_0^1 \arcsin x dx;$

2 $\int_1^e \frac{dx}{x(\ln^2 x - 9)};$

3 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx;$

4 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx;$

5 $\int_0^1 x \arctg x dx;$

6 $\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx;$

7 $\int_0^1 x e^{-x} dx;$

8 $\int_0^1 x \arcsin x dx;$

9 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \arccos 2x dx;$

10 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x \sin 3x dx;$

11 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} x \sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right) dx;$

12 $\int_0^1 (x^2 - 1)e^x dx;$

13 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xdx}{\sin^2 x};$

14 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xdx}{\cos^2 x};$

15 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx;$

16 $\int_0^1 5xe^{2x} dx;$

17 $\int_0^1 (x^2 - 1)e^{2x} dx;$

18 $\int_0^1 x \arctg 2x dx;$

19 $\int_0^1 3x^2 e^{2x} dx;$

20 $\int_0^{\pi/8} \frac{x dx}{\cos^2 2x};$

21 $\int_0^{\pi/3} x \sin x dx;$

22 $\int_0^1 x \operatorname{arctg} 3x dx;$

23 $\int_0^{\pi} x \sin x dx;$

24 $\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx;$

25 $\int_0^1 x^2 \operatorname{arctg} 3x dx;$

26 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{3}\right) dx;$

27 $\int_{-1}^1 x \arcsin x dx;$

28 $\int_0^1 (x^2 - 1)e^{3x} dx;$

29 $\int_0^1 (x^2 - 1)e^x dx;$

30 $\int_0^1 \arcsin x dx$

ИНСТРУКЦИОННАЯ КАРТА для проведения практической

Цель: выполнения задания: привить навыки нахождения определенных интегралов методом замены переменной и интегрированием по частям

Необходимо знать: основные формулы и правила вычисления определенных интегралов
Необходимо уметь: применять основные формулы и правила вычисления определенных интегралов

Теория: для выполнения заданий по данной теме необходимо предварительно изучить теоретические материалы, а также методические рекомендации к выполнению работы
Порядок выполнения задания, методические указания: - ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме; - изучить схему решения задач; - выполнить задания практической работы; - сформулировать вывод

Дополнительные задания: могут быть сформулированы по ходу занятия

Содержание отчета: отчет по практической работе должен содержать: основные определения, рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ; вывод по работе

Контрольные вопросы:

- 1 Что называется определенным интегралом?
- 2 В чем принципиальное отличие определенного интеграла от неопределенного?
- 3 Формула Ньютона-Лейбница
- 4 Формула интегрирования по частям в определенном интеграле
- 5 Свойства определенного интеграла

Практическая работа №10: Решение линейных дифференциальных уравнений 1 порядка

Цель работы: научиться решать дифференциальные уравнения первого порядка.

Содержание работы.

Основные понятия.

1 Дифференциальные уравнения – это уравнения, содержащие искомые функции, их производные различных порядков и независимые переменные.

2 Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок, входящих в него производных.

3 Решить дифференциальное уравнение – это значит, найти множество функций $y = f(x) + C$, которые удовлетворяют данному уравнению. Такое множество функций называется общим решением дифференциального уравнения.

4 Частное решение дифференциального уравнения — это решение, не содержащее произвольных постоянных

5 Обыкновенным дифференциальным уравнением 1-го порядка с одной неизвестной функцией называется соотношение $F(x, y, y') = 0$ между независимым переменным x , искомой функцией y и её производной

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

6 Если уравнение может быть разрешено относительно производной, то получается уравнение $y' = f(x, y)$, разрешенное относительно производной.

7 Дифференциальные уравнения $f(y) dy = g(x) dx$ называют уравнениями с разделенными переменными

8 Линейное уравнение первого порядка – это уравнение вида:
 $y' + p(x) \cdot y = q(x)$

9 Если $q(x) = 0$, то уравнение называется однородным, если $q(x) \neq 0$, то уравнение неоднородное

Задание

Исходные данные:

Решить дифференциальное уравнение $y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x$.

Решение:

а) Решим уравнение методом вариации постоянных (методом Лагранжа):

– найдем общее решение однородного уравнения

$$y' \cos^2 x + y = 0$$

$$y' \cos^2 x = -y; \quad \frac{dy}{dx} \cos^2 x = -y;$$

$$dy \cos^2 x = -y dx; \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{\cos^2 x}; \quad \ln|y| = -\operatorname{tg} x + C$$

$$y = e^{-\operatorname{tg} x + C}; \quad y = e^{-\operatorname{tg} x} e^C; \quad y = C e^{-\operatorname{tg} x}$$

– теперь полагаем $y = C(x)e^{-\operatorname{tg} x}$; $y' = C'(x)e^{-\operatorname{tg} x} - C(x)\frac{e^{-\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}$, подставляем у и

y' в исходное уравнение: $C'(x)e^{-\operatorname{tg} x} \cos^2 x - C(x)\frac{e^{-\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} \cos^2 x + C(x)e^{-\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} x$

$$C'(x)e^{-\operatorname{tg} x} \cos^2 x = \operatorname{tg} x; \quad C(x) = \int \frac{e^{\operatorname{tg} x} \operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx$$

$$\int \frac{e^{\operatorname{tg} x} \operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{array} \right| = \int t e^t dt = \left| \begin{array}{l} u = t; du = dt \\ dv = e^t dt; v = e^t \end{array} \right| =$$

$$te^t - \int e^t dt = te^t - e^t + C = e^{\operatorname{tg} x} (\operatorname{tg} x - 1) + C$$

– находим общее решение дифференциального уравнения

$$y = e^{-\operatorname{tg} x} (e^{\operatorname{tg} x} (\operatorname{tg} x - 1) + C) = \operatorname{tg} x - 1 + C e^{-\operatorname{tg} x}$$

б) Решим это уравнение методом подстановки (методом Бернулли):

– для этого представим $y = u(x) \cdot v(x)$; $y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

– подставим у и y' в исходное уравнение:

$$u'(x)v(x)\cos^2 x + u(x)v'(x)\cos^2 x + u(x) \cdot v(x) = \operatorname{tg} x$$

$$u'(x)v(x)\cos^2 x + u(x) \cdot (v'(x)\cos^2 x + v(x)) = \operatorname{tg} x$$

– найдем частное решение уравнения:

$$v'(x)\cos^2 x + v(x) = 0; \quad v'(x) = -\frac{v(x)}{\cos^2 x}; \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$\ln|v| = -\operatorname{tg}x; \quad v = e^{-\operatorname{tg}x}$$

– найдем общее решение уравнения:

$$u'(x)v(x)\cos^2 x = \operatorname{tg}x; \quad u'(x)e^{-\operatorname{tg}x}\cos^2 x = \operatorname{tg}x$$

$$u(x) = \int \frac{e^{\operatorname{tg}x}\operatorname{tg}x}{\cos^2 x} dx = \left. \int \frac{e^t \operatorname{tg}x}{\cos^2 x} dx \right|_{\substack{t = \operatorname{tg}x \\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x}}} = \int te^t dt = \left. \int te^t dt \right|_{\substack{u = t; du = dt \\ dv = e^t dt; v = e^t}} =$$

$$te^t - \int e^t dt = te^t - e^t + C = e^{\operatorname{tg}x}(\operatorname{tg}x - 1) + C$$

– находим общее решение дифференциального уравнения

$$y = e^{-\operatorname{tg}x}(e^{\operatorname{tg}x}(\operatorname{tg}x - 1) + C) = \operatorname{tg}x - 1 + Ce^{-\operatorname{tg}x}$$

Ответ: $y = \operatorname{tg}x - 1 + Ce^{-\operatorname{tg}x}$

Задания к практической работе.

1 $y' = x + y$

2 $xy' - y = x^2 \cos x$

3 $y' = x + \frac{y}{x} - y$

4 $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

5 $y' - 2y + 3e^{2x} = 0$

6 $y' + \frac{2y}{x} = 3x^2 y^{\frac{4}{3}}$

7 $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$

8 $xy' + 2y = x^3$

9 $y' \cos x + y = 1 - \sin x$

10 $xy' + y - 2x = 0$

11 $y' + x^2 y = x^2$

12 $xy' + y = 3$

13 $y' \sin x - y \cos x = 1$

14 $(1 + x^2)y' - xy = 2x$

15 $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$

16 $y' + y \cos x = \sin 2x$

17 $xy' + y = \ln x + 1$

18 $xy' - 2y = 3x^5$

$$19 \quad y' + x^2 y = 2e^{-\frac{x^3}{3}}$$

$$20 \quad y' + 3y \operatorname{tg} 3x = \sin 6x$$

$$21 \quad y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^3 x}$$

$$22 \quad y' + 5x^4 y = -10x^9$$

$$23 \quad y' - \frac{y}{x} = x$$

$$24 \quad xy' + y - 4x = 0$$

$$25 \quad y' + 2y \operatorname{tg} x = \cos^4 x$$

$$26 \quad y' - y = e^x$$

$$27 \quad xy' + y - 2x = 0$$

$$28 \quad xy' - 2y = 3x^5$$

$$29 \quad y' + 5x^4 y = -10x^9$$

$$30 \quad y' + x^2 y = x^2$$

Практическая работа №11 Решение задач на перестановки, сочетания, размещения

1) Теоретический этап.

Опорный конспект.

Определение.

Произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно называют n – **факториалом** и пишут $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$.

Перестановки	Размещения	Сочетания
n элементов n мест	n элементов m мест	n элементов m мест
порядок имеет значение	порядок имеет значение	порядок не имеет значение
$P = n!$	1) $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ 2) $A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1)$	$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

2)

Подготовительный этап.

Перепишите и заполните пропуски:

Пример 1. За столом пять мест. Сколькими способами можно расставить пятерых гостей?

Решение: $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = \dots$ способов

Ответ: 120 способов.

Пример 2. а) Сколько трехзначных чисел можно записать, используя цифры 1, 3, 6, 7, 9, если каждая из них может быть использована в записи только один раз?

Решение: Искомое число вариантов равно числу размещений из 5 элементов по 3 элемента, т.е. по формуле получаем: $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = \dots$ чисел.

Ответ: 60 чисел.

б) Из 20 студентов надо выбрать старосту, его заместителя и редактора газеты. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: Искомое число вариантов равно числу размещений из 20 элементов по 3 элемента, т.е. по формуле получаем: $A_{20}^3 = 20 \cdot 19 \cdot 18 = \dots$ способов.

Ответ: 6840 способов.

Пример 3. а) Из 15 членов туристической группы надо выбрать трех дежурных. Сколькими способами можно сделать этот выбор?

Решение: каждый выбор отличается от другого хотя бы одним дежурным. Значит, здесь речь идет о сочетаниях из 15 элементов по 3. Следовательно, по формуле получаем

$$C_{15}^3 = \frac{15!}{3!(15-3)!} = \frac{15!}{3!12!} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 13 \cdot 7 \cdot 5 = \dots \text{способов}$$

Ответ: 455 способов.

б) Студентам дали список из 10 книг, которые рекомендуется прочитать во время каникул. Сколькими способами студент может выбрать из них 6 книг?

Решение: Выбор 6 из 10 без учёта порядка: $C_{10}^6 = \frac{10!}{4!6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 = \dots$

способов.

Ответ: 210 способов.

3) Практический этап.

1. За столом семь мест. Сколькими способами можно расставить семерых гостей?
2. а) Сколько трехзначных чисел можно записать, используя цифры 1,2,4,6,7,9, если каждая из них может быть использована в записи только один раз?
б) Из 15 учащихся надо выбрать старосту, его заместителя и редактора газеты. Сколькими способами это можно сделать?
3. а) Из 25 членов туристической группы надо выбрать трех дежурных. Сколькими способами можно сделать этот выбор?
б) Учащимся дали список из 10 книг, которые рекомендуется прочитать во время каникул. Сколькими способами ученик может выбрать из них 7 книг?

Пример 4. Вычислить $\frac{6!-4!}{3!}$

Пример 5. Упростить $\frac{(n-1)!}{(n+2)!}$

Пример 6. Вычислить $\frac{P_6 - P_5}{P_4}$

Пример 7. Вычислить A_8^4 ; C_{10}^4

4) Дополнительные задания*.

Вариант 1

1. Вычислить $\frac{5!3!}{6!}$

2. Упростить $\frac{1}{n!} \frac{1}{(n+1)!}$

3. Вычислить $\frac{P_4 + P_6}{P_3}$

4. Вычислить A_{13}^5 ; C_8^4

1. Вычислить $\frac{5!}{3!+4!}$

2. Упростить $\frac{n!}{(n-2)!}$

3. Вычислить $\frac{P_{20}}{P_4 \cdot P_{16}}$

4. Вычислить A_{25}^2 ; C_{36}^5

Вариант 2

Практическая работа №12,13: Вычисление вероятности событий с применением теорем

Цель: Отработка навыков вычисления вероятности событий с применением теорем

Классическое определение вероятности

Вероятностью события A называется отношение числа благоприятных для A исходов к числу всех равновозможных исходов: $P(A) = \frac{m}{n}$

где n — общее число равновозможных исходов, m — число исходов, благоприятствующих событию A .

Противоположные события

Событие, противоположное событию A , обозначают \bar{A} . При проведении испытания всегда происходит ровно одно из двух противоположных событий и

Объединение несовместных событий

Два события A и B называют несовместными, если отсутствуют исходы, благоприятствующие одновременно как событию A , так и событию B .

Если события A и B несовместны, то вероятность их объединения равна **сумме вероятностей событий** A и B : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Пересечение независимых событий

Два события A и B называют независимыми, если вероятность каждого из них **не зависит** от появления или не появления другого события.

Событие C называют пересечением событий A и B (пишут $C = A \cap B$), если событие C означает, что **произошли оба события A и B** .

Если события A и B **независимы**, то вероятность их пересечения равна **произведению** вероятностей событий A и B :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Формула сложения вероятностей совместных событий:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

1. Из 1000 собранных на заводе телевизоров 5 штук бракованных. Эксперт проверяет один наугад выбранный телевизор из этой 1000. Найдите вероятность того, что проверяемый телевизор окажется бракованным.

Решение. При выборе телевизора наугад возможны 1000 исходов, событию A «выбранный телевизор — бракованный» благоприятны 5 исходов. По определению вероятности $P(A) = 5 \div 1000 = 0,005$. Ответ: 0,005.

2. В урне 9 красных, 6 жёлтых и 5 зелёных шаров. Из урны наугад достают один шар. Какова вероятность того, что этот шар окажется жёлтым?

Решение. Общее число исходов равно числу шаров: $9 + 6 + 5 = 20$. Число исходов, благоприятствующих данному событию, равно 6. Искомая вероятность равна $6 \div 20 = 0,3$. Ответ: 0,3.

3. Петя, Вика, Катя, Игорь, Антон, Полина бросили жребий — кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должен будет мальчик.

Решение. Вероятность события равна отношению количества благоприятных случаев к количеству всех случаев. Благоприятными случаями являются 3 случая, когда игру начинает Петя, Игорь или Антон, а количество всех случаев 6. Поэтому искомое отношение равно $3:6=0,5$. Ответ: 0,5.

4. В чемпионате мира участвуют 16 команд. С помощью жребия их нужно разделить на четыре группы по четыре команды в каждой. В ящике вперемешку лежат

карточки с номерами групп: 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4. Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда России окажется во второй группе?

Решение. Обозначим через A событие «команда России во второй группе». Тогда количество благоприятных событий $m = 4$ (четыре карточки с номером 2), а общее число равновероятных событий $n = 16$ (16 карточек) по определению вероятности $P = \frac{4}{16} = 0,25$. Ответ: 0,25

5. В лыжных гонках участвуют 11 спортсменов из России, 6 спортсменов из Норвегии и 3 спортсмена из Швеции. Порядок, в котором спортсмены стартуют, определяется жребием. Найдите вероятность того, что первым будет стартовать спортсмен не из России.

Решение. Всего спортсменов $11 + 6 + 3 = 20$ человек. Поэтому вероятность того, что первым будет стартовать спортсмен не из России равна $\frac{9}{20} = 0,45$. Ответ: 0,45.

6. На каждые 1000 электрических лампочек приходится 5 бракованных. Какова вероятность купить исправную лампочку?

Решение. На каждые 1000 лампочек приходится 5 бракованных, всего их 1005. Вероятность купить исправную лампочку будет равна доле исправных лампочек на каждые 1005 лампочек, то есть $\frac{1000}{1005} = 0,995$. Ответ: 0,995.

7. В группе туристов 8 человек. С помощью жребия они выбирают шестерых человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин? $6 : 8 = 0,75$.

8. В чемпионате по футболу участвуют 16 команд, которые жеребьевкой распределяются на 4 группы: А, В, С и D. Какова вероятность того, что команда России не попадает в группу А?

Решение. Каждая команда попадет в группу с вероятностью 0,25. Таким образом, вероятность того, что команда не попадает в группу равна $1 - 0,25 = 0,75$. Ответ: 0,75

9. На турнир по шахматам прибыло 26 участников в том числе Коля и Толя. Для проведения жеребьевки первого тура участников случайным образом разбили на две группы по 13 человек. Найдите вероятность того, что Коля и Толя попадут в разные группы.

Решение. Всего 26 мест. Пусть Коля займет случайное место в любой группе. Останется 25 мест, из них в другой группе 13. Исходом считаем выбор места для Толи. Благоприятных исходов 13. $P = \frac{13}{25} = 0,52$. Ответ: 0,52

10. В классе 16 учащихся, среди них два друга — Вадим и Сергей. Учащихся случайным образом разбивают на 4 равные группы. Найдите вероятность того, что Вадим и Сергей окажутся в одной группе.

Решение. Если Сергею первому досталось некоторое место, то Олегу остаётся 15 мест. Из них 3 — в той же группе, где Сергей. Искомая вероятность равна $\frac{3}{15}$. Ответ: 0,2

11. В классе 21 учащийся, среди них два друга — Вадим и Олег. Класс случайным образом разбивают на 3 равные группы. Найдите вероятность того, что Вадим и Олег окажутся в одной группе.

Решение. Пусть один из друзей находится в некоторой группе. Вместе с ним в группе окажутся 6 человек из 20 оставшихся учащихся. Вероятность того, что друг окажется среди этих 6 человек, равна $\frac{6}{20} = 0,3$. Ответ: 0,3

12. Перед началом первого тура чемпионата по настольному теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 16 спортсменов, среди которых 7 участников из России, в том числе Платон Карпов. Найдите вероятность того, что в первом туре Платон Карпов будет играть с каким-либо спортсменом из России? $\frac{6}{15} = 0,4$. Ответ: 0,4.

13. Перед началом первого тура чемпионата по шашкам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 шашкистов, среди которых 3 участника из России, в том числе Василий Лукин. Найдите вероятность того, что в первом туре Василий Лукин будет играть с каким-либо шашкистом из России? $2:25=0,08$. Ответ: 0,08.

14. В классе 26 учащихся, среди них два друга — Сергей и Андрей. Учащихся случайным образом разбивают на 2 равные группы. Найдите вероятность того, что Сергей и Андрей окажутся в одной группе. Ответ $12:25=0,48$.

15. В классе 21 ученик, среди них 2 друга – Тоша и Гоша. На уроке физкультуры класс случайным образом разбивают на 3 равные группы. Найдите вероятность того, что Тоша и Гоша попали в одну группу. Ответ $6:20=0,3$.

16. В классе 21 учащийся, среди них две подруги - Аня и Нина. Класс случайным образом делят на семь групп, по 3 человека в каждой. Найдите вероятность того, что Аня и Нина окажутся в одной группе. Ответ: $2:20=0,1$.

17. Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали идти. Найдите вероятность того, что часовая стрелка остановилась, достигнув отметки 7, но не дойдя до отметки 1. Ответ. $6:12=0,5$ (6 делений между 12 и 7, всего 12 делений)

18. Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали ходить. Найдите вероятность того, что часовая стрелка застыла, достигнув отметки 6, но не дойдя до отметки 9 часов. $3:12=0,25$

При решении задач с монетами число всех возможных исходов можно посчитать по формуле $n=2^{\alpha}$, где α – количество бросков

19. В случайном эксперименте симметричную монету бросают 2 раза. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно 1 раз.

Решение. Всего возможны четыре исхода: решка-решка, решка-орёл, орёл-решка, орёл-орёл. Орёл выпадает ровно один раз в двух случаях, поэтому вероятность того, что орёл выпадет ровно один раз равна $2:4=0,5$. Ответ: 0,5.

20. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что орёл не выпадет ни разу. Ответ: $1:4=0,25$

21. В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что орёл не выпадет ни разу. *Решение. $1:8=0,125$ Ответ. 0,125*

22. В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет ровно 2 раза.

*Решение. Составим список возможных вариантов. Бросают 2 раза может выпасть О - Орел, Р - Решка:
ОО, ОР, РО, РР. Всего 4 исхода из них только один случай удовлетворяет условию.
Вероятность (Р) = $1/4=0.25$. Ответ: 0.25*

23. В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что решка не выпадет ни разу.

Решение. Всего исходов $2^4=16$, благоприятных 1 (ОООО). $1:16=0,0625$. Ответ: 0,0625

При решении задач с кубиками число всех возможных исходов можно посчитать по формуле $n=6^{\alpha}$, где α – количество бросков

24. Определите вероятность того, что при бросании игрального кубика (правильной кости) выпадет нечетное число очков.

Решение. При бросании кубика равновозможных шесть различных исходов. Событию

"выпадет нечётное число очков" удовлетворяют три случая: когда на кубике выпадает 1, 3 или 5 очков. Поэтому вероятность того, что на кубике выпадет нечётное число очков равна $3:6=0,5$. Ответ: 0,5.

25. Определите вероятность того, что при бросании кубика выпало число очков, не большее 3.

Решение. При бросании кубика равновозможны шесть различных исходов. Событию "выпадет не больше трёх очков" удовлетворяют три случая: когда на кубике выпадает 1, 2, или 3 очка. Поэтому вероятность того, что на кубике выпадет не больше трёх очков равна $3:6=0,5$. Ответ: 0,5.

26. Игральную кость бросают дважды. Найдите вероятность того, что оба раза выпало число, большее 3.

Решение. При бросании кубика $6^2=36$ различных исходов. Событию "выпадет больше трёх очков" удовлетворяют три случая: когда на кубике выпадает 4, 5, или 6 очков, благоприятных исходов 9 (4,4; 4,5; 4,6; 5,4; 5,5; 5,6; 6,4; 6,5; 6,6.) Ответ: 9:36 = 0,25.

27. В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 7 очков. Результат округлите до сотых.

Решение. При бросании кубика $6^3=216$ различных исходов, благоприятных 14. $14:216=0,07$. Ответ: 0,07.

28. Коля выбирает трехзначное число. Найдите вероятность того, что оно делится на 5.

Решение. Всего трехзначных чисел 900. На пять делится каждое пятое их них, то есть таких чисел $900:5=180$. Вероятность того, что Коля выбрал трехзначное число, делящееся на 5, определяется отношением количества трехзначных чисел, делящихся на 5, ко всему количеству трехзначных чисел: $180:900=0,2$. Ответ: 0,2.

29. Для экзамена подготовили билеты с номерами от 1 до 50. Какова вероятность того, что наугад взятый учеником билет имеет однозначный номер?

Решение. Всего было подготовлено 50 билетов. Среди них 9 были однозначными. Таким образом, вероятность того, что наугад взятый учеником билет имеет однозначный номер равна $9:50=0,18$. Ответ: 0,18.

30. В мешке содержатся жетоны с номерами от 5 до 54 включительно. Какова вероятность, того, что извлеченный наугад из мешка жетон содержит двузначное число?

Решение. Всего в мешке жетонов - 50. Среди них 45 имеют двузначный номер. Таким образом, вероятность, того, что извлеченный наугад из мешка жетон содержит двузначное число равна $45:50=0,9$. Ответ: 0,9.

31. Какова вероятность того, что случайно выбранное натуральное число от 10 до 19 делится на 3?

$$3:10=0,3. \text{ Ответ: 0,3.}$$

Противоположные события.

32. Вероятность того, что новая шариковая ручка пишет плохо (или не пишет), равна 0,19. Покупатель в магазине выбирает одну такую ручку. Найдите вероятность того, что эта ручка пишет хорошо.

Решение. Вероятность того, что ручка пишет хорошо, равна $1-0,19=0,81$. Ответ: 0,81.

33. Вероятность того, что в случайный момент времени температура тела здорового человека окажется ниже $36,8^{\circ}\text{C}$ равна $0,87$. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени у здорового человека температура тела окажется $36,8^{\circ}\text{C}$ или выше. *Ответ.* $1-0,87=0,13$

34. При изготовлении подшипников диаметром 67 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного не больше, чем на $0,01$ мм, равна $0,965$. Найдите вероятность того, что случайный подшипник будет иметь диаметр меньше чем $66,99$ мм или больше чем $67,01$ мм.

Решение. По условию, диаметр подшипника будет лежать в пределах от $66,99$ до $67,01$ мм с вероятностью $0,965$. Поэтому искомая вероятность противоположного события равна $1 - 0,965 = 0,035$. *Ответ:* $0,035$.

Несовместные и независимые события.

35. На экзамене по геометрии школьнику достаётся одна задача из сборника. Вероятность того, что эта задача по теме «Углы», равна $0,1$. Вероятность того, что это окажется задача по теме «Параллелограмм», равна $0,6$. В сборнике нет задач, которые одновременно относятся к этим двум темам. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется задача по одной из этих двух тем.

Решение. Суммарная вероятность несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:
 $P=0,6+0,1=0,7$. *Ответ:* $0,7$.

36. Вероятность того, что на тесте по биологии учащийся O . верно решит больше 11 задач, равна $0,67$. Вероятность того, что O . верно решит больше 10 задач, равна $0,74$. Найдите вероятность того, что O . верно решит ровно 11 задач.

Решение. Рассмотрим события $A = \text{«учащийся решит 11 задач»}$ и $B = \text{«учащийся решит больше 11 задач»}$. Их сумма — событие $A + B = \text{«учащийся решит больше 10 задач»}$. События A и B несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий: $P(A + B) = P(A) + P(B)$. Тогда, используя данные задачи, получаем: $0,74 = P(A) + 0,67$, откуда $P(A) = 0,74 - 0,67 = 0,07$. *Ответ:* $0,07$.

37. Вероятность того, что на тесте по химии учащийся $П$. верно решит больше 8 задач, равна $0,48$. Вероятность того, что $П$. верно решит больше 7 задач, равна $0,54$. Найдите вероятность того, что $П$. верно решит ровно 8 задач. *Решение.* Вероятность решить несколько задач складывается из суммы вероятностей решить каждую из этих задач. Больше 8 : решить 9 -ю, 10 -ю ... Больше 7 : решить 8 -ю, 9 -ю, 10 -ю ... Вероятность решить 8 -ю = $0,54-0,48=0,06$. *Ответ:* $0,06$

38. На клавиатуре телефона 10 цифр, от 0 до 9 . Какова вероятность того, что случайно нажатая цифра будет меньше 4 ? *Ответ:* $4 : 10 = 0,4$.

39. Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна $0,8$. Найдите вероятность того, что биатлонист первые три раза попал в мишени, а последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.

Решение. Поскольку биатлонист попадает в мишени с вероятностью $0,8$, он промахивается с вероятностью $1 - 0,8 = 0,2$. События попасть или промахнуться при каждом выстреле независимы, вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей. Тем самым, вероятность события «попал, попал, попал, промахнулся» равна $0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,02048$. *Ответ:* $0,02048$.

40. Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания лампы в течение года равна $0,3$. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Решение. Найдём вероятность того, что перегорят обе лампы. Эти события независимые, вероятность их произведения равно произведению вероятностей этих событий: $0,3 \cdot 0,3 = 0,09$. Событие, состоящее в том, что не перегорит хотя бы одна лампа, противоположное. Следовательно, его вероятность равна $1 - 0,09 = 0,91$. Ответ: 0,91.

41. Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,06. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две таких батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.

Решение. Вероятность того, что батарейка исправна, равна 0,94. Вероятность произведения независимых событий (обе батарейки окажутся исправными) равна произведению вероятностей этих событий: $0,94 \cdot 0,94 = 0,8836$. Ответ: 0,8836.

42. Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью 0,52. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Гроссмейстеры А. и Б. играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

Решение. Возможность выиграть первую и вторую партию не зависят друг от друга. Вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей: $0,52 \cdot 0,3 = 0,156$. Ответ: 0,156.

43. В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,3. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно (считайте, что клиенты заходят независимо друг от друга).

Решение. Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий. Поэтому вероятность того, что все три продавца заняты равна $(0,3)^3 = 0,027$. Ответ: 0,027.

44. Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 20 пассажиров, равна 0,94. Вероятность того, что окажется меньше 15 пассажиров, равна 0,56. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 15 до 19.

Решение. Рассмотрим события $A = \text{«в автобусе меньше 15 пассажиров»}$ и $B = \text{«в автобусе от 15 до 19 пассажиров»}$. Их сумма — событие $A + B = \text{«в автобусе меньше 20 пассажиров»}$. События A и B несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий: $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Тогда, используя данные задачи, получаем: $0,94 = 0,56 + P(B)$, откуда $P(B) = 0,94 - 0,56 = 0,38$. Ответ: 0,38.

45. На экзамене по геометрии школьнику достаётся один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Вписанная окружность», равна 0,2. Вероятность того, что это вопрос на тему «Параллелограмм», равна 0,15. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Решение. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: $0,2 + 0,15 = 0,35$.

Ответ: 0,35.

46. Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна 0,97. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,89. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Решение. Пусть A = «чайник прослужит больше года, но меньше двух лет», B = «чайник прослужит больше двух лет», C = «чайник прослужит ровно два года», тогда $A + B + C$ = «чайник прослужит больше года». События A , B и C несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий. Вероятность события C , состоящего в том, что чайник выйдет из строя ровно через два года — строго в тот же день, час и секунду — равна нулю. Тогда: $P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) = P(A) + P(B)$ откуда, используя данные из условия, получаем $0,97 = P(A) + 0,89$. Тем самым, для искомой вероятности имеем: $P(A) = 0,97 - 0,89 = 0,08$. Ответ: 0,08.

47. В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,8 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 3 июля, погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 6 июля в Волшебной стране будет отличная погода.

Решение. Для погоды на 4, 5 и 6 июля есть 4 варианта: XXO , XOO , OXO , OOO (здесь X — хорошая, O — отличная погода). Найдём вероятности наступления такой погоды: $P(XXO) = 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0,128$; $P(XOO) = 0,8 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 0,128$; $P(OXO) = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,008$; $P(OOO) = 0,2 \cdot 0,8 \cdot 0,8 = 0,128$. Указанные события несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(XXO) + P(XOO) + P(OXO) + P(OOO) = 0,128 + 0,128 + 0,008 + 0,128 = 0,392.$$

Ответ: 0,392.

48. В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,05 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

Решение. Найдём вероятность того, что неисправны оба автомата. Эти события независимые, вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий: $0,05 \cdot 0,05 = 0,0025$. Событие, состоящее в том, что исправен хотя бы один автомат, противоположное. Следовательно, его вероятность равна $1 - 0,0025 = 0,9975$. Ответ: 0,9975.

49. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Решение. Рассмотрим событие A = кофе закончится в первом автомате, B = кофе закончится во втором автомате.

Вероятность того, что кофе останется в первом автомате равна $1 - 0,3 = 0,7$. Вероятность того, что кофе останется во втором автомате равна $1 - 0,3 = 0,7$. Вероятность того, что кофе останется в первом или втором автомате равна $1 - 0,12 = 0,88$. Поскольку $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$, имеем: $0,88 = 0,7 + 0,7 - x$, откуда искомая вероятность $x = 0,52$. Ответ: 0,9975.

50. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая — 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая — 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Решение. Вероятность того, что стекло куплено на первой фабрике и оно бракованное: $0,45 \cdot 0,03 = 0,0135$. Вероятность того, что стекло куплено на второй фабрике и оно бракованное: $0,55 \cdot 0,01 = 0,0055$. Поэтому по формуле полной вероятности вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным равна $0,0135 + 0,0055 = 0,019$. Ответ: 0,019.

51. Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,2. На столе лежит 10 револьверов, из них только 4 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватается первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.

Решение. Джон попадает в муху, если схватит пристрелянный револьвер и попадет из него, или если схватит непристрелянный револьвер и попадает из него. По формуле условной вероятности, вероятности этих событий равны соответственно $0,4 \cdot 0,9 = 0,36$ и $0,6 \cdot 0,2 = 0,12$. Эти события несовместны, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий: $0,36 + 0,12 = 0,48$. Событие, состоящее в том, что Джон промахнется, противоположное. Его вероятность равна $1 - 0,48 = 0,52$. Ответ: 0,52

52. Чтобы поступить в институт на специальность «Лингвистика», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность «Коммерция», нужно набрать не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и обществознание.

Вероятность того, что абитуриент З. получит не менее 70 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку — 0,8, по иностранному языку — 0,7 и по обществознанию — 0,5.

Найдите вероятность того, что З. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

Решение. В силу независимости событий, вероятность успешно сдать экзамены на лингвистику: $0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,7 = 0,336$, вероятность успешно сдать экзамены на коммерцию: $0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,5 = 0,24$, вероятность успешно сдать экзамены и на «Лингвистику», и на «Коммерцию»: $0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,5 = 0,168$. Успешная сдача экзаменов на «Лингвистику» и на «Коммерцию» — события совместные, поэтому вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий, уменьшенной на вероятность их произведения. Тем самым, поступить на одну из этих специальностей абитуриент может с вероятностью $0,336 + 0,24 - 0,168 = 0,408$. Ответ: 0,408.

53. По отзывам покупателей Иван Иванович оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,8. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,9. Иван Иванович заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

Решение. Вероятность того, что первый магазин не доставит товар равна $1 - 0,9 = 0,1$. Вероятность того, что второй магазин не доставит товар равна $1 - 0,8 = 0,2$. Поскольку эти события независимы, вероятность их произведения (оба магазина не доставят товар) равна произведению вероятностей этих событий: $0,1 \cdot 0,2 = 0,02$. Ответ: 0,02.

54. Перед началом волейбольного матча капитаны команд тянут честный жребий, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Статор» по очереди играет с командами «Ротор», «Мотор» и «Стартер». Найдите вероятность того, что «Статор» будет начинать только первую и последнюю игры. *Решение.* Требуется найти вероятность произведения трех событий: «Статор» начинает первую игру, не начинает вторую игру, начинает третью игру. Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий. Вероятность каждого из них равна 0,5, откуда находим: $0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,125$. Ответ: 0,125.

55. Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется *положительным*. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,9. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,01. Известно, что 5% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет *положительным*.

Решение. Анализ пациента может быть положительным по двум причинам: А) пациент болен гепатитом, его анализ верен; В) пациент не болен гепатитом, его анализ ложен. Это несовместные события, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий. Имеем: $P(A)=0,9 \cdot 0,05=0,045$; $P(B)=0,01 \cdot 0,95=0,0095$
 $P(A+B)=P(A)+P(B)=0,045+0,0095=0,0545$.

Ответ: 0,0545.

56. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,02. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,99. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная батарейка будет забракована системой контроля.

Решение. Ситуация, при которой батарейка будет забракована, может сложиться в результате событий: А = батарейка действительно неисправна и забракована справедливо или В = батарейка исправна, но по ошибке забракована. Это несовместные события, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий. Имеем:

$P(A+B)=P(A)+P(B)=0,02 \cdot 0,99+0,98 \cdot 0,01=0,0198+0,0098=0,0296$ Ответ: 0,0296.

57. Стрелок стреляет по мишени один раз. В случае промаха стрелок делает второй выстрел по той же мишени. Вероятность попасть в мишень при одном выстреле равна 0,7. Найдите вероятность того, что мишень будет поражена (либо первым, либо вторым выстрелом).

Решение. Пусть А — событие, состоящее в том, что мишень поражена стрелком с первого выстрела, В — событие, состоящее в том, что мишень поражена со второго выстрела. Вероятность события А равна $P(A) = 0,7$. Событие В наступает, если, стреляя первый раз, стрелок промахнулся, а, стреляя второй раз, попал. Это независимые события, их вероятность равна произведению вероятностей этих событий: $P(B) = 0,3 \cdot 0,7 = 0,21$. События А и В несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий: $P(A + B) = P(A) + P(B) = 0,7 + 0,21 = 0,91$. Ответ: 0,91.

58. Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд будет первой владеть мячом. Команда А должна сыграть два матча — с командой В и с командой С. Найдите вероятность того, что в обоих матчах первой мячом будет владеть команда А.

Решение. Рассмотрим все возможные исходы жеребьёвки.

- Команда А в матче в обоих матчах первой владеет мячом.
- Команда А в матче в обоих матчах не владеет мячом первой.
- Команда А в матче с командой В владеет мячом первой, а в матче с командой С — второй.
- Команда А в матче с командой С владеет мячом первой, а в матче с командой В — второй.

Из четырех исходов один является благоприятным, вероятность его наступления равна $1:4=0,25$. Ответ: 0,25.

59. Стрелок 4 раза стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,5. Найдите вероятность того, что стрелок первые 3 раза попал в мишени, а последний раз промахнулся.

Решение. Вероятность промаха равна $1 - 0,5 = 0,5$. Вероятность того, что стрелок первые три раза попал в мишени равна $0,5^3 = 0,125$. Откуда, вероятность события, при котором стрелок сначала три раза попадает в мишени, а четвёртый раз промахивается равна $0,125 \cdot 0,5 = 0,0625$. Ответ: 0,0625.

60. Перед началом матча по футболу судья бросает монету, чтобы определить, какая из команд будет первой владеть мячом. Команда «Байкал» играет по очереди с командами

«Амур», «Енисей», «Иртыш». Найдите вероятность того, что команда «Байкал» будет первой владеть мячом только в игре с «Амуrom».

Решение. Монету бросают 3 раза.

Для команды «Байкал» возможные исходы в трех бросках $\{O O O\}, \{P O O\}, \{O P O\}, \{O O P\}, \{P P O\}, \{P O P\}, \{O P P\}, \{P P P\}$. Всего исходов 8,

благоприятных (выпадение орла в первой игре) $\{O P P\}$. $1:8=0,125$. Ответ 0,125.

61. У Пети в кармане лежат шесть монет: четыре монеты по рублю и две монеты по два рубля. Петя, не глядя, переложил какие-то три монеты в другой карман.

Найдите вероятность того, что теперь две двухрублевые монеты лежат в одном кармане.

Решение. Пронумеруем монеты: рублевые – 1, 2, 3, 4; двухрублевые – 5, 6. $\{123\} \{124\} \{125\} \{126\} \{134\} \{135\} \{136\} \{145\} \{146\} \{156\} \{234\} \{235\} \{236\} \{245\} \{246\} \{256\} \{345\} \{346\} \{356\} \{456\}$

$n = 20$ – число всех исходов. Взять три монеты можно так: (числа в порядке возрастания, чтобы не пропустить комбинацию) $m = 8$ – число благоприятных исходов (комбинации, в которых монеты 5 и 6 (двухрублевые) не взяты или взяты обе. $8:20=0,4$

Практическая работа №14: Преобразование прямоугольных координат в полярные и обратно

Цель работы: Ознакомиться с полярной системой координат. Изучить формулы, связывающие прямоугольные координаты X и Y точки M и ее полярные координаты.

Теоретическая часть

1. Прямоугольные (декартовы) координаты на прямой, плоскости и в пространстве. Косоугольные системы координат.

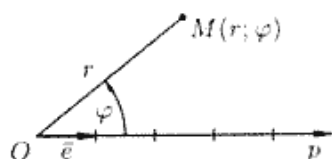
Система координат – способ, позволяющий численно описать положение точки на плоскости.

Прямоугольная система координат (декартова) задается 2 взаимно перпендикулярными прямыми - осями, на каждой из которых выбрано положительное направление и задан единичный (масштабный) отрезок. Единицу масштаба обычно берут одинаковой для обеих осей. Эти оси наз. осями координат, точку их пересечения O – началом координат. Ось абсцисс – Ox, ось ординат – Oy. Оси делят плоскость на 4 области – четверти или квадранты. Единичные векторы осей обозначают i и j ($|i| = |j| = 1, i \perp j$).

Произвольный вектор OM называется радиус-вектором точки M. Координатами точки M в системе координат Oxy (Oij) наз. координаты радиуса-вектора OM. Если OM (x; y), то M

$(x; y)$. Эти два числа x и y полностью определяют положение точки на плоскости – каждой паре x и y соответствует единственная точка, и наоборот.

Полярная система координат задается точкой O , называемой полюсом, лучом Op , называемым полярной осью, и единичным вектором e того же направления, что и луч Op .



Возьмем на плоскости точку M , не совпадающую с O . Положение точки M определяется двумя числами: ее расстоянием r от полюса O и углом φ , образованным отрезком OM с полярной осью (отсчет углов против движению часовой стрелки). Числа r и φ называются полярными координатами точки M , пишут $M(r; \varphi)$, при этом r называют полярным радиусом, φ — полярным углом.

Полярный угол φ ограничивают промежутком $(-\pi; \pi]$ (или $0 < \varphi < 2\pi$), а полярный радиус — $[0; \infty)$.

Прямоугольные координаты точки M выражаются через полярные координаты точки следующим образом:
$$\begin{cases} x = r * \cos\varphi \\ y = r * \sin\varphi \end{cases}$$

Полярные же координаты точки M выражаются через ее декартовы координаты такими

формулами:
$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} \end{cases}$$

Декартова система координат в пространстве:

Прямоугольная система координат в пространстве образуется тремя взаимно перпендикулярными осями координат Ox , Oy и Oz . Оси координат пересекаются в точке O , которая называется началом координат, на каждой оси выбрано положительное направление, указанное стрелками, и единица измерения отрезков на осях. Единицы измерения обычно одинаковы для всех осей. Ox — ось абсцисс, Oy — ось ординат, Oz — ось аппликат.

2. Расстояние между двумя точками прямой, плоскости и в пространстве.

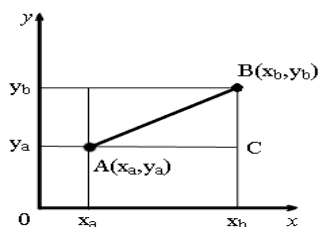
Расстояние между двумя точками — это длина отрезка, что соединяет эти точки.

Формулы вычисления расстояния между двумя точками:

1) Формула вычисления расстояния между двумя точками $A(x_a, y_a)$ и $B(x_b, y_b)$ на плоскости:

$$AB = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

2) Формула вычисления расстояния между двумя точками $A(x_a, y_a, z_a)$ и $B(x_b, y_b, z_b)$ в пространстве: $AB = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2}$



Вывод формулы для вычисления расстояния между двумя точками на плоскости.

Из точек A и B опустим перпендикуляры на оси координат.

Рассмотрим прямоугольный треугольник $\triangle ABC$. Катеты этого треугольника равны:

$$AC = x_b - x_a;$$

$$BC = y_b - y_a.$$

Воспользовавшись теоремой Пифагора, вычислим длину отрезка АВ:

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}.$$

Подставив в это выражение длины отрезков АС и ВС, выраженные через координаты точек А и В, получим формулу для вычисления расстояния между точками на плоскости. Формула для вычисления расстояния между двумя точками в пространстве выводится аналогично.

3. Деление отрезка в заданном отношении.

Понятие деления отрезка в данном отношении рассмотрим пару точек А,В и – отрезок АВ :



Рассматриваемая задача справедлива, как для отрезков плоскости, так и для отрезков пространства. То есть, демонстрационный отрезок можно как угодно разместить на плоскости или в пространстве.

Отрезок АВ делится на две части с помощью некоторой точки М, которая, понятно, расположена прямо на нём:



В данном примере точка М делит отрезок ТАКИМ образом, что отрезок АМ в два раза короче отрезка МВ. ЕЩЁ можно сказать, что точка М делит отрезок АВ в отношении 1:2 считая от вершины А. записывают следующим образом: $AM : BM = 1 : 2$, или чаще в

$$\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$$

виде привычной пропорции: $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$. Отношение отрезков принято стандартно

$$\lambda = \frac{1}{2}$$

обозначать греческой буквой «лямбда», в данном случае:

$$\lambda = \frac{BM}{AM} = 2$$

Пропорцию несложно составить и в другом порядке: $\lambda = \frac{BM}{AM} = 2$ –запись означает, что отрезок ВМ в два раза длиннее отрезка АМ, но какого-то принципиального значения для решения задач это не имеет. Можно так, а можно так.

Разумеется, отрезок легко разделить в каком-нибудь другом отношении, и в качестве закрепления понятия второй пример:



$$\lambda = \frac{AM}{BM} = \frac{5}{4}$$

соотношение: $\lambda = \frac{AM}{BM} = \frac{5}{4}$. Если составить пропорцию наоборот, тогда

$$\lambda = \frac{BM}{AM} = \frac{4}{5}$$

получаем:

Формулы деления отрезка в данном отношении на плоскости

Если известны две точки плоскости $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$, то координаты

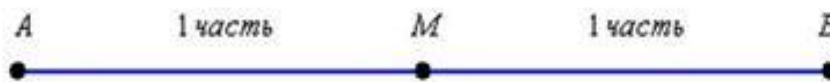
точки $M(x_M; y_M)$, которая делит отрезок АВ в отношении $\lambda = \frac{AM}{BM}$, выражаются формулами:

$$x_M = \frac{x_A + \lambda \cdot x_B}{1 + \lambda}, \quad y_M = \frac{y_A + \lambda \cdot y_B}{1 + \lambda}$$

В курсе аналитической геометрии эти формулы строго выводятся с помощью векторов. Кроме того, они справедливы не только для декартовой системы координат, но и для произвольной аффинной системы координат. Такая вот универсальная задача.

Формулы координат середины отрезка

Задача деления отрезка на две равные части – это частный случай деления отрезка в данном отношении. Знаменательную



пропорцию $\lambda = \frac{AM}{BM} = \frac{1}{1} = 1$. И общие

формулы $x_M = \frac{x_A + \lambda \cdot x_B}{1 + \lambda}, y_M = \frac{y_A + \lambda \cdot y_B}{1 + \lambda}$ преобразуются в нечто знакомое и простое:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Удобным моментом является тот факт, что координаты концов отрезка можно безболезненно переставить:

$$x_M = \frac{x_B + x_A}{2}, \quad y_M = \frac{y_B + y_A}{2}$$

В общих формулах не проходит. Да и здесь в нём нет особой надобности, так, приятная мелочь.

Для пространственного случая справедлива очевидная аналогия. Если даны концы отрезка

$A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B)$, то координаты его

середины М выражаются формулами:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$$

4. Полярная система координат. Сферическая система координат.

Полярная система координат — двумерная система координат, в которой каждая точка на плоскости определяется двумя числами — полярным углом и полярным радиусом.

Полярная система координат задаётся лучом, который называют нулевым или полярной осью. Точка, из которой выходит этот луч, называется началом координат или полюсом.

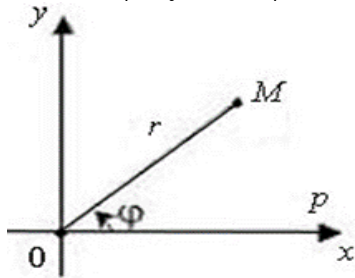
Любая точка на плоскости определяется двумя полярными координатами: радиальной и угловой. Радиальная координата (обычно обозначается r) соответствует расстоянию от точки до начала координат. Угловая координата, также называется полярным углом и

обозначается φ , равна углу, на который нужно повернуть против часовой стрелки полярную ось для того, чтобы попасть в эту точку.

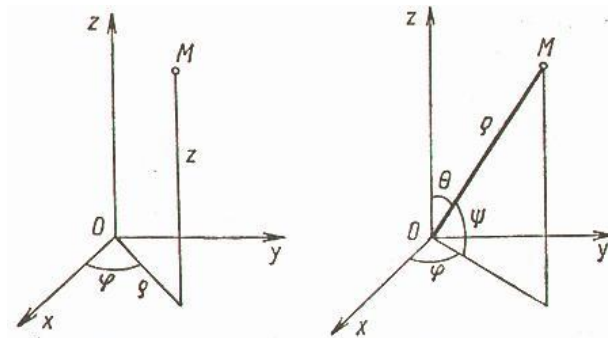
$$x=r \cos \varphi, \quad y=r \sin \varphi, \quad (r \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

Обобщённые полярные координаты.

$$x=r \cos \varphi, \quad y=r \sin \varphi, \quad (r \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$



Сферическую систему координат удобно определять, соотносясь с декартовой



прямоугольной системой координат (см. рисунок):

Сферическими координатами называют систему координат для отображения геометрических свойств фигуры в трёх измерениях посредством задания трёх координат (r, θ, φ) , где r — расстояние до начала координат, а θ и φ — зенитный и азимутальный угол соответственно.

Три координаты (r, θ, φ) определены как:

$r \geq 0$ — расстояние от начала координат до заданной точки P.

$0 \leq \theta \leq 180^\circ$ — угол между осью Z и отрезком, соединяющим начало координат и точку P.

$0 \leq \varphi \leq 360^\circ$ — угол между осью X и проекцией отрезка, соединяющего начало координат с точкой P, на плоскость XY (в Америке углы θ и φ меняются ролями).

Угол θ называется зенитным, или полярным, или нормальным, а также он может быть назван английским словом *colatitude*, а угол φ — азимутальным. Углы θ и φ не имеют значения при $r = 0$, а φ не имеет значения при $\sin(\theta) = 0$ (то есть при $\theta = 0$ или $\theta = 180^\circ$).

$$0 \leq \rho < +\infty, \quad -\pi < \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Главные значения φ, θ, ρ :

$$-\pi/2 \leq \psi \leq \pi/2.$$

Иногда вместо θ рассматривают Ψ :

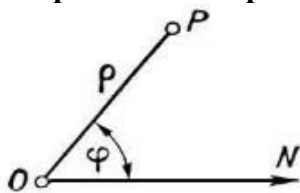
Связь между декартовыми прямоугольными и сферическими координатами

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad x = \rho \cos \psi \cos \varphi,$$

$$y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad y = \rho \cos \psi \sin \varphi,$$

$$z = \rho \cos \theta \quad \text{или} \quad z = \rho \sin \psi.$$

5. Переход от декартовой к полярной системе координат и обратно.



O — полюс, ρ — полярный радиус, φ — полярный угол

Переход от полярной системы координат к декартовой

Если полюс полярной системы координат совместить с началом прямоугольной системы координат, а полярную ось с положительной полуосью Ox , то по известным полярным координатам точки $A(\rho; \varphi)$ ее прямоугольные координаты вычисляются по формулам:

$$x_1 = \rho \cdot \cos \varphi$$

$$y_1 = \rho \cdot \sin \varphi$$

Переход от декартовой системы координат к полярной

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$$

«. Преобразование координат для прямоугольной системы координат методом сдвига и поворота.

Преобразование декартовых прямоугольных координат при параллельном сдвиге осей определяется формулами

$$x = x' + a, \quad y = y' + b.$$

Здесь x, y суть координаты произвольной точки M плоскости относительно старых осей, x', y' — координаты той же точки относительно новых осей, a, b — координаты нового начала O' относительно старых осей (говорят также, что a есть величина сдвига в направлении оси абсцисс, b — величина сдвига в направлении оси ординат).

Преобразование декартовых прямоугольных координат при повороте осей на угол α (который надо понимать, как в тригонометрии) определяется формулами

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \quad y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha.$$

Здесь x, y суть координаты произвольной точки M плоскости относительно старых осей, x', y' — координаты той же точки относительно новых осей.

Формулы $x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha + a, \quad y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha + b$

определяют преобразование координат при параллельном сдвиге системы осей на величину a в направлении Ox , на величину b в направлении Oy и последующем повороте осей на угол α .

Все указанные формулы соответствуют преобразованию координат при неизменном масштабе

Полярные координаты

285. Построить точки по их полярным координатам:

$$A(5, 0); B(2, \frac{\pi}{4}); C(3, -\frac{\pi}{2}); D(1, \pi).$$

286. Определить полярные координаты точек, симметричных относительно полярной оси

$$\text{точкам } A(3, \frac{\pi}{4}); B(2, -\frac{\pi}{2}); C(3, -\frac{\pi}{3}).$$

287. Определить полярные координаты точек, симметричных относительно полюса точкам

$$A(1, \frac{\pi}{4}); B(5, \frac{\pi}{2}); C(2, -\frac{2\pi}{3}); D(4, \frac{5\pi}{6}).$$

288. Определить полярные координаты вершин и точек пересечения диагоналей правильного шестиугольника $ABCDEF$, сторона которого равна A , приняв за полюс одну его вершину A , а за полярную ось — направленную прямую AB .

289. Определить полярные координаты вершин и точки пересечения медиан правильного треугольника ABC , сторона которого равна A , приняв за полюс одну его вершину A , а за полярную ось — направленную прямую AB .

Практическая работа №15: Составление уравнений кривых второго порядка

Цель: Сформировать навыки составления уравнений кривых второго порядка

Ход работы

- 1) Изучить теоретический материал и рассмотренные примеры, применяя теоретические знания для составления уравнений кривых второго порядка (всю теорию и примеры законспектировать в рабочую тетрадь).
- 2) Практическую часть выполнить в тетрадях для практических занятий.
- 3) Ответы на контрольные вопросы законспектировать в тетрадях для практических занятий.

1) Теоретический материал:

Определение. Уравнение второй степени относительно x и y

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (1)$$

называется *общим уравнением линии второго порядка*.

в уравнении (1) можно освободиться от члена с произведением координат, и общее уравнение примет вид

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) определяет на плоскости xOy эллипс, гиперболу или параболу:

1. $AC > 0$ - эллипс,
2. $AC < 0$ - гипербола,
3. $AC = 0$ - парабола.

Окружность

Определение. *Окружностью* называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от ее центра.

Пусть точка $C(x_0; y_0)$ - *центр окружности*. Расстояние любой точки окружности до центра обозначим через R - *радиус окружности* (рис.1). Пусть $M(x; y)$ текущая точка окружности. Из определения окружности следует, что расстояние от точки $M(x; y)$ до центра окружности $C(x_0; y_0)$ будет равно радиусу этой окружности. Используя формулу для расстояния между двумя точками, получим каноническое уравнение окружности

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \quad (4)$$

Этому уравнению будут удовлетворять координаты точек, лежащих на окружности. Уравнение (4) называется *нормальным уравнением* окружности.

Если центр окружности лежит в начале координат, то есть $a = b = 0$, то уравнение (4) принимает вид:

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (5)$$

Этот простейший вид уравнения окружности называется *каноническим*.

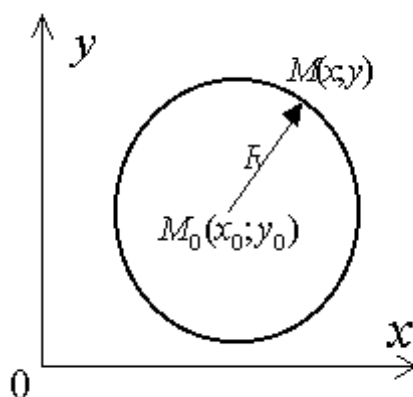


Рис. 2.11.1.

► **Пример.** Составить уравнение окружности, проходящей через точку $A(2; 6)$, если центр окружности совпадает с точкой $C(-1; 2)$.

Решение. Поскольку окружность проходит через точку $A(2; 6)$, координаты этой точки удовлетворяют уравнению $(x+1)^2 + (y-2)^2 = R^2$, то есть $R^2 = (2+1)^2 + (6-2)^2 = 25$, откуда $R = 5$, тогда уравнение окружности принимает вид $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5^2$.

Эллипс. Эксцентриситет и директрисы эллипса

Определение. Эллисом называется геометрическое место точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек плоскости F_1 и F_2 , называемых *фокусами*, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Постоянную сумму расстояний произвольной точки эллипса до фокусов принято обозначать через $2a$. Расстояние между фокусами - $2c$.

Если фокусы эллипса совпадают, то он представляет собой окружность.

Расположим эллипс так, чтобы его фокусы лежали на оси абсцисс симметрично относительно оси ординат, то есть $F_1(c; 0)$, $F_2(-c; 0)$ (Рис. 2). Пусть $M(x; y)$ текущая точка эллипса. В этой системе координат уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (6)$$

где $a = |OA|$ - большая, $b = |OB|$ - малая полуоси эллипса, $b^2 = a^2 - c^2$. Центр симметрии эллипса, определяемого уравнением (6), совпадает с началом координат. Уравнение вида (6) называется каноническим уравнением эллипса. Это уравнение второй степени, следовательно, эллипс – кривая второго порядка.

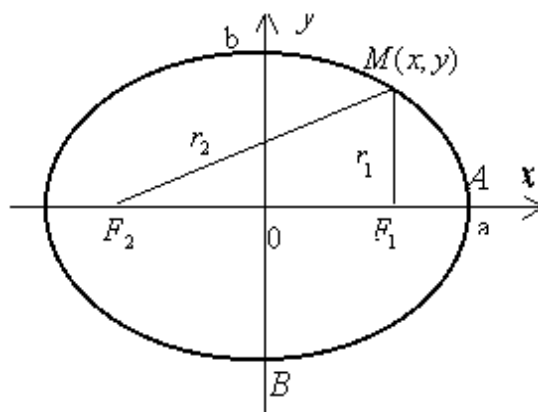


Рис. 2.

Эксцентриситетом эллипса называется число $e = c/a$, равное отношению фокусного расстояния к большой полуоси эллипса. Для эллипса - $0 \leq e < 1$ (для окружности - $e = 0$). Отрезки $F_1M = r_1$ и $F_2M = r_2$ называются фокальными радиусами точки M и могут быть вычислены по формулам $r_1 = a - ex$ и $r_2 = a + ex$. Если эллипс определен уравнением (6) и $a > b$, то прямые $x = -\frac{a}{e}$, $x = \frac{a}{e}$ называются директрисами эллипса (если $b > a$, то директрисы определяются уравнениями $y = -\frac{b}{e}$, $y = \frac{b}{e}$).

Если центр эллипса перенесен в точку $A(x_0, y_0)$, то его каноническое уравнение принимает вид

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

► **Пример 1.** Дано уравнение эллипса $25x^2 + 169y^2 = 4225$. Вычислить длину осей, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса.

Решение. Разделим обе части уравнения на 4225: $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$. Сравнивая полученное уравнение с выражением, заключаем, что $a^2 = 169$, то есть $a = 13$, $b^2 = 25$, то есть $b = 5$, $c^2 = a^2 - b^2 = 169 - 25 = 12^2$. Тогда $c = 12$, а $e = c/a = 12/13$.

◀

Гипербола, ее эксцентриситет, директриса и асимптоты

Определение. Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых абсолютное значение разности расстояний до двух данных точек плоскости F_1 и F_2 , называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$.

Расстояние между фокусами - $2c$.

Если оси декартовой прямоугольной системы координат выбраны так, что фокусы данной гиперболы располагаются на оси абсцисс симметрично относительно начала координат (Рис. 2.13.1), то каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (7)$$

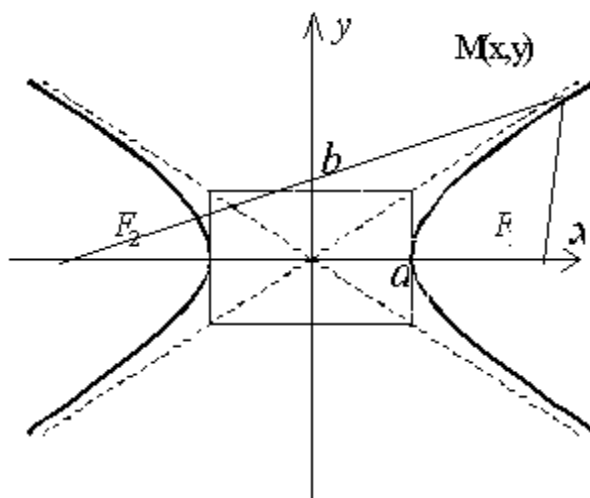


Рис. 3.

где $b^2 = c^2 - a^2$. Уравнение вида (7) называется *каноническим уравнением гиперболы*. При указанном выборе системы координат оси координат являются *осями симметрии гиперболы*, а начало координат – ее *центром симметрии*. Ось Ox называется *действительной осью*, а Oy – *мнимой осью гиперболы*. Точки пересечения гиперболы с осью называются *вершинами гиперболы*.

Прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$, расположенный симметрично относительно осей гиперболы и касающийся ее в вершинах, называется *основным прямоугольником гиперболы*. Диагонали основного прямоугольника (неограниченно продолженные) являются *асимптотами гиперболы* и определяются уравнениями

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x. \quad (8)$$

Эксцентриситетом гиперболы (как и эллипса) называется число $e = c/a$, где a – расстояние от центра гиперболы до ее вершины. Очевидно, что для любой гиперболы $e > 1$.

Если гипербола задана уравнением (8), то прямые, определяемые уравнениями

$$x = -\frac{a}{e}, \quad x = \frac{a}{e},$$

называются ее *директрисами*.

► **Пример 1.** Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, если точка $M_1(4.5; -1)$ лежит на гиперболе и известны уравнения асимптот $y = \pm 2/3x$.

Решение. Из уравнений для асимптот находим $b/a = \pm 2/3$, или $b = \pm 2a/3$. Поскольку точка M_1 принадлежит гиперболе, ее координаты удовлетворяют уравнению

(2.13.1): $\frac{9^2}{(2a)^2} - \frac{1}{b^2} = 1$, где $b^2 = 4a^2/9$ или $\frac{81}{4a^2} - \frac{9}{4a^2} = 1$. Отсюда находим $a^2 = 18$,

тогда $b^2 = 8$, следовательно, уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{8} = 1$.

► **Пример 2.** Дана гипербола $16x^2 - 9y^2 = 144$. Найти ее полуоси a и b , фокусы, эксцентриситет, уравнения асимптот.

Решение. Разделим обе части этого уравнения на 144. Получим $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. Значит $a = 3$, $b = 4$, следовательно оси гиперболы соответственно равны $2a = 6$ и $2b = 8$. Так как $c = \sqrt{9 + 16} = 5$, то фокусы гиперболы находятся в точках $F_1(5; 0)$ и $F_2(-5; 0)$. Эксцентриситет гиперболы вычисляется по формуле $e = c/a = 5/3$. В соответствии с (8), уравнения асимптот имеют вид: $y = \pm \frac{4}{3}x$.

◀

Парабола, ее директриса

Определение. *Параболой* называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых расстояние до некоторой фиксированной точки плоскости F , называемой *фокусом*, равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, называемой *директрисой*.

Пусть дана некоторая парабола. Введем декартову прямоугольную систему координат так, чтобы ось абсцисс проходила через фокус данной параболы перпендикулярно директрисе и была направлена от директрисы к фокусу. Начало координат расположим посередине между фокусом и директрисой (Рис. 4). В этой системе координат данная парабола будет определяться уравнением:

$$y^2 = 2px, \quad (9)$$

где p - расстояние от фокуса до директрисы (*параметр параболы*). Уравнение (9) есть *каноническое уравнение параболы*.

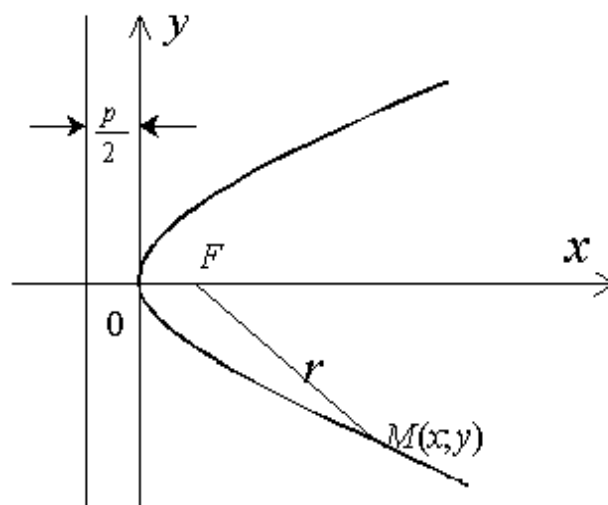


Рис. 4.

Директриса данной параболы определяется уравнением $x = -p/2$. Фокальный радиус произвольной точки $M(x, y)$ параболы может быть вычислен по формуле

$$r = x + \frac{p}{2}. \quad (10)$$

Парабола имеет одну ось симметрии, называемую *осью параболы*, с которой она пересекается в единственной точке. Точка, в которой парабола пересекается с осью симметрии, называется *вершиной* параболы. При указанном выше выборе системы координат ось параболы совмещена с осью абсцисс, вершина находится в начале координат, а вся парабола лежит в правой полуплоскости.

Если вершину параболы (10) перенести в точку $A(x_0; y_0)$, то ее каноническое уравнение примет вид $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$.

► **Пример 1.** Найти фокус F и уравнение директрисы параболы $y^2 = 24x$.

Решение. Параметр данной параболы $p = 12$. Поскольку расстояние от фокуса до директрисы равно $p/2$, то фокус имеет координаты $F(6; 0)$, а уравнение директрисы $x = -12/2$, то есть $x + 6 = 0$.

◄

► **Пример 2.** Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат и фокусом в точке $F(0; -8)$.

Решение. Поскольку фокус параболы лежит на оси ординат, а ее вершина - в начале координат, то уравнение параболы можно записать в виде $x^2 = \pm 2py$. Так как ордината фокуса отрицательна, то уравнение параболы следует искать в виде $x^2 = -2py$.

Фокусное расстояние $|OF| = p/2 = 8$, откуда $2p = 32$. Следовательно, уравнение параболы имеет вид $x^2 = -32y$.

2) Практическая часть

Задача 1. Составить каноническое уравнение эллипса, зная, что расстояние между фокусами равно 8, а малая полуось $b = 3$.

Задача 2. Найти координаты фокусов и вершин гиперболы $16x^2 - 9y^2 = 144$. Написать уравнение её асимптот и вычислить эксцентриситет.

Задача 3. Составить уравнение параболы и её директрисы, зная, что она симметрична относительно оси OY , фокус находится в точке $F(0; 2)$, вершина совпадает с началом координат.

Задача 4. Найдите координаты центра и радиус окружности:

$$x^2 + y^2 - 8x + 16y - 41 = 0$$

Задача 5. Установить вид кривой второго порядка, заданной уравнением

$$x^2 + 10x - 2y + 11 = 0$$

Задача 6. Установить вид кривой второго порядка, заданной уравнением

$$4x^2 - y^2 + 8x - 8y - 12 = 0 \quad (A \cdot C = -4 < 0)$$

3) **Контрольные вопросы:**

1. *Каноническое уравнение эллипса*
2. *Что такое эксцентриситет?*
3. *Каноническое уравнение окружности*
4. *Каноническое уравнение гиперболы*
5. *Асимптоты гиперболы*
6. *Каноническое уравнение параболы, симметричной относительно оси абсцисс Каноническое уравнение параболы, симметричной относительно оси ординат?*
7. *Что такое директриса?*