Государственное бюджетное
профессиональное образовательное учреждение
«Кунгурский колледж агротехнологий и управления»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ ОУД.07 Математика

по специальности 35.02.03 Технология деревообработки

углублённой подготовки

2023 г.

Рассмотрено и одобрено
на заседании методической комиссии
естественнонаучных дисциплин
Протокол № __1_
от 30 августа 2023 г.
Председатель МК
_____________ В.Н. Чернышёва

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора
____

Методические рекомендации по выполнению практических работ составлены в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины ОУД. 07 Математика

Организация-разработчик: **государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение «Кунгурский сельскохозяйственный колледж»**

Составитель:
Волкова О.В. преподаватель
Ф.И.О., должность

Пояснительная записка

Методические рекомендации к выполнению практических работ по дисциплине «Математика» предназначены для организации самостоятельной работы обучающихся первого курса очного отделения специальности 35.02.03 Технология деревообработки на уроке.

Учебным планом на изучение дисциплины отводится 340 часов, в том числе практические занятия – 336 часов. Практические занятия являются важной формой образовательного процесса и направлены на экспериментальное подтверждение теоретических положений и формирование учебных и профессиональных практических умений, они составляют важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки.

Перед выполнением практической работы преподавателем проводится инструктаж, который включает цель задания, его содержание, время выполнения, основные требования к результатам работы, критерии оценки выполнения задания. Выполнению практических занятий предшествует проверка знаний студентов - их теоретической готовности к выполнению задания. Практические занятия носят репродуктивный характер. Работы, носящие репродуктивный характер, отличаются тем, что при их проведении студенты пользуются подробными инструкциями, в которых указаны: цель работы, пояснения (теория, основные характеристики), порядок выполнения работы.

Критерии оценивания при выполнении практической работы:

Процент результативности (%)	**Оценка уровня подготовки**	**Оценка**
91 – 100	отлично	5
70 - 90	хорошо	4
50 - 69	удовлетворительно	3
Менее 50	неудовлетворительно	2

Время выполнения практической работы составляет 90 минут.
В процессе инструктажа преподаватель обращает внимание обучающихся на возможные встречающиеся типичные ошибки.

Практическая работа №1
Входной контроль по математике на базе 9 классов
1 вариант

1.Вычислить: $5\frac{5}{8} * \frac{8}{9}$ -12;

А) 7	Б) -7	В) 17	Г) -17

2.Найти 15% от 48

А) 72	Б) 7,2	В) 0,72	Г) 3,2

3. Сократить дробь $\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}$;

А) $\frac{a+b}{a-b}$	Б) $2\,\frac{a+b}{a-b}$	В) $\frac{a-b}{a+b}$	Г) $2\frac{a-b}{a+b}$

4.Упростить выражение $\sqrt{25}$-2$\sqrt{16}$+3$\sqrt{64}$;

А) 21	Б) 27	В) 16	Г) 10

5. Вычислить: $\frac{7^{-10} * 7^{-8}}{7^{-20}}$;

А) 49	Б) $\frac{1}{49}$;	В) - 49	Г) -7 $\frac{1}{7}$;

6.Решить уравнение 2-3(x+2) =5-2x;

А) 10	Б) 9	В) 10	Г) -9

7.Найти произведение корней уравнения $2x^2$-9x+4=0;

А) 2	Б) - 2	В) $\frac{1}{8}$	Г) 8

8.Указать наибольшее целое решение неравенства 3(3x-1)>2(5x-7);

А)11	Б) 10	В) - 11	Г) - 10

9.Найти площадь прямоугольника, одна из сторон которого 6 см, а диагональ 10 см

А) 60см^2;	Б) 28см^2;	В) 48см^2;	Г) 16см^2;

10.Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ (2; -3) и $\vec{b}$ (-1;4).

А) - 10	Б) - 3	В) 2	Г) -14

Входной контроль по математике на базе 9 классов

2 вариант

1.Вычислить: $5\frac{5}{6} * \frac{6}{7}$ -10

А) 5	Б) - 5	В) 12	Г) -12

2.Найти 35% от 12

А) 42	Б) 8,2	В) 0,42	Г) 4,2

3.Сократить дробь $\frac{(b+c)^2}{b^2-c^2}$

А) $\frac{b+c}{b-c}$;	Б) $2\frac{b+c}{b-c}$;	В) $\frac{bc}{b+c}$;	Г) 2(b+c);

4.Упростить выражение $3\sqrt{16}$-$4\sqrt{81}$+$\sqrt{64}$

А) -14	Б) 2	В) -16	Г) 10

5.Вычислить: $\frac{6^{-5}*6^{-7}}{6^{-13}}$

А) 6	Б) - 6	В) 36	Г) $\frac{1}{6}$;

7.Найти произведение корней уравнения $7x^2$-9x+2=0

А) $-\frac{2}{7}$	Б) $\frac{7}{2}$	В) $\frac{2}{7}$	Г) 7

8.Указать наибольшее целое решение неравенства 5(x+4) <2(4x-5);

А) 10	Б) - 10	В) 11	Г) 12

9.Найти площадь прямоугольника, одна из сторон которого 5 см, а диагональ 13 см.

А) $60см^2$;	Б) $65см^2$;	В) $18см^2$;	Г) $34см^2$;

10.Найти скалярное произведение векторов: $\vec{a}$(2;3) и $\vec{b}$(1; -4).

А) 10	Б) - 2	В) 2	Г) -10

Входной контроль по математике на базе 9 классов
3 вариант

1.Вычислить: $5\frac{5}{9} * \frac{9}{10}$ -14

А) -19	Б) 19	В) 14	Г) -9

2.Найти 18% от 15

А) 1,2	Б) 2,7	В) 0,27	Г) 27

3.Сократить дробь: $\frac{x^2-y^2}{(x-y)^2}$

А)) $\frac{x-y}{x+y}$;	Б) 2 $\frac{x-y}{x+y}$;	В) $\frac{x+y}{x-y}$	Г) $\frac{x+y}{2(x-y)}$;

4.Упростить выражение 44$\sqrt{36}$-5$\sqrt{81}$+$\sqrt{16}$

А) -17	Б) 17	В) -69	Г) 73

5.Вычислить: $\frac{9^{-5} * 9^{-10}}{9^{-17}}$

А) - $\frac{1}{81}$	Б) $\frac{1}{81}$	В) -81	Г) 81

6.Решить уравнение 7-4(x+2) =10-3x

А) 11	Б) -11	В) 9	Г) -9

7.Найти произведение корней уравнения: $2x^2$-7x+3=0

А) 1,5	Б) 3,5	В) $\frac{1}{6}$;	Г) -1,5

8.Указать наибольшее целое решение неравенства 4(2x-3)>9x-11

А) 2	Б) 0	В) -2	Г) 1

9.Найти площадь прямоугольника, одна из сторон которого 12 см, а диагональ 20 см

А) 192$см^2$;	Б) 240$см^2$;	В) 64$см^2$;	Г) 56$см^2$;

10.Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$(-5;2) и $\vec{b}$(4; -3)

А) 26	Б) -2	В) 0	Г) -26

Практическая работа №2

Повторение: «Действительные числа»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

Повторить и закрепить знания обучающихся по теме: «Преобразование числовых и буквенных выражений».

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

1. С помощью справочных пособий по алгебре повторить:

а) правила действий над обыкновенными дробями;

б) формулы сокращенного умножения;

в) способы разложения выражения на множители;

г) правило сокращения дробей.

2. Изучить условие заданий для практической работы.

3. Оформить отчет о работе.

Правила действий над обыкновенными дробями:

$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$; $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$; $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$

Формулы сокращенного умножения:

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$; $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$;

$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$; $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

ВАРИАНТЫ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Вариант 1.

1. Вычислите значение выражения: $\left(\left(2{,}15 - 1\frac{5}{16}\right) : 33{,}5 + 5\frac{1}{7} \cdot 3{,}85 - 15{,}7\right) \cdot \frac{8}{11} + 2{,}25$.

2. Упростите выражение: $\left(\frac{x+10}{5x+25} - \frac{1}{x+5}\right)\frac{5}{x-5} - \frac{10}{x^2-25}$.

Вариант 2.

1. Вычислите значение выражения: $\left(75 : 4\frac{1}{6} - 3\frac{9}{23} \cdot 3\right)\left(1\frac{5}{18} + 0{,}35 - \frac{11}{15}\right) : 1{,}4$.

2. Упростите выражение: $\frac{y^2}{y^2-1} + \frac{1}{y^2-1} : \left(\frac{2}{2y-y^2} - \frac{1}{2-y}\right)$.

Вариант 3.

1. Вычислите значение выражения:

$$45{,}09 : 1{,}5 - \left(2\frac{1}{3} \cdot 4\frac{1}{2} - 2{,}5 \cdot 2\frac{1}{2}\right) : 4\frac{1}{4}.$$

2. Упростите выражение:

$$\frac{2m}{m^2-4} - \frac{2}{m^2-4} : \left(\frac{m+1}{2m-2} - \frac{1}{m-1}\right).$$

Практическая работа №3

Тема: Уравнения и неравенства. (Повторение)

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

- обновить и закрепить знания школьного курса по теме

Ход работы;

1. Повторить теоретический материал
2. Выполнить назначенный вариант

Теоретический материал:

Уравнение – это равенство, содержащее неизвестную величину (X).

Решить уравнение – это значит найти все его корни, или доказать их отсутствие.

Корень уравнения – это значение неизвестной величины X, при которой уравнение обращается в верное равенство.

Типы уравнений:

Тип уравнения	Общий вид	Примечание	Примеры
Линейное	**ax = b**	Содержит неизвестную величину X в первой степени.	x + 2 = 3; 2 (x + 1) +3 (2x – 1) = 0
Квадратное	$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$	Содержит неизвестную величину X во второй степени.	$3x^2 + 2x - 1 = 0$; (x – 1) (x + 2) = 3.
Дробно - рациональное	$\frac{Q(x)}{R(x)} = \mathbf{0}$	Содержит неизвестную величину X в знаменателе дробного выражения.	$\frac{3}{x} = 5$; $\frac{x+1}{2x} = 1$; $3\,(x+2) + \frac{x-5}{2x+4} = 6$
Иррациональное	$\sqrt[n]{Q(x)} = \mathbf{R\,(x)}$	Содержит неизвестную величину X под знаком корня.	$\sqrt[3]{3x+2} = 2$; $\sqrt{2x-5} = (x+1)$.

Свойства равенств:

Свойство	Применение к уравнению
Если, a = b, то b = a	Части уравнения можно поменять местами, не изменяя знаки.
Если, a = b, m – любое число, то $a \pm m = b \pm m$	Слагаемые можно переносить из одной части уравнения в другую, поменяв знак слагаемого на противоположный.
Если, a = b, $m \neq 0$, то a m = b m, $\frac{a}{m} = \frac{b}{m}$	Обе части уравнения можно умножить, или разделить на одно и тоже число, отличное от нуля, равенство при этом не изменится.

Линейные уравнения

Содержат **неизвестную величину X в первой степени;**

Имеют **единственный корень**.

*Общий вид***: a x = b, a ≠ 0.**

Примеры: 2x + 3 = 5; 2 (x + 1) – 3 (2x – 1) = 5; 2(x + 4) – 5 = 3(x -4).

Алгоритм решения уравнения ***Q(x) = R(x):***

1. Привести уравнение **Q(x) = R(x)** к виду **ax = b**:
   а) раскрыть скобки;
   б) собрать слагаемые с X в левой части уравнения, свободные слагаемые – в правой части;
   в) привести подобные слагаемые;
2. Найти корень уравнения по формуле: **$x = \frac{b}{a}$.**

Примеры решения линейных уравнений:

x + 3 = 0; x = -3;	2x + 1 = 0; 2x = -1; $x = -\frac{1}{2}$;	2 (x + 1) = 5; 2x + 2 = 5; 2x = 5 - 2; $x = \frac{3}{2}$; x =1,5;	2 (x + 1) = 3 (x - 1); 2x + 2 = 3x – 3; 2x – 3x = -3 – 2; -x = -5; x = 5;

Квадратные уравнения

Содержат **неизвестную величину X во второй степени**

Общий вид: $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, где a – коэффициент при x^2, b – коэффициент при x, c – свободный коэффициент.

Типы квадратных уравнений:
полное - $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$
неполное - $\mathbf{ax^2 + bx = 0; c = 0;}$
$\mathbf{ax^2 + c = 0; b = 0;}$

приведенное – $\mathbf{x^2 + px + q = 0; a = 1;}$

Примеры: $3x^2 + 2x - 1 = 0$; (x + 1)(x – 2) = 0; $3x^2 - 1 = 0$; $3x^2 + x = 0$.

Алгоритм решения квадратного уравнения: привести уравнение к виду:

$ax^2 + bx + c = 0$,		$ax^2 + bx = 0$, $c = 0$	$ax^2 - c = 0$; $в = 0$;	$x^2 + px + q = 0$;
найти дискриминант $D = b^2 - 4ac$; если D > 0, то $x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$; если D = 0, то $x = \frac{-b}{2a}$; если D<0, то корней нет	если **a + b + c = 0**, то $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a}$. (если **a = 1**, то $x_1 = 1$, $x_2 = c$)	вынести **x** за скобки: $x(ax + b) = 0$; $x_1 = 0$; и решить уравнение $ax + b = 0$; $x_2 = -\frac{b}{a}$	$ax^2 = c$; $x^2 = \frac{c}{a}$; $x = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$, где $\frac{c}{a} > 0$	**по теореме Виета**: $x_1 \cdot x_2 = q$, $x_1 + x_2 = -p$

Дробно – рациональные уравнения

Содержат **неизвестную величину X в знаменателе дробного выражения.**

Общий вид: $\frac{Q(x)}{R(x)} = 0$, $R(x) \neq 0$.

Примеры: $\frac{3}{x} = 5$; $\frac{3x}{x+1} = \frac{x-2}{x}$; $\frac{3x+6}{x} = 0$.

Алгоритм решения уравнения

$$\frac{S(x)}{P(x)} = \frac{B(x)}{T(x)}$$

I способ:

1. Привести уравнение к общему виду $\frac{Q(x)}{R(x)} = 0$ для этого:

а) перенести дробное выражение из правой части в левую;

б) привести дроби к общему знаменателю;

2. Числитель дроби приравнять к нулю, решить уравнение: Q(x) =0;

3. Найти ОДЗ: R(x) ≠ 0.

Алгоритм решения

$$\frac{S(x)}{P(x)} = \frac{B(x)}{T(x)}$$

II способ

По свойству пропорции, перемножить крест на крест:
числитель левой дроби на знаменатель правой дроби, а знаменатель левой дроби на числитель правой дроби;

2. Решить уравнение S(x) · T(x) = P(x) · B(x).

3. Найти ОДЗ: P(x) ≠ 0. T(x) ≠ 0;

Примеры решения уравнений:

$\frac{3}{x} = 5$

5x = 3

$x = \frac{3}{5}$;

ОДЗ: x ≠ 0.

Ответ: x = 0,6.

$\frac{3x+6}{x-2} = 0$.

3x + 6 = 0;

3x = - 6;

x = -2;

ОДЗ: x – 2 ≠ 0.

$x \neq 2$;

Ответ: x = -2.

$\frac{3x}{x+1} = \frac{x+2}{x}$; $\Leftrightarrow$ 3x · x = (x + 1) · (x + 2);

$3x^2 = x^2 + 2x + x + 2$;

$3x^2 – x^2 - 3x - 2 = 0$;

$2x^2 – 3x – 2 = 0$;

$D = 3^2 – 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 9 + 16 = 25$;

$x_1 = \frac{3+5}{2 \cdot 2} = 2$; $x_2 = \frac{3-5}{2 \cdot 2} = -1$.

ОДЗ : $\begin{cases} x + 1 \neq 0 \\ x \neq 0. \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq -1; \\ x \neq 0. \end{cases}$

Ответ: x = 2.

Формулы сокращенного умножения:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
$(a + b)(a – b) = a^2 – b^2$;

$(a + b)^3 = a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3$;
$(a - b)^3 = a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3$;

$a^3 – b^3 = (a – b)(a^2 + ab + b^2)$;
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$;

Решение систем уравнений

Метод сложение

При решении системы двух линейных уравнений с двумя переменными способом сложения поступают следующим образом:
- умножают почленно уравнения системы, подбирая множители так, чтобы коэффициенты при одной из переменных стали противоположными числами, складывают почленно левые и правые части уравнений системы, решают получившееся уравнение с одной переменной

Метод подстановки

Суть метода подстановки:
Выразить одну переменную через другую из любого уравнения системы.
Подставить полученное выражение в другое уравнение системы и решить, как одно уравнение с одной неизвестной переменной. Зная одну переменную, найти другую из исходного уравнения. Метод позволяет свести решение системы к решению одного уравнения с одним неизвестным.

Решение неравенств

Неравенство – это выражение, содержащее неизвестную величину (X) и знаки неравенств >, <, ≤, ≥.

Решить неравенство – это значит найти все его решения, или доказать их отсутствие.

Решение неравенства – это все значения неизвестной величины X, при которых неравенство обращается в верное неравенство.

Типы неравенств:

Тип неравенства	Общий вид	Примечание	Примеры
Линейное	**ax > b**	Содержит неизвестную величину X в первой степени.	x + 2 < 3; 2 (x + 1) +3 (2x – 1) > 0
Квадратное	$\mathbf{ax^2 + bx + c < 0}$	Содержит неизвестную величину X во второй степени.	$3x^2 + 2x - 1 \geq 0$; (x – 1) (x + 2) > 3.
Дробно - рациональное	$\frac{Q(x)}{R(x)} < 0$	Содержит неизвестную величину X в знаменателе дробного выражения.	$\frac{3}{x} < 5$; $\frac{x+1}{2x} > 1$; $3(x+2) + \frac{x-5}{2x+4} \leq 6$

Свойства неравенств:

Свойство	Применение к неравенству
Если, a > b, то b < a.	Части неравенства можно поменять местами, изменив знак.
Если, a > b, m – любое число, то a ± m > b ± m.	Слагаемые можно переносить из одной части неравенства в другую, поменяв знак слагаемого на противоположный.
Если, a > b, **m>0, то a m > b m,** $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$ **;** **m<0, то a m < b m,** $\frac{a}{m} < \frac{b}{m}$ **;**	Если обе части неравенства умножить, или разделить на одно и тоже положительное число, неравенство при этом не изменится. Если обе части неравенства умножить, или разделить на одно и тоже отрицательное число, знак неравенства при этом изменится на противоположный.

Линейные неравенства

Содержат **неизвестную величину X в первой степени;**

Общий вид: **a x > b, a x < b, a x ≥ b, a x ≤ b, a ≠ 0.**

Примеры: 2x + 3 > 5; 2 (x + 1) – 3 (2x – 1) < 5; 2(x + 4) – 5 ≥ 3(x -4).

Алгоритм решения неравенства ***Q(x) > R(x):***

3. Привести неравенство **Q(x)** > **R(x)** к виду **ax** > **b**:
   а) раскрыть скобки;
   б) собрать слагаемые с X в левой части неравенства, свободные слагаемые – в правой части;
   в) привести подобные слагаемые;

4. разделить обе части неравенства на коэффициент **a,**

если a > 0, то знак неравенства не меняется: $\mathbf{x} > \dfrac{b}{a}$**;**

если a < 0, то знак неравенства меняется: $\mathbf{x} < \dfrac{b}{a}$**.**

5. запишите ответ в виде интервала: x ∈ ($\dfrac{b}{a}$**;** ∞), или x ∈ (-∞; $\dfrac{b}{a}$).

Примеры решения линейных неравенств:

x + 3 < 0; x < -3; x ∈ (-∞; -3).	1 - 2x < 0; - 2x < -1; $x > \dfrac{1}{2}$; x ∈ (0,5; ∞).	2 (x + 1) ≥ 5; 2x + 2 ≥ 5; 2x ≥ 5 - 2; x ≥ 1,5 ; x ∈ [1,5; ∞);	2 (x + 1) ≤ 3 (x - 1); 2x + 2 ≤ 3x – 3; 2x – 3x ≤ -3 – 2; -x ≤ -5; x ≥ 5; x ∈ (5; ∞).

Квадратные неравенства

Содержат **неизвестную величину X во второй степени.**

Общий вид: $\mathbf{ax^2 + bx + c \geq 0}$,
где a – коэффициент при x^2, b – коэффициент при x, c – свободный коэффициент.

полное - $\mathbf{ax^2 + bx + c < 0}$;

неполное - $\mathbf{ax^2 + bx > 0}$; $\mathbf{ax^2 + c < 0}$;

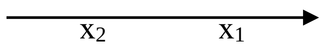
приведенное – $\mathbf{x^2 + px + q > 0}$;

Примеры: $3x^2 + 2x - 1 \geq 0$; $(x + 1)(x – 2) > 0$; $3x^2 – 1 < 0$; $3x^2 + x \leq 0$.

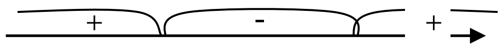
Алгоритм решения квадратного неравенства $ax^2 + bx + c \geq 0$:

Решить квадратное Неравенство $ax^2 + bx + c = 0$;

2. Отметить на луче корни квадратного уравнения $x_1 > x_2$,

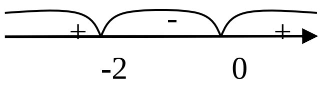
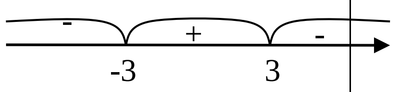
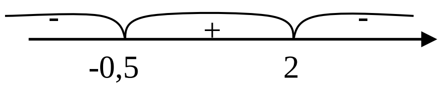


4. Выбрать интервал, соответствующий знаку неравенства:



… > 0 - интервал со знаком «+»;
… < 0 - интервал со знаком «-».

Примеры решения квадратных неравенств:

$3x^2 + 6x \leq 0$;	$9 - x^2 > 0$;	$-2x^2 + 3x + 2 \leq 0$;
$3x^2 + 6x = 0$; $3x(x + 2) = 0$; $x_1 = 0$; $x + 2 = 0$; $x_2 = -2$;  Ответ: x ∈ [-2; 0];	$9 - x^2 = 0$; $x^2 = 9$; $x = \pm 3$;  Ответ: x ∈ (-3; 3);	$-2x^2 + 3x + 2 = 0$; $D = b^2 – 4ac = 9 + 16 = 25$; $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \dfrac{-3+5}{-4} = -\dfrac{1}{2}$; $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \dfrac{-3-5}{-4} = 2$;  Ответ: x ∈ (- ∞; -0,5)∪(2; ∞).

Практическая работа №3

Решение рациональных уравнений и неравенств

	1	**2**	4	5	**5**	**6**
	Решите квадратное уравнение	Решите дробно-линейное уравнение	Решить дробно-линейное уравнение	Решите дробно-линейное неравенство	Решите систему линейных неравенств	Решите систему неравенств
1	$x^2+8x-33=0$	$\frac{3x}{x-1}=\frac{2}{x+2}$	$\frac{x}{x-2}+\frac{5}{x+2}=\frac{8}{x^2-4}$	$\frac{36x-x^2}{3x-2}\le 0$	$\begin{cases}3x-2\le 0\\ x>1\end{cases}$	$\begin{cases}2-6x\ge 4\\ x^2-6x-5>0\end{cases}$
2	$x^2-11x+30=0$	$\frac{3}{x+1}=\frac{2x}{x-1}$	$\frac{4x}{x+3}-\frac{5}{3-x}=\frac{1}{x-3}-1$	$\frac{3+x}{2x^2+x}\ge 0$	$\begin{cases}2x\le 5\\ x+3>0\end{cases}$	$\begin{cases}x^2-2x-3\ge 0\\ 5-x<1\end{cases}$
3	$x^2-6x-135=0$	$\frac{11}{x-4}=\frac{4x}{x+4}$	$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{x^2-2}{x^2+x}$	$\frac{x^2-36}{2x+1}\le 0$	$\begin{cases}x-2\le 0\\ 5x>1\end{cases}$	$\begin{cases}3-4x\le 5\\ x^2-4x+3<0\end{cases}$
4	$x^2-19x+88=0$	$\frac{3x}{x-2}=\frac{5}{x+2}$	$\frac{3x-6}{(x-1)(x+2)}=\frac{3x}{x-1}-\frac{2x}{x+2}$	$\frac{49x-x^2}{4x-3}\ge 0$	$\begin{cases}2x\ge 7\\ x-3>0\end{cases}$	$\begin{cases}x^2-3x-2\ge 0\\ 5<1-x\end{cases}$
5	$x^2+4x-32=0$	$\frac{4x}{x+3}=\frac{5}{3-x}$	$\frac{6}{x^2-1}-\frac{2}{x-1}=2-\frac{x+4}{x+1}$	$\frac{1+x}{x^2+3x}\le 0$	$\begin{cases}4x+2\le 0\\ x>-3\end{cases}$	$\begin{cases}3-4x\ge 5\\ x^2-7x+6>0\end{cases}$
6	$5x^2-16x+3=0$	$\frac{5x}{x-3}=\frac{5}{x+1}$	$\frac{4}{x+2}-\frac{3}{x-2}-\frac{12}{4-x^2}=\frac{1}{7}$	$\frac{x^3-49x}{2x-3}\ge 0$	$\begin{cases}6x\le 2\\ x-5>0\end{cases}$	$\begin{cases}x^2-3x-5\le 0\\ 5<3-x\end{cases}$
7	$7x^2+9x+2=0$	$\frac{3x}{x-1}=\frac{2}{x+2}$	$\frac{3}{x+2}-\frac{2x-1}{x+1}=\frac{2x+1}{x^2+3x+2}$	$\frac{x^3-9x}{3x^2-x}\le 0$	$\begin{cases}2x-3\ge 0\\ x<1\end{cases}$	$\begin{cases}3-x\le 4\\ x^2+6x+4>0\end{cases}$
8	$5x^2-8x+3=0$	$\frac{2}{x-3}=\frac{4x}{x+1}$	$\frac{2}{x^2-4}+\frac{x-4}{x^2+2x}=\frac{1}{x^2-2x}$	$\frac{5-x}{(x-7)^2}\ge 0$	$\begin{cases}4x\le 5\\ x-1<0\end{cases}$	$\begin{cases}2-x\le 5\\ x^2+3x-4>0\end{cases}$
9	$6x^2-7x+1=0$	$\frac{4}{x+2}=\frac{3x}{x-2}$	$\frac{3x}{x-1}-\frac{2x}{x+2}=\frac{3x-6}{(x-1)(x+2)}$	$\frac{x^2-9}{2x-11}\le 0$	$\begin{cases}3x-2\ge 0\\ x<1\end{cases}$	$\begin{cases}x^2+5x-2\le 0\\ 5-x>1\end{cases}$

Практическая работа №4

Тема: Площади плоских фигур.

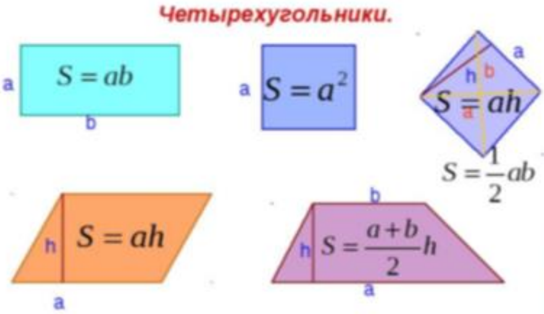
<u>Цель:</u>

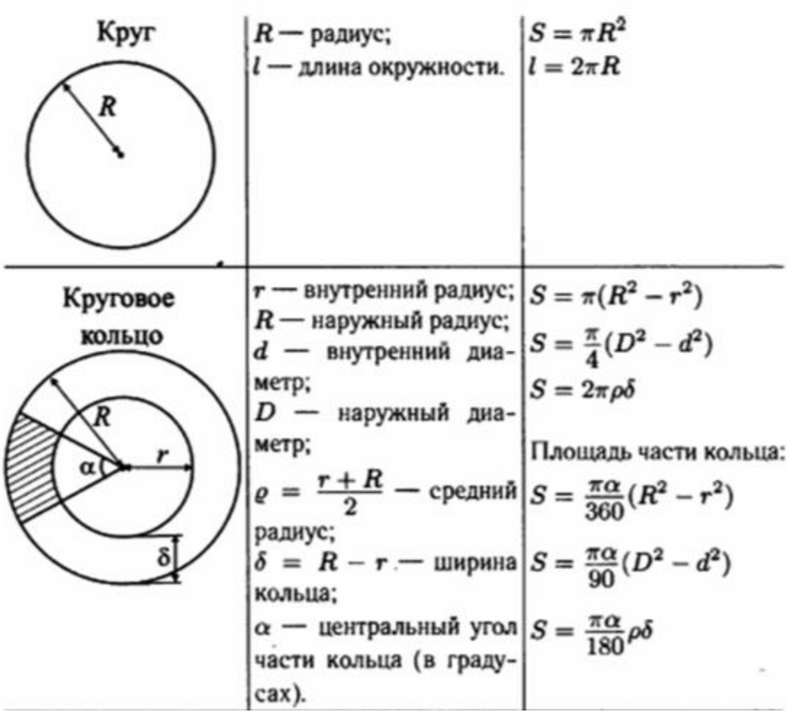
Повторить и систематизировать знания и умения применять формулы нахождения площадей фигур при решении практикоориентированных задач

Ход работы:

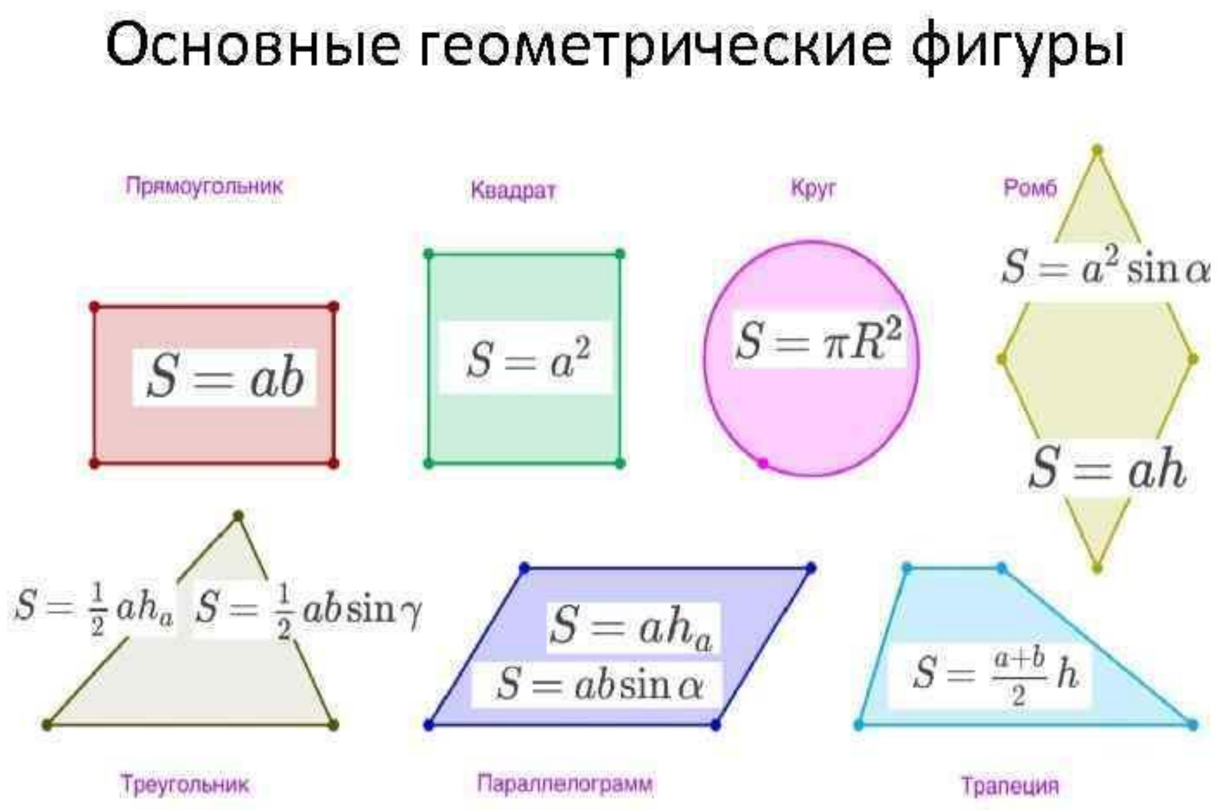
1. Повторить теоретический материал
2. Решить задачи

Теоретический материал:





Круг	R — радиус; l — длина окружности.	$S = \pi R^2$ $l = 2\pi R$
Круговое кольцо	r — внутренний радиус; R — наружный радиус; d — внутренний диаметр; D — наружный диаметр; $\varrho = \frac{r+R}{2}$ — средний радиус; $\delta = R - r$ — ширина кольца; α — центральный угол части кольца (в градусах).	$S = \pi(R^2 - r^2)$ $S = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$ $S = 2\pi\rho\delta$ Площадь части кольца: $S = \frac{\pi\alpha}{360}(R^2 - r^2)$ $S = \frac{\pi\alpha}{90}(D^2 - d^2)$ $S = \frac{\pi\alpha}{180}\rho\delta$



Для организации эффективного процесса тушения пожаров необходимо понимать структуру передачи пламени. Определив направления распространения возгорания, их форму, можно разработать стратегию его локализации и уничтожения.

Площадь пожаров рассчитывается по проекции зоны огня на горизонтальную плоскость. Существуют методики расчета для разных форм. Часто карта пожара имеет вид сложной геометрической фигуры. В этом случае для вычисления параметра возгорания выделяются участки стандартной конфигурации, рассчитывается размер каждого, а затем результаты суммируются.

Расчет площади пожара

Для вычисления размеров пожара сначала следует понять конфигурацию **распространения огня.**

Формулы расчета

Для удобства сведем все математические выражения, позволяющие вычислить площадь определенной конфигурации, в таблицу.

Условные обозначения:

π – константа, имеющая значение 3,1415926;

R – радиус круга;

α – угол между радиусами в градусах;

a, b – стороны прямоугольника, при распространении огня в два направления замеряется промежуток от одной границы фигуры до другой.

Конфигурация	**Метод вычисления**
Круговая	S=π*R2
Угловая	S= (α*R2)/360
Прямоугольная	S=a*b

Практическая работа №5

Тема: «Проценты»

Цель :

1. **Повторить знания обучающихся в теме: «Проценты»**
2. Рассмотреть алгоритмы решения базовых задач на проценты:
   а)нахождение процентов от заданного числа (величины);
   б)нахождение неизвестного числа по его процентам;
   в)нахождение процентов одного числа от другого.
3. Закрепить умения и навыки решения задач с процентами.
4. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

Порядок выполнения:

1. Ознакомиться с теоретическим материалом и решением задач .
2. Сделать краткий конспект теоретического материала в рабочих тетрадях (определение, правила решения основных типов задач).
3. Изучить образцы решенных задач, записать их в рабочую тетрадь.
4. В тетрадях для практических работ выполнить практическую работу .

Теоретические сведения

Слово « процент » происходит от латинских слов pro centum, что буквально означает « со ста ». Процент = одна сотая часть числа.

Понимание процентов и умение выполнять процентные вычисления в настоящее время необходимы каждому человеку. Очень велико прикладное значение этой темы. Она затрагивает финансовую, демографическую, экологическую, социологическую и другие сферы.

Рассмотрим три основных типа задач на проценты.

1)Нахождение процента от числа

Чтобы найти проценты от числа, можно проценты представить в виде десятичной дроби и число умножить на полученную десятичную дробь.

Задача:

Предприятие изготовило за квартал 500 насосов, из которых 60 % имели высшую категорию качества. Сколько насосов высшей категории качества изготовило предприятие?

Решение: Найдем 60 % от 500 (общее количество насосов).

60 % = 0,6

500 • 0,6 = 300 насосов высшей категории качества.

Ответ: 300 насосов высшей категории качества.

2)Нахождение числа по его проценту

Чтобы найти число по его процентам, можно проценты представить в виде десятичной дроби и данное число разделить на полученную десятичную дробь.

Задача: Ученик прочитал 138 страниц, что составляет 23 % числа всех страниц в книге. Сколько страниц в книге?

Решение:

Итак, нам неизвестно сколько всего страниц в книге. Но мы знаем, что часть, которую прочитал ученик (138 страниц) составляет 23 % от общего количества страниц в книге. Так как 138 стр. - это всего лишь часть, само количество страниц, естественно, будет больше 138. Это поможет нам при проверке.

$$138 : 23\,\% = 138 : 0,23 = \frac{138 \cdot 100}{23} = 600 \text{ (стр.)}$$

Проверка: 600 > 138 (это означает, что 138 является частью 600).

Ответ: 600 (стр.) - общее количество страниц в книге.

3)Сколько процентов одно число составляет от другого.

Чтобы найти сколько процентов одно число составляет от другого можно одно число разделить на другое и полученное произведение умножить на 100.

Задача: Из 200 арбузов 16 оказались незрелыми. Сколько процентов всех арбузов составили незрелые арбузы?

Решение:

16 делим на общее количество арбузов и умножаем на 100 %.

$$(16 : 200) \cdot 100\% = \frac{16}{200} \cdot 100\,\% = \frac{2}{25} \cdot 100\,\% = \frac{200\,\%}{25} = 8\,\%$$

Ответ: 8 % - составляют незрелые арбузы от всех арбузов.

Примеры решения задач

Задача 1: Для приготовления фарша взяли говядину и свинину в отношении 7:13. Какой процент в фарше составляет свинина?

Решение: Пусть вязли $7x$ г говядины, тогда свинины взяли $13x$ г. Следовательно, свинина составляет в фарше $\frac{13x}{7x+13x} \cdot 100\% = 65\%.$ Ответ: 65% .

Задача 2: Какова величина подоходного налога, который составляет 13% от величины заработной платы в 25000 рублей?

Решение: $25000 \cdot 0{,}13 = 3250$ рублей. Ответ: 3250 рублей.

Задача 3: Яблоки при сушке теряют 84% своей массы. Сколько сушеных яблок получится из 300 кг свежих?

Решение: Из условия следует, что при сушке теряется $300 \cdot 0{,}84 = 252$ кг.

300-252=48кг Ответ: 48кг.

Задача 4: В спортивном магазине велосипед продается со скидкой 15% за 4500 рублей. Какова первоначальная цена велосипеда?

Решение:

Из условия следует, что 4500–это 85% от первоначальной цены.

4500 рублей – 85%

X рублей– 100%, $X \approx 5294{,}12$ рублей. Ответ: 5294,12р.

Задача 5: Цена товара понизилась на 40%, затем еще на 25%. На сколько процентов понизилась цена товара по сравнению с первоначальной ценой?

Решение:

Обозначим первоначальную цену товара через x. После первого понижения цена станет равной x — 0, 4x = 0,6x.

Второе понижение цены составляет 25% от новой цены 0,6x, поэтому после второго понижения будем иметь цену

0,6x - 0,25 · 0,6x = 0,45x;.

После двух понижений суммарное изменение цены составляет:

x - 0,45x = 0,55x.

Так как величина 0,55x; составляет 55% от величины x, то цена товара понизилась на 55%.

Ответ: 55%.

Задача 6: В колледже 260 обучающихся, из которых 10% неуспевающих. После отчисления некоторого числа неуспевающих, их процент снизился до 6,4%. Сколько учащихся отчислено?

Решение:

До отчисления количество неуспевающих до отчисления составляло

$0,1 \cdot 260 = 26$.
Пусть отчислили x человек. Тогда всего в лицее осталось (260 — x) учащихся, из них неуспевающих стало 26 - x. Имеем пропорцию
260 – x - 100%,
26 - x - 6,4%.
$(260 – x)0,064=(26 - x)100$,
Решая полученное уравнение, находим x = 10.

Ответ: 10.

Задача 7: Первоначальная стоимость единицы продукции равнялась 75 руб. В течение первого года производства она повысилась на некоторое, число процентов, а в течение второго года снизилась (по отношению к повышенной стоимости) на такое же число процентов, в результате чего она стала равна 72 руб. Определите проценты повышения и понижения стоимости единицы продукции.
Решение:
Пусть x% - это проценты повышения (и понижения) стоимости единицы продукции. По определению x% от 75 это — $75 \cdot 0,01x$. Тогда после первого повышения цена станет равняться $75 + 0,75x$.
В течение второго года цена снизится на величину
$0,01x(75+0,75x) = 0,75x + 0,0075x^2$.
Теперь можно записать уравнение для окончательной цены
$(75 + 0,75x)\ \ (0,75x + 0,0075x^2) = 72$;
$x^2 = 400$; отсюда $x_1 = -20$, $x_2 = 20$.
Подходит только один корень этого уравнения: $x_2 = 20$.

Ответ: 20%.

Задача 8: На банковский счет было положено 10 тыс. руб. После того, как деньги пролежали один год со счета сняли 1 тыс. руб. Еще через год на счету стало 11 тыс. руб. Определить, какой процент годовых начисляет банк.
Решение:
Пусть банк начисляет p% годовых.
1) Сумма в 10000 рублей, положенная на банковский счет под p% годовых, через год возрастет до величины
$10000 + 0,01 \cdot p \cdot 10000 = 10000 + 100p$ руб.
Когда со счета снимут 1000 руб., там останется $9000 + 100p$ руб.
2) Еще через год последняя величина за счет начисления процентов возрастет до величины $9000 + 100p + 0,01p(9000 + 100p) = p^2 + 190p + 9000$ руб.
По условию эта величина равна 11000 руб, поэтому имеем квадратное уравнение.
$p^2 + 190p + 9000 = 11000$;
$p^2 +190p-2000=0$, решим это квадратное уравнение, $p_1 = 10$, $p_2 = -200$.
Отрицательный корень не подходит. Ответ: 10%.

Задача 9: В городе в настоящее время 48400 жителей. Известно, что население этого города увеличивается ежегодно на 10%. Сколько жителей было в городе два года назад?
Решение:
Предположим, что два года назад количество жителей город было x человек, тогда количество жителей в настоящее время выражается через x по формуле сложных процентов:
$x(1+0,1)^2 = 1,21x$.
Из условия задачи:
$1,21x = 48400$;
$x = 40000$.

Ответ: 40000 человек.

Варианты практической работы:

Вариант 1

1. За активную общественную деятельность студенту увеличили стипендию на «а»%. Величина стипендии-1050 рублей. Какую стипендию теперь получит активный студент? (Значение «а» выберите сами).
2. За пропуски занятий студенту уменьшили стипендию на 12%. Сколько ему достанется, если стипендия 800 рублей?
3. На сколько рублей повысится квартплата, составляющая 3500 рублей, если с 1 сентября она должна увеличиться на 7 %?
4. В магазине мультиварка продается со скидкой 20% за 4500 рублей. Какова первоначальная цена мультиварки?
5. Грибы при сушке теряют 78% своей массы. Сколько сушеных грибов получится из 100 кг свежих?
6. Какова величина подоходного налога, который составляет 13% от величины заработной платы в 21000 рублей?
7. Сколько рублей составляет скидка на товар от его цены в 1250 рублей, если размер скидки 30%?
8. В декабре шуба стоила 38 тыс. рублей, в сезон цену повысили на 20%, а в мае снизили на 15%, в июле была распродажа со скидкой 30%. Сколько теперь стоит шуба?

Вариант 2

1. За активную общественную деятельность студенту увеличили стипендию на «а»%. Величина стипендии-1000 рублей. Какую стипендию теперь получит активный студент? (Значение «а» выберите сами).
2. За пропуски занятий студенту уменьшили стипендию на 16%.Сколько ему достанется, если стипендия 900 рублей?
3. На сколько рублей повысится квартплата, составляющая 3500 рублей, если с 1 сентября она должна увеличиться на 7 %?
4. В магазине продается блендер со скидкой 10% за 2500 рублей. Какова первоначальная цена блендера?
5. Укроп при сушке теряет 86% своей массы. Сколько сушеного укропа получится из 1 кг свежего?
6. Какова величина подоходного налога, который составляет 13% от величины заработной платы в 30000 рублей?
7. Сколько рублей составляет скидка на товар от его цены в 1280 рублей, если размер скидки 15%?
8. В декабре шуба стоила 35 тыс. рублей, в сезон цену повысили на 15%, а в мае снизили на 10%, в июле была распродажа со скидкой 20%. Сколько теперь стоит шуба?

Практическая работа №6:

Тема: *Преобразование алгебраических выражений, рациональных и иррациональных выражений*

Цель: отработать умения и навыки по преобразованию алгебраических, рациональных и иррациональных выражений

Оборудование: тетрадь для практических работ, ручка, раздаточный материал, рабочая тетрадь с теоретическим материалом, микрокалькулятор.

Вариант – 1

1.Разложите многочлен на множители:

$$a^5 - a^2b + a^3b^2 - b^3$$

2.Сократите дробь:

$\frac{x^2-7x+12}{6-2x}$

3.Упростите выражение:

а) $\frac{ab+b^2}{3} \div \frac{b^3}{3a} + \frac{a+b}{b}$;

б) $\left(\frac{x+10}{5x+25} - \frac{1}{x+5}\right) * \frac{5}{x-5} - \frac{10}{x^2-25}$;

в) $\left(\frac{2m+1}{2m-1} - \frac{2m-1}{2m+1}\right) \div \frac{4m}{10m-5}$.

4.Найдите значение выражения:

а) $\left(\left(2{,}15 - 1\frac{5}{16}\right) \div 33{,}5 + 5\frac{1}{7} * 3{,}58 - 15{,}7\right) * \frac{8}{11} + 2{,}25$;

б) $\frac{\sqrt{2{,}8} * \sqrt{4{,}2}}{\sqrt{0{,}24}}$;

в) $\left(\sqrt{2\frac{2}{3}} - \sqrt{16\frac{2}{3}}\right) \div \sqrt{\frac{2}{27}}$.

5.Избавьтесь от иррациональности в знаменателе:

а) $\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$;

б) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

Вариант – 2

1.Разложите многочлен на множители:

$35x^2 + 7x^2y^2 + 5y + y^3$

2.Сократите дробь:

$\frac{5x^2-12x+4}{6-15x}$

3.Упростите выражение:

а) $\frac{x-y}{x3} - \frac{5y}{x^2} * \frac{x^2-xy}{5y}$;

б) $\frac{y^2}{y^{2-1}} + \frac{1}{y^2-1} \div \left(\frac{2}{2y-y^2} - \frac{1}{2-y}\right)$;

в) $\frac{x+3}{x^2+9} * \left(\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3}\right)$.

4.Найдите значение выражения:

а) $\left(75 \div 4\frac{1}{6} - 3\frac{9}{23} * 3\right) * \left(1\frac{5}{18} + 0.35 - \frac{11}{15}\right) \div 1.4$;

б) $\frac{\sqrt{1.5}*\sqrt{1.8}}{\sqrt{0,3}}$;

в) $\left(\sqrt{2\frac{6}{7}}-\sqrt{6\frac{3}{7}}\right)\div\sqrt{\frac{5}{28}}$.

5.Избавьтесь от иррациональности в знаменателе:
а) $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$;

б) $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{\sqrt{10}-\sqrt{6}}-\frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{\sqrt{10}+\sqrt{6}}$.

Практическая работа №7:

Нахождение приближённых значений величин и погрешностей вычислений (абсолютной и относительной)

Цель работы: сформировать у студентов знания, умения и навыки работы с приближенными числами в применении формул погрешностей элементарных действий и функций, нахождения значений выражений по способу границ и методом строгого учета абсолютных погрешностей после каждой операции

Методические рекомендации.

Если x - точное значение числа,
a – приближённое значение, то $x \approx a$.

ОПР.
Разность $x - a$ между точным и приближённым значением числа называется погрешностью приближения.

ОПР.
Модуль разности между точным и приближённым значением числа называется абсолютной погрешностью приближения $\Delta a = |x - a|$.

ОПР.
Некоторая цифра приближённого числа считается верной, если его абсолютная погрешность Δa не превышает единицы того разряда, в котором стоит эта цифра. В противном случае цифра называется сомнительной.

Пример.
$a = 945{,}673 \pm 0{,}03$
6 – цифра десятых долей, $\Delta a = 0{,}03$
Проверяем: $0{,}03 < 0{,}1$ – верное неравенство, значит 6 – верная цифра. Цифры, стоящие перед 6 тоже верные.
7 – цифра сотых долей
Проверяем: $0{,}03 < 0{,}01$ – нет, значит 7 – сомнительная цифра.

ОПР.
Значащими цифрами десятичной дроби называют все её цифры, кроме нулей, расположенных левее первой, отличной от нуля цифры

ОПР.
Значащими цифрами целого числа называют все его цифры, кроме нулей, расположенных в конце числа, если они стоят взамен неизвестных или отброшенных цифр.
0,<u>712</u> - 3 значащие цифры.

45,03 – 4 значащие цифры
0,0016 - 2 значащие цифры

ОПР.

Относительной погрешностью приближённого значения числа *а* называется отношение абсолютной погрешности этого числа к модулю приближённого значения. $\sigma = \frac{\Delta a}{|a|} * 100\%$

Правила подсчёта цифр:

1. При сложении и вычитании приближённых чисел в результате сохраняют столько десятичных знаков, сколько их в наименее точном числе.
2. При умножении и делении приближённых чисел в результате сохраняют столько значащих цифр, сколько их в числе с наименьшим количеством значащих цифр.
3. При возведении в степень в результате сохраняют столько значащих цифр, сколько их в основании степени.
4. При извлечении корня сохраняют столько значащих цифр, сколько их в подкоренном выражении.
5. При выполнении промежуточных действий оставляют на один знак больше, чем требуют правила, а в результате запасной знак округляют.
6. Если в вычислениях точность задана заранее, то вычисления ведут с запасным знаком, который в результате округляют

1 вариант.

1 **задание.** Установить число значащих цифр в числе: *а*) 649 ; *б*) 0,01405; в) 347|51≈ ; г) 24321≈

2 задание. Определить верные и сомнительные цифры чисел

а) $a = 85,263 \pm 0,0084$ *б*) $x = 729,3 \pm 1$

3 задание. Вычислить значение выражений с оценкой погрешностей, если все числа даны с верными

цифрами.

а) $645,27 + 102,234 + 715,645 + 10,2$ *б*) $\frac{96,891 - 4,25}{33,3 + 0,426}$

4 задание. Округлить число до единиц и найти абсолютную и относительную погрешности приближения : 23,263

2 вариант.

1 **задание.** Установить число значащих цифр в числе: *а*) 43,08; *б*) 0,0298 ; в) 353|617≈ ; г) 25|213 ≈

2 задание. Определить верные и сомнительные цифры чисел

а) $x = 14,28 \pm 0,05$ *б*) $a = 749,3 \pm 1$

3 задание. Вычислить значение выражений с оценкой погрешностей, если все числа даны с верными цифрами.

а) 12030 + 645,29 + 748,5 + 1625,375 *б*) $\dfrac{(0,17 + 0,2445) \cdot 0,56}{1,424}$

4 задание. Округлить число до единиц и найти абсолютную и относительную погрешности

Приближения: 0,892

3 вариант.

1 задание. Установить число значащих цифр в числе: *а*) 0,39 ; *б*) 5,0300 ; в) 347|51≈ ; г) 24|321≈

2 задание. Определить верные и сомнительные цифры чисел

а) $x = 729,5 \pm 1$ *б*) $a = 679,3 \pm 0,06$

3 задание. Вычислить значение выражений с оценкой погрешностей, если все числа даны с верными

цифрами.

а) 26,35 + 1400 + 729,3 + 745,68 *б*) $\dfrac{37,2 + 458.67}{36,5 + 246}$

4 задание. Округлить число до единиц и найти абсолютную и относительную погрешности приближения: 23,263

Практическая работа №8,9:
Действия над комплексными числами в алгебраической форме
Выполнение расчётов с помощью комплексных чисел.

***Цель*: научиться выполнять действия над комплексными числами в алгебраической форме**

$z = a + bi$ – это алгебраическая форма комплексного числа.

Сложение комплексных чисел
Пример 1

Сложить два комплексных числа $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = 4 - 5i$
Для того чтобы сложить два комплексных числа нужно сложить их действительные и мнимые части:
$z_1 + z_2 = 1 + 3i + 4 - 5i = 5 - 2i$

Вычитание комплексных чисел
Пример 2

Найти разности комплексных чисел $z_1 - z_2$ и $z_2 - z_1$, если $z_1 = -2 + i$, $z_2 = \sqrt{3} + 5i$
Действие аналогично сложению, единственная особенность состоит в том, что вычитаемое нужно взять в скобки, а затем – стандартно раскрыть эти скобки со сменой знака:
$z_1 - z_2 = -2 + i - (\sqrt{3} + 5i) = -2 + i - \sqrt{3} - 5i = -2 - \sqrt{3} - 4i$
Результат не должен смущать, у полученного числа две, а не три части. Просто действительная часть – составная: $-2 - \sqrt{3}$. Для наглядности ответ можно переписать так: $z_1 - z_2 = (-2 - \sqrt{3}) - 4i$.
Рассчитаем вторую разность:
$z_2 - z_1 = \sqrt{3} + 5i - (-2 + i) = \sqrt{3} + 5i + 2 - i = 2 + \sqrt{3} + 4i$
Здесь действительная часть тоже составная: $2 + \sqrt{3}$

Умножение комплексных чисел
Пример 3

Найти произведение комплексных чисел $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 3 + 6i$
Очевидно, что произведение следует записать так:
$z_1 \cdot z_2 = (1 - i)(3 + 6i)$

Необходимо помнить, что $i^2 = -1$.
$z_1 \cdot z_2 = (1 - i)(3 + 6i) = 1 \cdot 3 - i \cdot 3 + 1 \cdot 6i - i \cdot 6i = 3 - 3i + 6i + 6 = 9 + 3i$, где
$-i \cdot 6i = -6i^2 = -6 \cdot (-1) = +6$

Деление комплексных чисел

Пример 4

Даны комплексные числа $z_1 = 13+i$, $z_2 = 7-6i$. Найти частное $\frac{z_1}{z_2}$.

Составим частное: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{13+i}{7-6i}$

Деление чисел осуществляется **методом умножения знаменателя и числителя на сопряженное знаменателю выражение**.

Вспоминаем формулу $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ и смотрим на наш знаменатель: $7-6i$. В знаменателе уже есть $(a-b)$, поэтому сопряженным выражением в данном случае является $(a+b)$, то есть $7+6i$.

Согласно правилу, знаменатель нужно умножить на $7+6i$, и, чтобы ничего не изменилось, домножить числитель на то же самое число $7+6i$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(13+i)(7+6i)}{(7-6i)(7+6i)}$$

Далее в числителе нужно раскрыть скобки (перемножить два числа по правилу, рассмотренному в предыдущем пункте). А в знаменателе воспользоваться формулой $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ (помним, что $i^2 = -1$ и не путаемся в знаках!!!).

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(13+i)(7+6i)}{(7-6i)(7+6i)} = \frac{91+7i+78i+6i^2}{7^2-(6i)^2} = \frac{91+7i+78i-6}{49-(-36)} =$$

$$= \frac{85+85i}{49+36} = \frac{85+85i}{85} = 1+i$$

В ряде случаев перед делением дробь целесообразно упростить, например, рассмотрим частное чисел: $\frac{-7-12i}{-12+7i}$. Перед делением избавляемся от лишних минусов: в числителе и в знаменателе выносим минусы за скобки и сокращаем эти минусы: $\frac{-7-12i}{-12+7i} = \frac{-(7+12i)}{-(12-7i)} = \frac{7+12i}{12-7i}$. правильный ответ: i

Пример 5

Дано комплексное число $z = \frac{1}{\sqrt{3}+i}$. Записать данное число в алгебраической форме (т.е. в форме $a+bi$).

Приём тот же самый – умножаем знаменатель и числитель на сопряженное знаменателю выражение. Снова смотрим на формулу $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$. В знаменателе уже есть $(a+b)$, поэтому знаменатель и числитель нужно домножить на сопряженное выражение $(a-b)$, то есть на $\sqrt{3}-i$:

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{3}-i}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{\sqrt{3}-i}{(\sqrt{3})^2-(i)^2} = \frac{\sqrt{3}-i}{3+1} = \frac{\sqrt{3}-i}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i$$

Задания для самостоятельного решения:

Найти сумму, разность, произведение и частное двух комплексных чисел в алгебраической форме.

1. $z_1 = 2 + 3i,$	$z_2 = 1 + i.$	**19.** $z_1 = 5 + 4i,$	$z_2 = -5 + i.$
2. $z_1 = 3 + 4i,$	$z_2 = 1 - i.$	**20.** $z_1 = 3 + 7i,$	$z_2 = -5 - i.$
3. $z_1 = 1 - 2i,$	$z_2 = -1 + i.$	**21.** $z_1 = 2 - 4i,$	$z_2 = 6 + i.$
4. $z_1 = 2 + 5i,$	$z_2 = -1 - i.$	**22.** $z_1 = 3 + 5i,$	$z_2 = 6 - i.$
5. $z_1 = 3 - 8i,$	$z_2 = 2 + i.$	**23.** $z_1 = 6 + 5i,$	$z_2 = -6 + i.$
6. $z_1 = 3 - 7i,$	$z_2 = 2 - i.$	**24.** $z_1 = 7 + 2i,$	$z_2 = -6 - i.$
7. $z_1 = 2 + 6i,$	$z_2 = -2 + i.$	**25.** $z_1 = 8 + 3i,$	$z_2 = 7 + i.$
8. $z_1 = 4 + 2i,$	$z_2 = -2 - i.$	**26.** $z_1 = 9 - 2i,$	$z_2 = 7 - i.$
9. $z_1 = 5 + 3i,$	$z_2 = 3 + i.$	**27.** $z_1 = 5 + 6i,$	$z_2 = -7 + i.$
10. $z_1 = 6 - 2i,$	$z_2 = 3 - i.$	**28.** $z_1 = -3 + 2i,$	$z_2 = -7 - i.$
11. $z_1 = 7 + 9i,$	$z_2 = -3 + i.$	**29.** $z_1 = 6 + 2i,$	$z_2 = 8 + i.$
12. $z_1 = 3 - 7i,$	$z_2 = -3 - i.$	**30.** $z_1 = -6 + 7i,$	$z_2 = 8 - i.$
13. $z_1 = 4 + 3i,$	$z_2 = 4 + i.$	**31.** $z_1 = -2 + 5i,$	$z_2 = -8 - i.$
14. $z_1 = 8 + 3i,$	$z_2 = 4 - i.$	**32.** $z_1 = 8 + 3i,$	$z_2 = 9 + i.$
15. $z_1 = 8 - 2i,$	$z_2 = -4 + i.$	**33.** $z_1 = -7 - 2i,$	$z_2 = 9 - i.$
16. $z_1 = 9 + 2i,$	$z_2 = -4 - i.$	**34.** $z_1 = 5 + 8i,$	$z_2 = -9 + i.$
17. $z_1 = 7 + 3i,$	$z_2 = 5 + i.$	**35.** $z_1 = -2 + 4i,$	$z_2 = -9 - i.$
18. $z_1 = 6 - 4i,$	$z_2 = 5 - i.$	**36.** $z_1 = -5 - 4i,$	$z_2 = 10 + i.$

Решить уравнения:

1. $x^2 - 4x + 13 = 0$
2. $x^2 + 3x + 4 = 0$
3. $2.5x^2 + x + 1 = 0$
4. $4x^2 - 20x + 26 = 0$

Практическая работа № 10,11:
Решение линейных, квадратных, дробно-линейных уравнении

Цель: повторить, обобщить и систематизировать знания обучающихся по решению линейных и квадратных уравнений:

Обучающийся должен знать:
- понятия «уравнение», «корень уравнения», - виды уравнений,
- основные методы решения учащийся должен уметь:
- различать виды уравнений,
- решать уравнения, приводимых к линейным и квадратным, в результате несложных преобразований,
- решать целые уравнения на основе условия равенства нулю произведения,
- выбирать и верно записывать ответ; обучающийся должен владеть: анализом и самоконтролем, способами решения уравнения, методами исследования ситуаций, в которых результат принимает те или иные формы.

1) Линейное уравнение - уравнение вида y = kx + b, где x- переменная, k и b - некоторые числа.
2) Квадратное уравнение - уравнение вида y = ax^2 + bx + c, где x - переменная, a,b,c - некоторые числа.

Алгоритмы решения уравнений (обязательный уровень)

1) $3(2-3x)-4=5-11x$ Решение $6-9x-4=5-11x$; $-9x+11x=5-6+4$; $2x=3$; $x=3:2$; $x=1{,}5$. Ответ: $1{,}5$.	8) $(1-x)^2+2x=2$ Решение $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, $x^2=d$; $x_{1,2}=\pm\sqrt{d}$. $1-2x+x^2+2x=2$; $x^2=1$; $x_{1,2}=\pm1$. Ответ: ±1.
2) $3x^2+x-2=0$ Решение $D=b^2-4ac$. $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$. $a=3;b=1;c=-2$; $D=1-4\cdot3(-2)=25$. $x_1=\dfrac{-1+\sqrt{25}}{2\cdot3}=\dfrac{-1+5}{6}=\dfrac{1}{3}$; $x_2=\dfrac{-1-5}{6}=-1$. Ответ: $-1;\dfrac{1}{3}$.	9) $\dfrac{2}{x-3}=-x$ Решение. О.Д.З. уравнения: $x-3\neq0; x\neq3$. Умножим обе части уравнения на $(x-3)$, получим: $\dfrac{2}{x-3}\cdot(x-3)=-x(x-3)\Rightarrow 2=-x^2+3x$; $x^2-3x+2=0$; $x_1=1;x_2=2$. Ответ: $1;2$.
3) $1-x-2x^2=0$ Решение $2x^2+x-1=0$. $a=2;b=1;c=-1$; $D=1-4\cdot2(-1)=9$; $x_1=\dfrac{-1+3}{4}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$; $x_2=\dfrac{-1-3}{4}=-1$. Ответ: $-1;\dfrac{1}{2}$.	10) $\dfrac{x-3}{2}+\dfrac{x-1}{3}=5$ Решение Умножим обе части уравнения на НОК $(2;3)=6$. $6\cdot\dfrac{x-3}{2}+6\cdot\dfrac{x-1}{3}=6\cdot5$; $3(x-3)+2(x-1)=30$; $3x-9+2x-2=30$; $5x=30+9+2$; $5x=41$; $x=8{,}2$. Ответ: $8{,}2$.
4) $2x^2-8=0$ Решение $2x^2=8$; $x^2=4$; $x_{1,2}=\pm\sqrt{4}=\pm2$. Ответ: ±2.	11) $(5x-4)\cdot(x+8)=0$ Решение $5x-4=0$ или $x+8=0$ $5x=4$; $x=-8$. $x=4:5=0{,}8$; Ответ: $-8;0{,}8$.

Способы решение квадратных уравнений различных видов.

1. Решите неполное квадратное уравнение:

1) $3x^2-27=0$	6) $x^2-6x=0$	11) $4x^2-9=0$	16) $x^2-19=0$
2) $x^2-16=0$	7) $x^2+2x=0$	12) $-x^2+3=0$	17) $x^2-19x=0$
3) $2x^2=8$	8) $x^2-8x=0$	13) $6y^2+24=0$	18) $x^2+19=0$
4) $4x^2+1=0$	9) $x^2-7x=0$	14) $6x^2-30=0$	19) $x^2+19x=0$
5) $x^2+1=0$	10) $x^2+3x=0$	15) $3x^2-6x=0$	20) $3m^2-1=0$

2. Решите квадратное уравнение, используя теорему Виета:

$$x_1+x_2=-b; x_1x_2=c.$$

1) $x^2-9x+20=0$	6) $x^2-15x+56=0$	11) $x^2-5x+6=0$	16) $x^2+7x+10=0$
2) $x^2+11x-12=0$	7) $x^2-8x+15=0$	12) $x^2+5x+6=0$	17) $x^2+4x+3=0$
3) $x^2-x-12=0$	8) $x^2+16x+63=0$	13) $x^2-8x+12=0$	18) $x^2-4x+3=0$
4) $x^2-7x+12=0$	9) $x^2+2x-48=0$	14) $x^2-9x+18=0$	19) $x^2-9x+18=0$
5) $x^2+x-56=0$	10) $x^2-19x+88=0$	15) $x^2-7x+10=0$	20) $x^2-6x+8=0$

3. Решите квадратное уравнение, используя формулу

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2:$$

1) $x^2-4x+4=0$	6) $x^2+12x+36=0$	11) $x^2+2x+1=0$	16) $n^2-2n+1=0$
2) $x^2-6x+9=0$	7) $x^2+10x+25=0$	12) $x^2-2x+1=0$	17) $m^2-4m+4=0$
3) $x^2+8x+16=0$	8) $x^2-14x+49=0$	13) $x^2+6x+9=0$	18) $n^2+8n+16=0$
4) $x^2-10x+25=0$	9) $x^2+16x+64=0$	14) $x^2-18x+81=0$	19) $y^2-14y+49=0$
5) $x^2-12x+36=0$	10) $x^2-16x+64=0$	15) $y^2-12y+36=0$	20) $y^2-10y+25=0$

4. Найдите дискриминант квадратного уравнения по формуле

$$b^2-4ac:$$

1) $x^2-3x+4=0$	6) $x^2-2x+1=0$	11) $x^2-5x-7=0$	16) $x^2-9x+1=0$
2) $x^2-5x+6=0$	7) $x^2-6x+9=0$	12) $x^2+6x+10=0$	17) $x^2-x+9=0$
3) $x^2-8x+12=0$	8) $x^2+2x+8=0$	13) $x^2-4x+7=0$	18) $x^2-6x-4=0$
4) $x^2-6x+8=0$	9) $x^2-2x-8=0$	14) $x^2-10x+25=0$	19) $x^2-14x+49=0$
5) $x^2+6x+8=0$	10) $x^2-3x-40=0$	15) $x^2-8x+2=0$	20) $x^2-4x+4=0$

5. Сколько корней имеет квадратное уравнение, если b^2-4ac равно:

1) -36	6) 40	11) 225	16) 121
2) 49	7) 54	12) 196	17) 169
3) 0	8) -81	13) -16	18) 225
4) -49	9) 100	14) 36	19) -256
5) -64	10) -25	15) 69	20) -9

6. Решите квадратное уравнение:

1) $3x^2-7x+4=0$	6) $2x^2-5x-3=0$	11) $x^2+6x-19=0$	16) $y^2-5y+6=0$
2) $5x^2-8x+3=0$	7) $3x^2-8x+5=0$	12) $x^2-22x-23=0$	17) $x^2+2x+2=0$
3) $2y^2-9y+10=0$	8) $5x^2+9x+4=0$	13) $x^2-7x+12=0$	18) $2x^2+8x+32=0$
4) $5y^2-6y+1=0$	9) $36y^2-12y+1=0$	14) $x^2-10x+25=0$	19) $x^2-12x=36=0$
5) $3x^2-14x+16=0$	10) $y^2-10y-24=0$	15) $16x^2-8x+1=0$	20) $x^2-9x+8=0$

Задания к практической работе

К. № 1 ОУ Решите уравнения: 1) $\frac{x}{3}+\frac{x}{12}=\frac{15}{4}$ 2) $2-3(x+2)=5-2x$ 3) $10x^2+5x=0$ 4) $4-36x^2=0$ 5) $2x^2+3x-5=0$ 6) $12-x^2=11$ 7) $(10x-4)(3x+2)=0$ 8) $\frac{2}{x-3}=\frac{7}{x+1}$	**К. № 2 ОУ** Решите уравнения: 1) $\frac{x}{4}+\frac{x}{8}=\frac{3}{2}$ 2) $3-5(x+1)=6-4x$ 3) $x^2-10x=0$ 4) $2x^2-10=0$ 5) $2x^2+3x-2=0$ 6) $x^2+3=3-x$ 7) $(3x+1)(6-4x)=0$ 8) $\frac{6}{x+5}=\frac{4}{3-x}$
К. № 3 ОУ Решите уравнения: 1) $\frac{x}{3}+\frac{x-1}{2}=4$ 2) $0{,}2-2(x+1)=0{,}4x$ 3) $x^2+6x=0$ 4) $2x^2-8=0$ 5) $3x^2+2x-5=0$ 6) $3x^2+9=12x-x^2$ 7) $(5x-4)(x+8)=0$ 8) $\frac{5}{1-x}=\frac{4}{6-x}$	**К. № 4 ОУ** Решите уравнения: 1) $\frac{x-1}{2}=\frac{4+2x}{3}$ 2) $0{,}4x=0{,}4-2(x+2)$ 3) $4x^2+20x=0$ 4) $3x^2-75=0$ 5) $9x^2-6x+1=0$ 6) $5x^2+1=6x-4x^2$ 7) $(6x+3)(9-x)=0$ 8) $\frac{4}{x-6}=\frac{1}{x+3}$

Повышенный уровень

Задания. Решите уравнения:	
1.Биквадратные уравнения	
1) $x^4+2x^2-8=0$;	2) $x^4-7x^2+12=0$;
3) $2x^4-19x^2+9=0$:	4) $3x^4-13x^2+4=0$.
2.Метод разложения на множители	
1) $y^3+y^2-y-1=0$;	2) $x^3+2x^2-4x-8=0$;
3) $x^3-2x^2-3x+6=0$;	4) $x^3-3x^2-4x+12=0$
3.Метод замены переменной	
1) $(x^2+4x)(x^2+4x-17)+60=0$;	2) $(x^2-5x)(x^2-5x+10)+24=0$.
3) $(x^2-3x)^2-2(x^2-3x)=8$;	4) $(x^2+x)^2-11(x^2+x)=12$
4. Дробные рациональные уравнения	
1) $\frac{x}{x-2}-\frac{7}{x+2}=\frac{8}{x^2-4}$;	2) $\frac{x}{x+5}+\frac{x+5}{x-5}=\frac{50}{x^2-25}$;
3) $\frac{x}{x+2}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{8}{x^2-4}$;	4) $\frac{16}{x^2-16}+\frac{x}{x+4}=\frac{2}{x-4}$.

Практическая работа №12: Решение уравнений с модулем

Цель работы:

1. Рассмотреть различные методы решения уравнений с модулем.
2. Научиться решать уравнения, содержащие знак абсолютной величины, различными методами

Теоретический материал:

Определение1: Модулем (абсолютной величиной) действительного числа *а* называется само это число, если *а* ≥0, или противоположное число – *а*, если *а<0;* модуль нуля равен нулю.

При решении уравнений с модулем, удобно использовать свойства модуля.

$$1)\ |a\cdot b|=|a|\cdot|b|$$

$$2)\ |a|=|b| \Leftrightarrow a^2=b^2$$

$$3)\ |a|=|b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=-b \end{array}\right.$$

$$4)\ |a|=b \Leftrightarrow \begin{cases} b\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=-b \end{array}\right. \end{cases}$$

$$5)\ |a+b|=|a|+|b| \Leftrightarrow ab\geq 0$$

$$6)\ |a-b|=|a|+|b| \Leftrightarrow ab\leq 0$$

$$7)\ |a|+|b|=a+b \Leftrightarrow \begin{cases} a\geq 0 \\ b\geq 0 \end{cases}$$

$$8)\ |a|+|b|=a-b \Leftrightarrow \begin{cases} a\geq 0 \\ b\leq 0 \end{cases}$$

$$9)\ |a|-|b|=a+b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a\geq 0 \\ b\leq 0 \end{cases} \\ a+b=0 \end{array}\right.$$

$$10)\ |a|-|b|=a-b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a\geq 0 \\ b\geq 0 \end{cases} \\ a-b=0 \end{array}\right.$$

Рассмотрим доказательства 5,6, 7 свойств.

Утверждение 5. Равенство $|а+в|=|а|+|в|$ является верным, если *ав* ≥ 0.

Доказательство. Действительно, после возведения обеих частей данного равенства в квадрат, получим, $|а+в|^2=|а|^2+2|ав|+|в|^2$,

$$а^2+2ав+в^2=а^2+2|ав|+в^2, \quad \text{откуда } |ав|=ав$$

А последнее равенство будет верным при *ав*≥0.

Утверждение 6. Равенство $|а-в|=|а|+|в|$ является верным при *ав*≤0.

Доказательство. Для доказательства достаточно в равенстве $|а+в|=|а|+|в|$ заменить *в* на -*в,* тогда *а*·(-*в*) ≥0, откуда *ав*≤0.

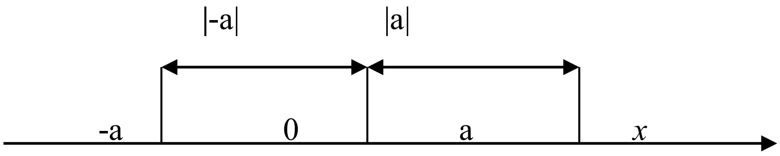
Утверждение 7.Равенство $|а|+|в|=а+в$ выполняется при *а* ≥0 и *в* ≥0.

Доказательство. Рассмотрев четыре случая *а* ≥0 и *в* ≥0; *а* ≥0 и *в*<0; *а*<0 и *в* ≥0; *а*<0 и *в*<0, непосредственно убедимся в том , что равенство выполняется только при *а* ≥0 и *в* ≥0.

(*а*-*в*) *в* ≥0.

Геометрическая интерпретация

|a| - это расстояние на координатной прямой от точки с координатой *a*, до начала координат.



Геометрическое толкование смысла |a| наглядно подтверждает, что |-a|=|a|

Если $a \neq 0$, то на координатной прямой существует две точки a и –a, равноудаленные от нуля, модули которых равны.

Если a=0, то на координатной прямой |a| изображается точкой 0.

Определение 2: Уравнение с модулем – это уравнение, содержащее переменную под знаком абсолютной величины (под знаком модуля). Например: |x +3|=1

Определение 3: Решить уравнение-это значит найти все его корни, или доказать, что корней нет.

Методы решения

Из определения и свойств модуля вытекают основные методы решения уравнений с модулем:

1) «Раскрытие» модуля (т.е. использование определения);
2) Использование геометрического смыла модуля (свойство 2);
3) Графический метод решения;
4) Использование равносильных преобразований (свойства 4,6);
5) Замена переменной (при этом используется свойство 5).
6) Метод интервалов.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ | f(x)| =*a*

Рассмотрим уравнение | f(x)| =*a, a R*

Уравнение данного вида может быть решено по определению модуля:
Если *a<0,* то уравнение корней не имеет.
Если *a*=0, то уравнение равносильно f(x)=0.

Если *a>0,* то уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} f(x)=a \\ f(x)=-a \end{array}\right.$.

Пример. ***Решить уравнение |3x+2|=4.***

Р е ш е н и е.

|3x+2|=4, тогда $\left|\begin{array}{l} 3x+2=4, \\ 3x+2=-4; \end{array}\right.$

$\left|\begin{array}{l} x=-2, \\ x=2/3 \end{array}\right.$

О т в е т: -2;2/3.

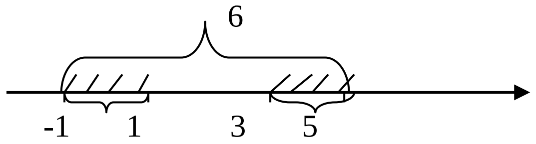
РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ с ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО СВОЙСТВА МОДУЛЯ.

Пример 1. ***Решить уравнение /x-1/+/x-3/=6.***

Решение.

Решить данное уравнение значит найти все такие точки на числовой оси Ох, для каждой из которых сумма расстояний от нее до точек с координатами 1 и 3 равна 6.

Ни одна точка из отрезка $[1;3]$ не удовлетворяет этому условию, т.к. сумма указанных расстояний равна 2. Вне этого отрезка есть две точки это 5 и -1.

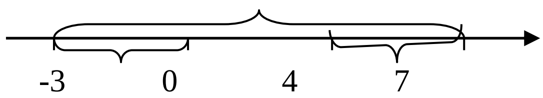


Ответ: -1;5

Пример 2. ***Решить уравнение*** $|x^2+x-5|+|x^2+x-9|=10$.

Решение.

Обозначим $x^2+x-5=a$, тогда $/a/+/a-4/=10$. Найдем точки на оси Ох такие, что для каждой из них сумма расстояний до точек с координатами 0 и 4 равна 10. Этому условию удовлетворяют -4 и 7.



Значит $x^2+x-5=4$ $\qquad$ $x^2+x-5=7$

$x^2+x-2=0$ $\qquad$ $x^2+x-12=0$

$x_1=1,\ x_2=-2$ $\qquad$ $x_1=-4,\quad x_2=3$ $\qquad$ Ответ:-4;-2; 1; 3.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ $|f(x)| = |g(x)|$.

1. Так как $|a|=|в|$, если $a= в$, то уравнение вида $|f(x)| = |g(x)|$ равносильно совокупности
$$\left[\begin{array}{l} f(x)=g(x). \\ f(x)=-g(x). \end{array}\right.$$
2. $|f(x)| = |g(x)|$ равносильно $f^2(x) - g^2(x) = 0 \Leftrightarrow (f(x) + g(x))\,(f(x) - g(x)) = 0.$

Пример1.

Решить уравнение $|x-2| = |3-x|$.

Р е ш е н и е.

Данное уравнение равносильно двум уравнениям:

$x-2 = 3-x$ (1) $\qquad$ и $\qquad$ $x-2 = -3+x$ (2)

$2x = 5$ $\quad\quad\quad\quad$ $-2 = -3$ – неверно

$x = 2{,}5$ $\quad\quad\quad\quad$ уравнение не имеет решений.

О т в е т: 2,5.

Пример 2.

Решить уравнение $|x^2+3x-20| = |x^2-3x+2|$.

Р е ш е н и е.

Так как обе части уравнения неотрицательны, то <u>возведение в квадрат является равносильным преобразованием:</u>

$(x^2+3x-20)^2 = (x^2-3x+2)^2$

$(x^2+3x-20)^2 - (x^2-3x+2)^2 = 0,$

$(x^2+3x-20-x^2+3x-2)(x^2+3x-20+x^2-3x+2)=0,$

$(6x-22)(2x^2-18)=0,$

$6x-22=0$ или $2x^2-18=0;$

$x=22/6,$ $\quad\quad$ $x=3,\ x=-3.$

$x=11/3$

Ответ: -3; 3; 11/3.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВИДА $|f(x)| = g(x)$.

Отличие данных уравнений от $|$ **f(x)** $|$ =***a*** в том, что в правой части тоже переменная. А она может быть как положительной, так и отрицательной. Поэтому в ее неотрицательности нужно специально убедиться, ведь модуль не может равняться отрицательному числу (свойство **№1**)

1 способ

Решение уравнения $|f(x)| = g(x)$ сводится к совокупности решения уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$ и проверке справедливости неравенства $g(x)>0$ для найденных значений неизвестной.

2 способ (по определению модуля)

Так как $|f(x)| = g(x)$, если $f(x) = 0$; $|f(x)| = -f(x)$, если $f(x)<0$, то уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) = -g(x), \\ g(x) \ge 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

|.

Пример.

Решить уравнение $|3x - 10| = x - 2$.

Р е ш е н и е.

Данное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x-10=x-2,\\ x-2\ge 0;\end{cases}\\ \begin{cases}3x-10=-x+2,\\ x-2\ge 0;\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x=8,\\ x\ge 2;\end{cases}\\ \begin{cases}4x=12,\\ x\ge 2;\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=4,\\ x\ge 2;\end{cases}\\ \begin{cases}x=3,\\ x\ge 2;\end{cases}\end{array}\right.$$

О т в е т: 3; 4.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВИДА $|f_1(x)|+|f_2(x)|+\ldots+|f_n(x)|=g(x)$

Решение уравнений данного вида основано на определении модуля. Для каждой функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$ необходимо найти область определения, ее нули и точки разрыва, разбивающие общую область определения на промежутки, в каждом из которых функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$ сохраняют свой знак. Далее используя определение модуля, для каждой из найденных областей получим уравнение, которое необходимо решить на данном промежутке. Данный метод получил название «**метод интервалов**»

Пример.

Решить уравнение $|x-2|-3|x+4|=1$.

Р е ш е н и е.

Найдем точки, в которых подмодульные выражения равны нулю

x-2=0, x+4=0,

x=2; x=-4.

Разобьем числовую прямую на промежутки x<-4, -4≤x< 2, x≥2.

Решение уравнения сводится к решению трех систем:

1. $\begin{cases}x<-4,\\ -2x+4+3x+12=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x<-4,\\ x=-15.\end{cases}$ -15 корень исходного уравнения.

2. $\begin{cases}-4\le x<2,\\ -2x+4-3x-12=1\end{cases}$; $\begin{cases}-4\le x<2,\\ x=-1{,}8\end{cases}$ -1,8 корень исходного уравнения.

3. $\begin{cases}x>2,\\ 2x+4-3x-12=1\end{cases}$; $\begin{cases}x>2,\\ x=-17.\end{cases}$ Система не имеет решений.

О т в е т: -15, -1,8.

ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ЗНАК МОДУЛЯ.

Графический способ решения уравнений является приближенным, так ка точность зависит от выбранного единичнрого отрезка, толщины карандаша, углов под которыми пересекаются линии и т.д. Но этот метод позволяет оценивать сколько решений имеет то или иное уравнение.

Пример . ***Решить графически уравнение $|x - 2| + |x - 3| + |2x - 8| = 9$***

Решение. Построим в одной системе координат графики функций

y=|x - 2| + |x - 3| + |2x - 8| и y=9.

Для построения графика необходимо рассмотреть данную функцию на каждом промежутке (-∞; 2); [2;3); [3;4); [4; +∞).

При $(-\infty; 2)$ получим функцию $y=-4x+13$.

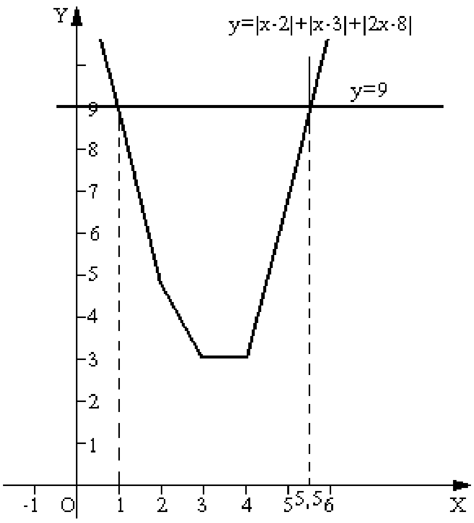
При $x \in [2;3)$ получим функцию $y=-2x+9$.

При $x \in [3;4)$ получим функцию $y=3$.

При $x \in [4; +\infty)$ получим функцию $y=4x-13$.

Каждая из этих функций - линейная, которую можно построить по двум точкам на указанном промежутке.

`Графиком функции $y=9$ является прямая параллельная оси Ох и проходящая через точку (0;9) на оси Оу.



Получили две точки пресечения, их абсциссы равны $x_1=1$, $x_2=5{,}5$.

Ответ: 1; 5,5.

МЕТОД ВВЕДЕНИЯ НОВОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Свойство 5 $(/a/^2=a)$ целесообразно использовать при решении уравнений вида $af^2(x)+b/f(x)/+c=0$.

Пример 1. ***Решить уравнение $x^2-5|x|+6=0$.***

Решение.

$x^2-5|x|+6=0$. Так как $/a/^2=a$ (свойство 5), то

$|x|^2-5|x|+6=0$

Обозначим $y=|x|$, тогда

$y^2-5y+6=0$,

Д= $в^2-4ac$

Д= $(-5)^2-4*1*6=25-24=1$.

Д>1, значит уравнение имеет 2 решения:

$$y_{1,2} = \frac{-в \pm \sqrt{Д}}{2a}$$

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$y_1 = \frac{5+1}{2}$ или $y_2 = \frac{5-1}{2}$

$y_1=3$ $\qquad\qquad\qquad$ $y_2=2$

Выполним обратную замену |x|=y,

|x|=3, $\qquad$ |x| =2

x=3; x=-3 $\qquad$ x=2; x=-2

Ответ: 3; -3; 2; -2.

Пример 2. ***Решить уравнение x^2+|x-2|=2(2x-1).***

Решение.

x^2+/x-2/=2(2x-1),

x^2-2(2x-1)+/x-2/=0,

x^2-4x+2 +/x-2/=0,

$(x-2)^2$+/x-2/ -2=0,

Так как $/a/^2$=a (свойство 5) перепишем уравнение в виде

$/x-2/^2$+/x-2/=0,

Обозначим t=/x-2/, тогда уравнение примет вид

t^2+t-2=0.

t=1, t=-2

но так как $t \geq 0$, то t=1, откуда

/x-2/=1,

x-2=1, $\qquad$ -(x-2)=1,

x=3; $\qquad$ x=1.

Ответ: 1; 3.

МЕТОД РАВНОСИЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Пример 1. Решить уравнение /2x-3/+/3x-4/=/5x-7/.

Решение. Из свойства уравнение можно заменить неравенством

$(2x-3)(3x-4) \geq 0$.

$(2x-3)(3x-4) = 0$.

Введем функцию y=(2x-3)(3x-4). Квадратичная функция, график парабола, ветви направлены вверх.

Найдем нули функции

$6x^2$-17x+12=0,

Д=1, Д>0, уравнение имеет 2 корня.

X_1=3/2,

X_2 = 4/3

$y \geq 0$ при x $\in$ (- ∞ ; 4/3]   [3/2 ; ∞)

Ответ: (- ∞; 4/3]   [3/2 ; ∞)

Метод равносильных преобразований мы использовали и при решении уравнений $|f(x)| = |g(x)|$.

Практическая часть:
Решить уравнения

	1 вариант		2 вариант
1	Решить уравнение методом последовательного раскрытия модуля. |x-5|=4	1	Решить уравнение методом последовательного раскрытия модуля. |x-7|=6
2	||2x-1|-4|=6	2	||4x-1|-8|=10
3	Решить методом интервалов |x+3|+|x-1|=6	3	Решить методом интервалов |x+2|+|x-1|=5
4	Решить графическим методом |2-x|=2x+1.	4	Решить графическим методом |1-x|=x+1.
5	Решить графическим методом |x+1|=2	5	Решить графическим методом |x+2|=4

Практическая работа №13: Решение неравенств с модулем

Решение линейных уравнений и неравенств с модулем

Цель: Знать методы решения линейных уравнений и неравенств с модулем. Применять их при решении упражнений.

1.Краткие теоретические сведения

	Ответ
1)Аналитическое определение модуля	Модулем числа а называется само число а, если а >0, число (-а), если а<0, и нуль, если а=0, т.е. $\|a\| = \begin{cases} a, если\ a > 0, \\ 0, если\ a = 0, \\ -a, если\ a < 0. \end{cases}$

	$\lvert a-b\rvert=\begin{cases}a-b, если\ a>b\\ 0, если\ a=b\\ b-a, если\ a<b\end{cases}$
2) Геометрическая интерпретация модуля	а) Модулем числа а называется расстояние от начала отсчёта до точки с координатой а. б) Модуль разности чисел а и b есть расстояние между точками а и b числовой оси, т. е. $\lvert a-b\rvert=\rho(a,b)$
3) Перечислите свойства модуля	1) $\lvert a\rvert\geq 0$, 2) $\lvert a\rvert\geq a$, 3) $\lvert ab\rvert=\lvert a\rvert\lvert b\rvert$, 4) $\left\lvert\frac{a}{b}\right\rvert=\frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$, если $b\neq 0$, 5) $\sqrt{a^2}=\lvert a\rvert$, 6) $\lvert a^n\rvert=\lvert a\rvert^n$, $n\in Z$, $a^2+n^2\neq 0$.
4) Приёмы решений уравнений и неравенств с модулем.	Разбор случаев с применением аналитического определения модуля, применение геометрической интерпретации модуля, метод интервалов для непрерывных функций, функционально-графический метод, метод замены множителей, использование частных схем.

Классификация уравнений и неравенств с модулем

Уравнения	***Неравенства***
$\lvert f(x)\rvert=a,$ $a\geq 0\,, a-const$ $f^2=a^2\,,\ \left[\begin{array}{l}f=a\\ f=-a\end{array}\right.$	$\lvert f(x)\rvert\leq a,$ $f^2\leq a^2\,, -a\leq f(x)\leq a, \begin{cases}f\leq a\\ f\geq -a\end{cases}$ $\lvert f(x)\rvert\geq a, f^2\geq a^2\,, \left[\begin{array}{l}f\geq a\\ f\leq -a\,,\end{array}\right. a$ $\geq 0, \mathrm{a}-\mathrm{const}$

$\lvert f(x)\rvert = g(x),$ $f^2 = g^2$, $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f = g \\ f = -g \end{array}\right. \\ g \geq 0 \end{cases}$	$\lvert f(x)\rvert \leq g(x),\ f^2 \leq g^2,$ $-g \leq f \leq g, \begin{cases} f \leq g \\ f \geq -g \end{cases}$ $\lvert f(x)\rvert \geq g(x),$ $f^2 \geq g^2,\quad \left[\begin{array}{l} f \geq g \\ f \leq -g \end{array}\right.$
$\dfrac{\lvert f(x)\rvert + g}{v} = p$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f \geq 0 \\ \dfrac{f+g}{v} = p \end{cases} \\ \begin{cases} f < 0 \\ \dfrac{-f+g}{v} = p \end{cases} \end{array}\right.$	$\frac{\lvert f(x)\rvert + g}{v} \geq p$ $\quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f \geq 0 \\ \frac{f+g}{v} \geq p \end{cases} \\ \begin{cases} f < 0 \\ \frac{-f+g}{v} \geq p \end{cases} \end{array}\right.$ Совокупность двух систем $f \geq 0$, $f < 0$
Два модуля $\lvert f(x)\rvert = \lvert g(x)\rvert,$ $f^2 = g^2$, $\left[\begin{array}{l} f = g \\ f = -g \end{array}\right.$	Два модуля $\lvert f(x)\rvert \geq \lvert g(x)\rvert,$ $f^2 \geq g^2,\ (f-g)(f+g) \geq 0$
Несколько модулей. Метод промежутков. Находим корни подмодульных выражений. Определим знак каждого подмодульного выражения. Составим совокупность нескольких систем.	**Замена переменной**. Обозначим $\lvert f(x)\rvert = t, t \geq 0.$ Полезны формулы $a \leq \lvert f(x)\rvert \leq b,\ \left[\begin{array}{l} a \leq f \leq b \\ -b \leq f \leq -a \end{array}\right.$ $\lvert f(x)\rvert \geq a,\ \left[\begin{array}{l} f \geq a \\ f \leq -a \end{array}\right.,\ a \geq 0, \mathrm{a} - \mathrm{const}$

2. Примеры выполнения заданий

№5 Решить неравенство $\left|x^2 - 3\right| < -2$

Так как -2<0 a $\left|x^2 - 3\right| \geq 0$ при всех значениях x, то исходное неравенство не имеет решений

Ответ: нет решений

№6 Решить неравенство:. $|5x-3| \leq 4$, так как 4>0 то по геометрическому представлению модуля, данное неравенство заменяем двойным

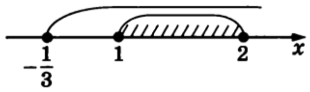
Решение. $-4 \leq 5x - 3 \leq 4, \quad -1 \leq 5x \leq 4, \quad -0{,}2 \leq x \leq 1{,}4$

Ответ $[-0{,}2; 1{,}4]$

№7 Решить неравенство $\left|1 + 3x\right| \geq x^2 + 3$

Решение. Заметим, что $x^2+3>0$ при любом х.

1)При $1+3x \ge 0$ имеем $1+3x \ge x^2+3$. Решим систему неравенств $\begin{cases} 1+3x \ge 0 \\ 1+3x \ge x^2+3 \end{cases}$

$\begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{3} \\ x^2-3x+2 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{3} \\ 1 \le x \le 2 \end{cases}$ 

Ответ: $1 \le x \le 2$

2)При $1+3x<0$ имеем $-(1+3x) \ge x^2+3$ Решим систему неравенств

$\begin{cases} 1+3x<0 \\ -(1+3x) \ge x^2+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-\dfrac{1}{3} \\ x^2+3x+4 \le 0 \end{cases}$ Так как второе неравенство системы не имеет решений, то и вся система не имеет решений.

Ответ: $1 \le x \le 2$

№9 Решить неравенство $|3-x|>|2x+1|$

Решение. Так как обе части неравенства при любом х – неотрицательные числа, воспользуемся свойством возведения обеих частей таких неравенств в натуральную степень ($a>b \ge 0,$ ò î _$a^n > b^n$ï ðè _n $\in$ N). Обе части исходного неравенства возведем в квадрат

$|3-x|^2 > |2x+1|^2$ откуда

$\begin{aligned} &9-6x+x^2>4x^2+4x+1 \\ &3x^2+10x-8<0 \end{aligned}$ найдем корни уравнения $\begin{aligned} &3x^2+10x-8=0 \\ &x_1=-4, x_2=\dfrac{2}{3} \end{aligned}$ Таким образом решением исходного неравенства является промежуток $-4<x<\dfrac{2}{3}$

Задания для выполнения:

Вариант 1	**Вариант 2**
1$\|3x-1\| \le -2$	1. $\|2x-5\| \le -3$
2. $\|3x-1\| < 2$	2. $\|2x-5\| < 3$
3. $\|2-5x\| \le 3$	3. $\|3-2x\| \le 1$
4. $\|6-2x\| \ge x-1$	4. $\|6-3x\| \ge 2x+1$
5. $\|2-3x\| > \|x-2\|$	5. $\|3-4x\| < \|x+3\|$

Контрольные вопросы:

1.Дайте определение модуля

2.Геометрическая интерпретация модуля
3.Перечислите основные свойства модуля
4.Назовите основные методы решения уравнений и неравенств с модулем.

Практическая работа №14,15: Решение уравнений с параметром. Решение неравенств с параметром

Цель: Отработать навыки решения уравнений с параметром

Теоретическая часть:
Решить задачу, например уравнение $f(x,a)=0$ или неравенство $f(x,a)\le 0$ с параметром а – означает «перебрать» все значения параметра и для каждого из них указать ответ.

Решение уравнений с параметром

Пример 1 – решить уравнение с параметром:

$$ax = 1$$

Задача состоит в том, чтобы для каждого значения параметра a решить уравнение относительно x.

Пусть $a = 2$, тогда имеем простейшее линейное уравнение:

$$2x = 1 \leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

В общем случае в данном уравнении возможны два варианта решения – когда можно делить на коэффициент а и когда нельзя, необходимо перебрать все допустимые значения параметра а ($a \in R$)

Рассмотрим два случая. При $a = 0$ мы не имеем права разделить единицу на коэффициент а, поэтому подставляем значение ноль в заданное уравнение и изучаем его. При любых других значениях а имеем право выполнить деление:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=0\\ax=1\end{cases}\\\begin{cases}a\neq 0\\ax=1\end{cases}\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=0\\0*x=1\end{cases}\\\begin{cases}a\neq 0\\x=\frac{1}{a}\end{cases}\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=0\\0=1\end{cases}\\\begin{cases}a\neq 0\\x=\frac{1}{a}\end{cases}\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=0\\x\in\emptyset\end{cases}\\\begin{cases}a\neq 0\\x=\frac{1}{a}\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: при $a = 0$ решений нет, при $a \neq 0\ x = \frac{1}{a}$

Рассмотрим решение простейшего неравенства с параметром.

Пример 2 – решить неравенство с параметром:

$ax > 1$

Если a – конкретное число, мы можем легко решить заданное неравенство, например:

$a = 2{:}\, 2x > 1 \leftrightarrow x > \frac{1}{2}; a = -2{:}\; -2x > 1 \leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$

у нас же есть коэффициент a в общем виде. Рассмотрим три случая:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a = 0\\ ax > 1\end{cases}\\ \begin{cases}a < 0\\ ax > 1\end{cases}\\ \begin{cases}a > 0\\ ax > 1\end{cases}\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a = 0\\ 0 > 1\end{cases}\\ \begin{cases}a < 0\\ x < \frac{1}{a}\end{cases}\\ \begin{cases}a > 0\\ x > \frac{1}{a}\end{cases}\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a = 0\\ x \in \emptyset\end{cases}\\ \begin{cases}a < 0\\ x < \frac{1}{a}\end{cases}\\ \begin{cases}a > 0\\ x > \frac{1}{a}\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: при $a = 0$ решений нет; при $a < 0$ $x < \frac{1}{a}$; при $a > 0$ $x > \frac{1}{a}$

Пример 3 – решить уравнение с параметром:

$$\frac{x-a}{x-5} = 0$$

Дробь равна нулю тогда и только тогда, когда числитель ее равен нулю, а знаменатель не равен нулю:

$$\begin{cases}x - a = 0\\ x - 5 \neq 0\end{cases} \leftrightarrow \begin{cases}x = a\\ x \neq 5\end{cases}$$

Значение параметра может быть любым. Рассмотрим два случая:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a = 5\\ \frac{x-5}{x-5} = 0\end{cases}\\ \begin{cases}a \neq 5\\ \frac{x-a}{x-5} = 0\end{cases}\end{array}\right.$$

При этом получаем в первом случае: x с одной стороны равен пяти, т. к. $x = a$, а с другой стороны не равен пяти, $\frac{0}{0} = 0$ т. к. знаменатель дроби не может быть равен нулю, кроме того получаем выражение , а такого выражения не существует.

Когда $a \neq 5\ x = a$, противоречий не возникает

Ответ: при $a = 5$ решений нет, при $a \neq 5\ x = a$

Пример 4 – решить уравнение с параметром:

$\sqrt{x} = a$

Значение a может быть любым, но квадратный корень – это строго неотрицательное число. Следовательно, рассматриваем два случая:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geq 0 \\ \sqrt{x} = a \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ \sqrt{x} = a \end{cases} \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geq 0 \\ x = a^2 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ x \in \emptyset \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: при $a \geq 0\ x = a^2$; при $a < 0\ x \in \emptyset$

Решим иррациональное неравенство с параметром.

Пример 5 – решить неравенство с параметром:

$\sqrt{x} \geq a$

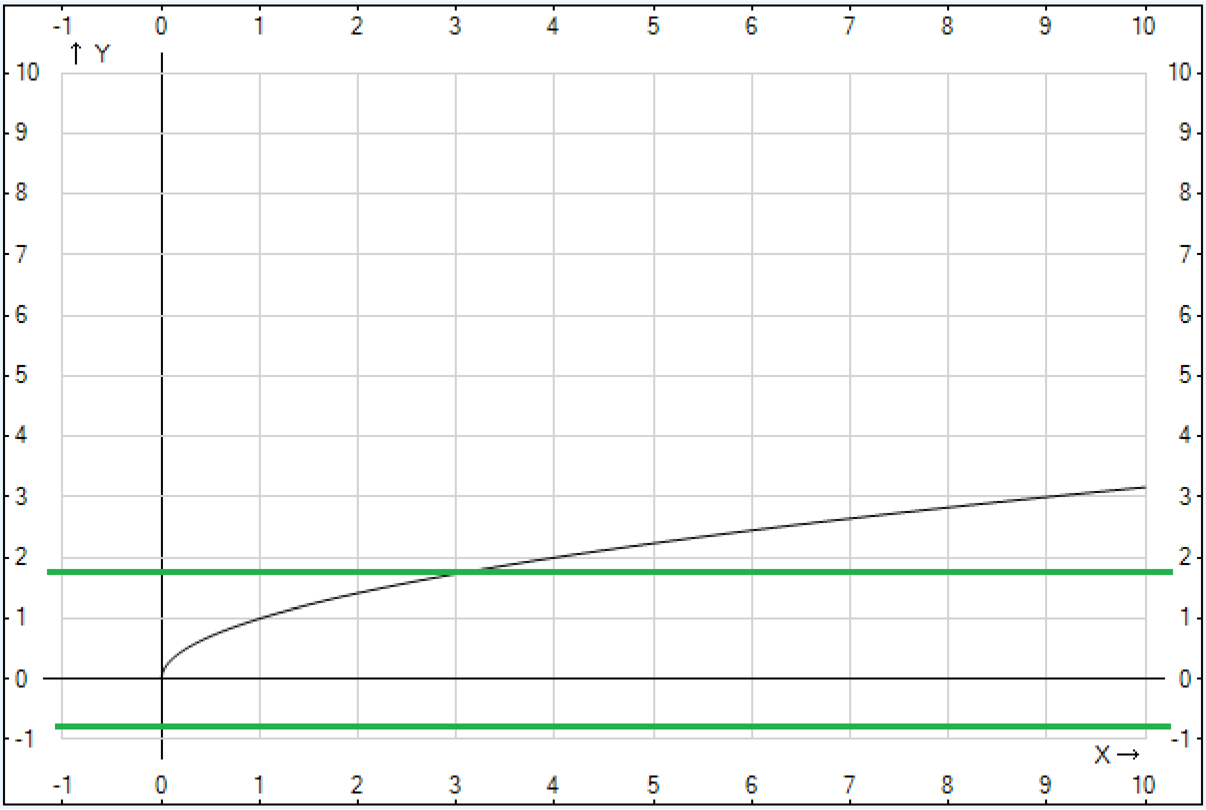
Исследуем данное неравенство.

x стоит под знаком квадратного корня, значит допустимые значения по x - все неотрицательные значения. a может принимать любые значения. рассмотрим три случая. Если a меньше нуля и корень существует, то неравенство выполняется. Если $a = 0$, любой неотрицательный x удовлетворяет неравенству. Если же a больше нуля, имеем право возвести в квадрат:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a < 0 \\ \sqrt{x} \geq a \end{cases} \\ \begin{cases} a = 0 \\ \sqrt{x} \geq a \end{cases} \\ \begin{cases} a > 0 \\ \sqrt{x} \geq a \end{cases} \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a < 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 0 \\ \sqrt{x} \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a > 0 \\ x \geq a^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: при $a \le 0$ $x \ge 0$; при $a > 0$ $x \ge a^2$

Рассмотрим решение данного неравенства графическим методом. Для этого сначала строим график функции, стоящей в левой части: $y = \sqrt{x}$, область определения данной функции $x \ge 0$. Рассекаем полученную кривую семейством прямых $y = a$ и находим точки пересечения.



По рисунку очевидно, что когда $a < 0$, кривая находится над прямой при всех допустимых x, то есть при всех допустимых x неравенство выполняется.

Если a положительно, кривая имеет единственную точку пересечения с прямой и кривая находится выше прямой правее точки пересечения, абсцисса точки пересечения $x = a^2$, поэтому решением неравенства является $x \ge a^2$

Очевидно, что ответ совпадает с ответом при решении аналитическим способом.

Пример 6 – решить уравнение с параметром:

$a\sqrt{x} = 0$

Произведение двух множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю, а второй при этом существует.

Рассматриваем два варианта – либо $a = 0$, но корень при этом должен существовать, либо $x = 0$, в таком случае а – любое число:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a = 0\\ x \geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}x = 0\\ a \in R\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: при $a = 0\ x \in [0; +\infty)$; при $a \neq 0\ x = 0$

Пример 2. При всех a решите неравенство

$$\frac{x-a}{x-a-1} \leqslant 0.$$

Решение. При любом фиксированном значении a это обычное рациональное неравенство. Поэтому к нему можно применить метод интервалов. Напомним, что для этого следует расположить на числовой оси числа a и $a+1$, в которых обращаются в нуль числитель и знаменатель соответственно. Ясно, что при всех a число $a+1$ больше чем a. Поэтому получаем такое расположение точек, как показано на рис. 1.1.

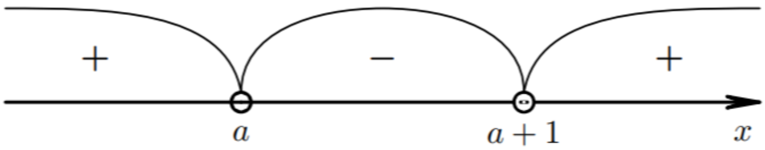


Рис. 1.1

Ответ. $x \in [a; a+1)$ при любом a.

Пример 3. При всех a решите неравенство

$$\frac{x-1}{x-a} > 0.$$

Решение. Как и выше, будем применять метод интервалов. Однако здесь возникает небольшая трудность — мы не знаем, как расположены числа 1 и a. Ведь a может быть как меньше 1, так и больше или равно 1. Но это означает, что нам следует рассмотреть эти три случая.

I. Пусть $a < 1$. Тогда получаем такое расположение точек, как показано на рис. 1.2.

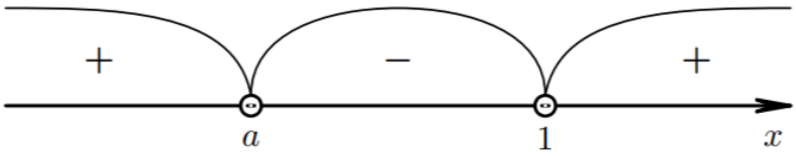


Рис. 1.2

Метод интервалов даёт часть ответа: если $a < 1$, то $x \in (-\infty; a) \cup \cup (1; +\infty)$.

II. Пусть $a = 1$. Тогда получаем неравенство $\frac{x-1}{x-1} > 0$, при $x \neq 1$ равносильное верному неравенству $1 > 0$. Его решения — вся область определения неравенства, т. е. $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

III. Пусть $a > 1$. Тогда точки расположены, как показано на рис. 1.3.

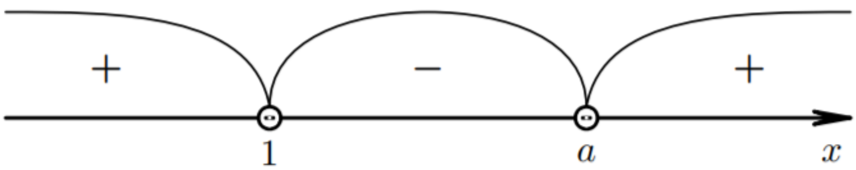


Рис. 1.3

Метод интервалов приводит к частичному ответу: если $a > 1$, то $x \in (-\infty; 1) \cup (a; +\infty)$.

Объединим части ответов и получим окончательный результат.

Ответ. Если $a < 1$, то $x \in (-\infty; a) \cup (1; +\infty)$; если $a = 1$, то $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; если $a > 1$, то $x \in (-\infty; 1) \cup (a; +\infty)$.

Практическая часть

№	Задание		
	Решите уравнения	2в	$2x^2 - 5x + 3a = 0$;
1в	$3x = a + 6$;	1в	$-x^2 - 2ax + 3 = 0$;
2в	$3x + ax + 9 = 0$;	2в	$(a - 1)x^2 - 4x + 5 = 0$;
1в	$4x + 2ax - 6a + 3 = 0$;	1в	$ax^2 - 4x + 5 - a = 0$;
2в	$(a^2 - 4)x = a + 2$.	2в	$(a - 2)ax^2 - 4(a - 2)x + 5(a^2 - 4) = 0$.
1в	$\frac{x + 2 - a}{x + 3} = 0$;		
2в	$\frac{x + 3}{x - \frac{1}{a}} = 0$;		
1в	$\frac{2a}{x + 1} = 0$;		
2в	$\frac{x + 2a}{x - a} = 0$;		
1в	$\frac{ax + 2x + 6}{x + 2a} = 0$.		

1 вариант:
8. Решите неравенство $5x - 2a + 3 \leq 0$ с параметром a.
9. Решите неравенство $3x\ 2 - 2ax + 3 \leq 0$ с параметром a.
2 вариант:
8. Для каждого a решите неравенство $2ax + x - 5 \geq 0$
9. При всех значениях параметра a решите неравенство $(a - 2)x\ 2 + 2x - 5 \geq 0$.

Практическая работа №16: Решение текстовых задач профессионального содержания

№	1 вариант	№	2 вариант
	Тема: Целые, рациональные и дробные числа		
1	1 литр бензина АИ-92 стоит 33 рубля 62 коп. На заправочной станции водитель залил в бак 25 литров. Сколько рублей сдачи он должен получить с 1000 рублей?	1	На автозаправке клиент отдал кассиру 1000 рублей и залил 32 литра бензина по цене 30 руб.50 коп. за литр. Сколько сдачи должен получить клиент? Ответ дайте в рублях
2	По сообщению руководителя Национального центра управления в кризисных ситуациях МЧС, по состоянию на 2 августа в России выявлено примерно 7 000 очагов пожаров на площади 500 000 га.	2	4 августа начался благотворительный сбор вещей для погорельцев. Всего за две недели принесли вещи 7 000 человек, около 2 000 человек участвовало в сортировке и отправке вещей пострадавшим от огня людям.

	Сколько гектаров занимает один очаг пожара? Результат округлить до единиц		Сколько людей приходило в день? Результат округлить до единиц.
3	По данным Управления надзорной деятельности Главного управления МЧС России по Смоленской области за прошедший год на Смоленщине зарегистрировано 1 306 пожаров. Из них 253 произошло в Смоленске. Какой процент пожаров пришелся на Смоленск? Результат округлить до единиц.	3	По данным МЧС России по Смоленской области чаще всего от огненной стихии страдают здания жилого сектора. В жилых домах произошло 539 пожаров. Сараи, бани, гаражи горели 255 раз. Прочие надворные постройки – 64 раза. На тушение садовых домиков и дач в 2012 году пожарные расчеты выезжали 88 раз. Всего в жилой сектор бойцами пожарной охраны было совершено 943 оперативных выезда. С помощью составления пропорций найдите процентное соотношение возгораний жилых домов, сараев, садовых домиков и прочих надворных построек?
4	Построить график статистики пожаров на Смоленщине за 2010 – 2013 года, если известно, что в 2010 году зарегистрировано 1638 возгораний, 2011 – 1580, 2012 – 1075, 2013 – 1222 возгорания.	4	Построить график статистики пожаров в Пермском крае за 2020 – 2023 год, если известно, что в 2020 году зарегистрировано 4193 пожара, 2021 – 4512, 2022 – 2026, 2023 – 3013 возгорания.

Практическая работа №17: Решение систем уравнений

Цель:

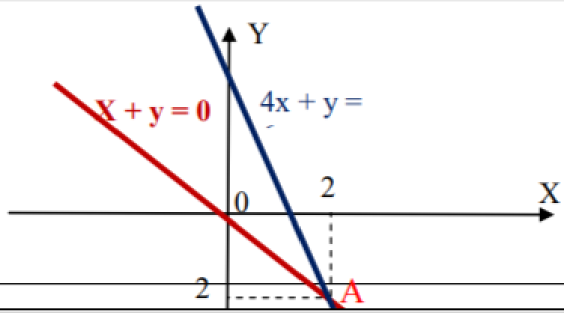
1. Систематизация и обобщение знаний и умений студентов.
2. Познакомиться с формулами Крамера
3. На конкретных примерах научиться решать системы уравнения методом Крамера

Теоретическая часть:

Системы линейных уравнений и их методы их решения. Система уравнений — это условие, состоящее в одновременном выполнении нескольких уравнений относительно нескольких переменных.

Решением системы уравнений называется упорядоченный набор чисел (значений переменных), при подстановке которых вместо переменных каждое из уравнений обращается в верное равенство.

Системы уравнений были известны в древности. В древневавилонских текстах, написанных в III – II тысячелетиях до н.э., содержится немало задач, решаемых с помощью составления систем уравнений.

Графический способ решения систем уравнений		
Решить систему $\begin{cases} x + y = 0, \\ 4x + y = 6 \end{cases}$		
1.	Выполнить равносильные преобразования в системе так чтобы удобно было построить график	$\begin{cases} y = -x \\ y = 6 - 4x \end{cases}$
2.	Построить в одной системе координат график каждого уравнения	
3.	Найти точку пересечения графиков уравнений	Точка A
4.	Найти координаты точки пересечения графиков функций	A(≈ 2; ≈ 2)
5.	Записать ответ	Ответ: (≈ 2; ≈ 2).

Решить систему уравнений графическим способом:

$$\begin{cases} y - x = 0, \\ 3x - y = 4. \end{cases}$$

Решение систем уравнений методом подстановки		
Решить систему $\begin{cases} x + y = 1, \\ 2x - y = 2. \end{cases}$		
1.	Из одного уравнения выразить одну переменную через другую и известные величины.	$\begin{cases} x + y = 1, \\ 2x - y = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x, \\ 2x - y = 2. \end{cases}$
2.	Найденное значение переменной подставить во второе уравнение	$\begin{cases} y = 1 - x, \\ 2x - y = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x, \\ 2x - (1 - x) = 2. \end{cases}$
3.	Решить второе уравнение	$\begin{cases} y = 1 - x, \\ 2x - 1 + x = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x, \\ 3x - 1 = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x, \\ 3x = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x, \\ x = 1. \end{cases}$
4.	Найденное значение переменной подставить в первое уравнение и вычислить значение второй переменной	$\begin{cases} y = 1 - x, \\ x = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 1, \\ x = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0, \\ x = 1. \end{cases}$
5 .	Записать ответ	Ответ: (1; 0).

Упражнение № 3 Решить систему уравнений $\begin{cases} x - 5y = 8, \\ 2x + 4y = 30. \end{cases}$

Решение систем уравнений методом сложения		
Решить систему $\begin{cases} 6x + 5y = 2, \\ 3x - 4y = 46. \end{cases}$		
1.	Уравнять коэффициенты при одной переменной путём почленного умножения на специально подобранные множители	$\begin{cases} 6x + 5y = 2, \\ 3x - 4y = 46. \end{cases}$ (каждый член первого уравнения умножить на 4, а каждый член второго на 5) $\begin{cases} 6 \cdot 4x + 5 \cdot 4y = 2 \cdot 4, \\ 3 \cdot 5x - 4 \cdot 5y = 46 \cdot 5. \end{cases}$ <=> $\begin{cases} 24x + 20y = 8, \\ 15x - 20y = 230. \end{cases}$
2.	Сложить (вычесть) почленно уравнения системы, исключая одну из переменных	$\begin{cases} 39x = 238, \\ 3x - 4y = 46. \end{cases}$
3.	Решив первое уравнение, найдём одно из неизвестных	$\begin{cases} x = 6\frac{4}{39}, \\ 3x - 4y = 46. \end{cases}$
4.	Найденное значение переменной подставляем во второе уравнение	$\begin{cases} x = 6\frac{4}{39}, \\ 3 \cdot 6\frac{4}{39} - 4y = 46. \end{cases}$ <=> $\begin{cases} x = 6\frac{4}{39}, \\ 18\frac{4}{13} - 4y = 46. \end{cases}$
5.	Решив второе уравнение находим второе неизвестное	$\begin{cases} x = 6\frac{4}{39}, \\ 18\frac{4}{13} - 4y = 46. \end{cases}$ <=> $\begin{cases} x = 6\frac{4}{39}, \\ -4y = 46 - 18\frac{4}{13}. \end{cases}$ <=> $\begin{cases} x = 6\frac{4}{39}, \\ y = 46 - 18\frac{4}{13} : (-4). \end{cases}$ $\begin{cases} x = 6\frac{4}{39}, \\ y = 46 - 18\frac{4}{13} : (-4). \end{cases}$ <=> $\begin{cases} x = 6\frac{4}{39}, \\ y = 50\frac{15}{26}. \end{cases}$
6.	Записать ответ.	Ответ: $(6\frac{4}{39};\ 50\frac{15}{26})$.

Решить систему уравнений методом подстановки

№	1 вариант	№	2 вариант
1	$\begin{cases} y - 2x = 1 \\ 6x - y = 7 \end{cases}$	1	$\begin{cases} 2x + y = 12 \\ 7x - 2y = 31 \end{cases}$
2	. $\begin{cases} x + y = 6 \\ 3x - 5y = 2 \end{cases}$	2	$\begin{cases} 4x - y = 11 \\ 6x - 2y = 13 \end{cases}$

Решить систему методом сложения

№	1 вариант	№	2 вариант
1	$\begin{cases} 3x-5y=2, \\ 2x+3y=-5; \end{cases}$	1	$\begin{cases} 5x+2y=6, \\ 3x+7y=-8; \end{cases}$
2	$\begin{cases} 8x-3y=41, \\ 7x+5y=13; \end{cases}$	2	$\begin{cases} 2x+4y=-1, \\ 9x+7y=1. \end{cases}$

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Цель работы

1. Разобрать метод Гаусса для решения системы линейных уравнений.

Содержание и порядок выполнения работы (описание хода работы)

<u>*Справочный материал*</u>

$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ □ Получим матрицу $A=\left(\begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}\right)$.

Метод Гаусса: 1) Умножить 1-ю строку матрицы на a_2/a_1; 2) вычесть из 2-й строки 1-ю; 3) получим систему уравнений, из которой все неизвестные определяются без труда.

$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$ □ Получим матрицу $A=\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array}\right)$

Метод Гаусса: Рассмотрим на примере.

<u>*Содержание работы*</u>

1. Решить систему $\begin{cases} 4x+3y=28 \\ 3x-5y=21 \end{cases}$ методом Гаусса.

Решение: Получим матрицу $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 28 \\ 3 & -5 & 21 \end{array}\right)$ □ Умножим 1-ю строку на ¾ и из 2-й вычтем 1-ю строку:

$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 9/4 & 21 \\ 3 & -5 & 21 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 9/4 & 21 \\ 0 & -29/4 & 0 \end{array}\right)$ □ $\begin{cases} 3x+\dfrac{9}{4}y=21 \\ -\dfrac{29}{4}y=0 \end{cases}$ □ *x=7, y=0.*

2. Решить систему $\begin{cases} 2x+3y+z=14 \\ 3x-y+2z=5 \\ x+2y-z=7 \end{cases}$ методом Гаусса.

Решение: Получим матрицу $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 14 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 7 \end{array}\right)$ □ 1) Умножим 1-ю строку на $\frac{3}{2}$ вычтем ее из 2-й строки; 2) затем умножим 1-ю строку на $\frac{1}{2}$ и вычтем ее из 3-й строки. В результате приходим к матрице $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 14 \\ 0 & -5{,}5 & 0{,}5 & -16 \\ 0 & 0{,}5 & -1{,}5 & 0 \end{array}\right)$. После чего, умножим 2-ю строку на $-\frac{0{,}5}{5{,}5} = -\frac{1}{11}$ и вычтем ее их 3-й строки. Тогда получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 14 \\ 0 & -5{,}5 & 0{,}5 & -16 \\ 0 & 0 & -\frac{32}{22} & -\frac{16}{11} \end{array}\right) \square \begin{cases} 2x+3y+z=14 \\ -5{,}5y+0{,}5z=-16 \\ -\frac{32}{22}z=-\frac{16}{11} \end{cases} \square \begin{cases} 2x=14-3y-1 \\ -5{,}5y=-16-0{,}5\cdot 1 \\ z=1 \end{cases} \square \begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=1 \end{cases}.$$

<u>Используя рассмотренные примеры, выполнить следующие задания:</u>

3. Методом Гаусса решить следующие системы уравнений и сделать проверку:

a) $\begin{cases} 4x+y=17 \\ 3x-5y=7 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 5x-3y=16 \\ 2x+4y=22 \end{cases}$.

4. Методом Гаусса решить следующие системы уравнений и сделать проверку:

a) $\begin{cases} x+2y+4z=31 \\ 5x+y+2z=29 \\ 3x-y+z=10 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+2y-z=7 \\ 2x-y+z=2 \\ 3x-5y+2z=-7 \end{cases}$.

5. Методом Гаусса решить следующую систему уравнений и сделать проверку:

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_4=-3 \\ 3x_1-x_2-2x_3=1 \\ 2x_1+x_2-2x_3-x_4=4 \\ x_1+3x_2-2x_3-2x_4=7 \end{cases}$$

Выводы и предложения (по данной практической работе)

Метод Гаусса основан на последовательном исключении неизвестных и состоит из прямого хода (через матицу) и обратного хода. Опишите суть метода Гаусса для n-уравнений с m-неизвестными.

Вопросы для самоконтроля

1. В чем заключается метод Гаусса?

2. Когда система двух линейных уравнений с двумя неизвестными имеет единственное решение?

3. Может ли система двух линейных уравнений с двумя неизвестными иметь только два решения?

Практическая работа №18: Решение систем неравенств

Цель работы

1. Освоить графический метод решения систем неравенств с двумя неизвестными.

Содержание и порядок выполнения работы (описание хода работы)

Справочный материал

Число a называется *решением системы неравенств с одним неизвестным*, если оно является решением каждого неравенства системы. Решить систему неравенств – значит – найти множество решений системы.

Две системы неравенств называются *равносильными*, если они имеют одно и то же множество решений. Таким образом, решение системы неравенств основано на выполнении равносильных преобразований.

Решить систему неравенств с двумя неизвестными можно графическим методом.

Содержание работы

1. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} 3x < x+2 \\ x+1 < \frac{1}{2}x+2 \end{cases}$$

Решение: $\begin{cases} 3x < x+2 \\ x+1 < \frac{1}{2}x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1 \\ x<2 \end{cases}.$

Ответ: $x<1$.

Используя рассмотренные примеры, выполнить следующие задания:

2. Решите системы неравенств:

а) $\begin{cases} x+2>2x+3 \\ 2x+3>3x+5 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-5>23-4x \\ 7x+3<9x-1 \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2(2x-3)<5x-\frac{3}{4} \\ 8x-5<\frac{15x-8}{2} \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2-3x+2\ge 0 \\ x-x^2+2\ge 0 \end{cases}$

3. Решите системы неравенств графически:

а) $\begin{cases} y\ge x+3 \\ y\le -x+3 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y\le 1 \\ x\ge 0 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+y\le 1 \\ y\ge 0 \end{cases}$ г) $\begin{cases} y\le -\frac{2}{3}x+4 \\ y\ge \frac{2}{3}x+4 \end{cases}$ д) $\begin{cases} -4\le x\le 6 \\ -3\le y\le 2 \end{cases}$

4. Решите системы неравенств графически:

а) $\begin{cases} x\ge 0 \\ x+y-2\ge 0 \\ x-y+1\le 0 \\ x\le 2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-1\ge 0 \\ y-1\ge 0 \\ x+y-3\ge 0 \\ -6x-7y+42\ge 0 \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x-y+2\ge 0 \\ x-y\ge -2 \\ x\le 1 \\ 2x-y-3\ge 0 \end{cases}$

Выводы и предложения (по данной практической работе)

Решением системы неравенств с двумя неизвестными является часть плоскости, а решением системы неравенств с тремя неизвестными будет часть пространства.

Вопросы для самоконтроля

1. Что является решением неравенства с одним неизвестным?
2. В каком случае одно неравенство является следствием другого?
3. Какое неравенство называется линейным, а какое квадратным?

Приведите пример квадратного неравенства, которое не имеет решений

Практическая работа №19: **Понятие корня n–й степени из действительного числа**

Цель работы: овладение практическими навыками и закрепление теоретического материала по вычислению корней из чисел и числовых и буквенных выражений.

Студент должен:

знать:

- понятие корня n-ой степени;

-понятие арифметического корня;

-основные свойства корней;

уметь:

- вычислять корень n-ой степени;

-упрощать любые выражения используя свойства корней;

Подготовка к работе:

1. Повторить, что такое арифметический квадратный корень из числа.
2. Свойства арифметического квадратного корня.

Контрольные вопросы:

1. Что такое корень n-ой степени из числа а?
2. Что такое арифметический корень n-ой степени из числа ?
3. Основные свойства корней?
4. Как называют знак корня $\sqrt{\ }$?

Задание:

Задание	*вариант*	
	1	**2**
1)Вычислите	А)$\sqrt[3]{0{,}125}$ Б)$\sqrt[5]{-\frac{1}{32}}$	$\sqrt[3]{0{,}027}$ $\sqrt[5]{-3\frac{3}{8}}$
2)Решите уравнение	А)$x^3+8=0$ Б)$\sqrt[3]{x-5}=-3$	$x^4-19=0$ $\sqrt[3]{7-4x}=4$
3)Найдите значение числового выражения	а)$\sqrt[3]{24*9}$ *б)*$\sqrt[4]{\frac{16а^4в^8}{с^{12}}}$	*А)*$\sqrt[3]{75*45}$ *Б)*$\sqrt[3]{-\frac{27а^6}{32в^3}}$
4)Внесите множитель под знак корня	А)$2\sqrt{5}$ Б)$2\sqrt[3]{3}$	$5\sqrt{2}$ $3\sqrt[3]{2}$
5)Преобразуйте заданное выражение к виду $\sqrt[n]{A}$	$\sqrt[4]{\frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{3}{4}\sqrt{\frac{4}{3}}}}$	$\sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}}}$
6)Вынесите множитель из под знака корня	$\sqrt[3]{625x^5y^6}$	$\sqrt[5]{-64n^{16}}$

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ К ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЕ № 19:

Корень n-й степени и его свойства.

безусловно, все так или иначе знакомы с интуитивным понятием квадратного корня - это такое число, квадрат которого равен а. аналогично определяется корень n-й степени из числа а, где n - положительное число.

определение. корнем n-й степени из числа а называется такое число, n-я степень которого равна а.

согласно данному определению корень n-й степени из числа а - это решение уравнения $x^n = a$. число корней этого уравнения зависит от n и от а.

арифметический корень n-й степени. **определение**. арифметическим корнем n-й степени из числа а называют неотрицательное число, n-я степень которого равна а.

арифметический корень обозначают$\sqrt[n]{x}$. число n называют показателем корня, а само число а - подкоренным выражением. знак корня √ называют радикалом.

основные свойства корней.

Для любого натурального n, целого k и любых неотрицательных чисел a и b выполнены равенства:

1°. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$.

2°. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b\neq0)$.

3°. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$ $(k>0)$.

4°. $\sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k}$ $(k>0)$.

5°. $\sqrt[n]{a^k}=(\sqrt[n]{a})^k$ (если $k\leqslant0$, то $a\neq0$).

Эти пять свойств с легкостью доказываются из определения корня и степени. при решении задач, связанных с вычислением корней следует активно пользоваться этими свойствами - они сокращают объем вычислений, позволяют упрощать выражения и оказывают другую помощь.

Для любых чисел a и b, таких, что 0≤a<b, выполняется неравенство $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$. проведем доказательство методом от противного. допустим, что $\sqrt[n]{a} \geq \sqrt[n]{b}$. тогда по свойству степеней с натуральным показателем $(\sqrt[n]{a})^n \geq (\sqrt[n]{b})^n$, т.е. a≥b. это противоречит условию a<в.

Практическая работа №20:

Свойства корня n-й степени. Преобразование иррациональных выражений

Цель работы: овладение практическими навыками и закрепление теоретического материала по вычислению степени с рациональным и действительным показателем.

Студент должен:

знать:

- Определение степени с натуральным показателем;
- Определение степени числа с рациональным показателем;
- Свойства степени числа с рациональным показателем;

уметь:

- Преобразовывать выражения содержащие степень с действительным показателем;
- Переводить степень с рациональным показателем в корень;
- Переводить корень в степень с рациональным показателем;

Подготовка к работе:

1. Повторить определение степени числа с целым показателем.
2. Повторить свойства степени с целым показателем.

Контрольные вопросы:

1. Что такое степень числа с рациональным показателем?
2. Свойства степени числа с рациональным показателем?
3. Как перевести степень с рациональным показателем в корень?

4. Как перевести корень в степень с рациональным показателем?

<u>Задание:</u>

1. Задание	***Вариант***	
	1	***2***
1)Представьте степень с дробным показателем в виде корня	$2a^{\frac{1}{3}}$ $5^{\frac{2}{3}}$	$5a^{\frac{3}{5}}$ $6^{\frac{3}{8}}$
2)Представьте заданное выражение в виде степени с рациональным показателем	$\sqrt[11]{c^2}$	$\sqrt[5]{a}$
3) Вычислите	$49^{\frac{1}{2}}$ $4^{-\frac{1}{2}}$	$27^{\frac{1}{3}}$ $8^{-\frac{1}{3}}$
4)Найдите значение выражения	$3 * 9^{0,4} \div \sqrt[5]{3^{-1}}$	$8^{-\frac{1}{3}} * 16^{\frac{1}{3}} \div \sqrt[3]{2}$
5) Упростите выражение	$c^{\frac{1}{2}} * c^{\frac{1}{3}}$ $\left(c^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$	$d^{\frac{1}{2}} * d^{\frac{1}{4}}$ $\left(p^{-\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{9}}$
6)Упростите выражение	$\dfrac{y^{\frac{6}{7}} * \left(y^{-\frac{1}{2}}\right)^2}{\left(y^{\frac{4}{7}}\right)^{-2}}$	$\dfrac{\left(c^{-\frac{2}{3}}\right)^{-4}}{c^{\frac{1}{6}} * c^{\frac{1}{2}}}$

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ К ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЕ № 20:

Определение

Степенью числа a > 0 с рациональным показателем, где $r = \frac{m}{n}$,m – целое число, а n – натуральное (n > 1), называется число $\sqrt[n]{a^m}$.

Степень с дробным показателем, ее свойства

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, где $a > 0$ — действительное число, m — целое число, n — натуральное число.

$$0^{\frac{m}{n}} = 0, \text{ если } \frac{m}{n} > 0$$

! Степень с дробным показателем = Степень с рациональным показателем

Свойства.

Пусть $a > 0$, $b > 0$ — действительные числа; p, q — рациональные числа.

1. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ 2. $a^p : a^q = a^{p-q}$ 3. $(a^p)^q = a^{pq}$	4. $(ab)^p = a^p \cdot b^p$ 5. $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$

4.$(ab)^r = a^r * b^r$

5.$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$

Практическая работа №21:

Способы упрощения выражений, содержащих радикалы

Цели:

Образовательная: продолжить формирование у студентов умений применять свойства степеней и корней при преобразовании выражений.

Воспитательная: воспитание самостоятельности, творческого подхода к решению задач.

Развивающая: развитие логического мышления, навыков сравнительного анализа.

Оборудование: доска, компьютер, проектор, экран, записи на доске, плакаты с формулами по теме: «Степени» и «Корни», индивидуальные карточки-задания.

Использование элементов педагогических технологий:

1. сотрудничества;
2. здоровьесберегающих (чередование видов деятельности);
3. информационно-коммуникационных;
4. развивающих;
5. личностно-ориентированных.

Результативность:

формирование компетенций: ценностно-смысловой, учебно-познавательной, коммуникативной, личного самосовершенствования.

План занятия.

1) Подготовительный этап.

1) Проверка усвоения пройденного материала фронтально (или индивидуально) по следующим вопросам (на экран проектируются вопросы, на которые студенты отвечают устно).

1. Что значит возвести число в степень n?

2. Как перемножить две степени с одинаковыми основаниями?
3. Как разделить две степени с одинаковыми основаниями?
4. Как возвести степень в степень?
5. Как извлечь корень из степени?
6. Чему равна нулевая степень числа?
7. Как найти степень с отрицательным показателем?
9. Как найти корень с дробным показателем?
10. Сформулируйте основное свойство корня.
11. Как извлечь корень из произведения?
12. Как извлечь корень из дроби?
13. Как извлечь корень из степени?
14. Как производится умножение корней одинаковой степени?
15. Как производится умножение корней разных степеней?
16. Как производится деление корней одинаковой степени?
17. Как производится возведение корня в степень?
2) Повторить:

свойства корней

1. $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
2. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
3. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$
4. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$
5. $\sqrt[nm]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^k}$

свойства степеней

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $a^m : a^n = a^{m-n}$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$
4. $a^n \cdot b^n = (ab)^n$
5. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

2) Теоретический этап.
Применение знаний при решении типовых заданий.
Задание 1. Привести к общему показателю корни:
$\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt{5}$
Задание 2. Сократить показатели корней и подкоренных выражений:
$\sqrt[8]{81x^4y^4}$
Задание 3. Извлечь корень:
$\sqrt{0{,}01 \cdot 81}$; $\sqrt[3]{27 \cdot 8}$
Задание 4. Выполните действия:
$\sqrt{a^3 \cdot \sqrt{b}} : \sqrt{b^{-1} \cdot \sqrt{a^3}}$
*Задание 5.*Вычислите:
$-0{,}2^3 \cdot 0{,}2^{-2} + 64^{\frac{1}{6}} + 5^3 : 5^4 - 1{,}5^0$
3) Практический этап.
Самостоятельное применение умений и знаний.
Провести самостоятельную работу в 15 вариантах.
Примерное содержание одного варианта.

1. Привести к общему показателю корни:

$\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{3}$

2. Сократить показатели корней и подкоренных выражений:

$\sqrt[4]{25x^2y^2}$

3. Извлечь корень:

$\sqrt{25\cdot 64}$; $\sqrt[n]{a^{3n}\cdot(a-b)^n}$

4. Выполните действия:

а) $0{,}5\sqrt{24}-3\sqrt{40}-\left(\sqrt{150}+\sqrt{54}-\sqrt{1000}\right)$

б) $\sqrt[4]{7-\sqrt{33}}\cdot\sqrt[4]{7+\sqrt{33}}$

5. Вычислите:

$-0{,}5^2:0{,}5^3-27^{\frac{1}{3}}+4^4\cdot 4^{-2}-0{,}2^0$

Вариант 1

1. Вычислите:

а) $\sqrt[4]{0{,}0625}-\sqrt[5]{-243}$;

б) $\sqrt[4]{2^3\cdot 3^5}\cdot\sqrt[4]{2^5\cdot 3^7}$.

2. Расположите числа в порядке убывания: $\sqrt[3]{31}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt[6]{666}$.

3. Постройте график функции: $y=-\sqrt[3]{x-1}+3$.

4. Вычислите: $\sqrt{40\sqrt{12}}-4\sqrt[4]{75}$.

5. Решите уравнение: $\sqrt[3]{x^2-x-131}=-5$.

6. Найдите значение выражения

$\sqrt{9b^2}-\sqrt[3]{8b^3}-\sqrt[4]{256b^4}+\sqrt[8]{2401}$ при $b=\sqrt{7}-3$.

7. Решите уравнение $\sqrt[3]{81x}+\sqrt[3]{243x^2}=6$.

Вариант 2

1. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{-0{,}343} + \sqrt[6]{729}$;

б) $\sqrt[5]{2^7 \cdot 11^3} \cdot \sqrt[5]{2^8 \cdot 11^7}$.

2. Расположите числа в порядке возрастания: $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{11}$.

3. Постройте график функции: $y = -\sqrt[4]{x+3} - 5$.

4. Вычислите: $6\sqrt[4]{75} - 2\sqrt{15\sqrt{27}}$.

5. Решите уравнение: $\sqrt[5]{x^2 - x - 44} = -2$.

---

6. Найдите значение выражения

$\sqrt{25a^2} + \sqrt[3]{64a^3} - \sqrt[4]{16a^4} - \sqrt[6]{676}$ при $a = \sqrt[3]{26} - 3$.

---

7. Решите уравнение $\sqrt[5]{128x^2} = 24 + \sqrt[5]{64x}$.

Практическая работа №22:
Понятие степени с рациональным показателем, свойства степеней

Цель: Обобщить и систематизировать знания по теме «Свойства корней и степеней»; закрепить умения использовать полученные знания для преобразования алгебраических выражений

Теоретические сведения к практической работе:

Определение. Степенью числа a>0 с рациональным показателем $r = \frac{m}{n}$, где m - целое число, аn - натуральное (n>1), называется число $\sqrt[n]{a^m}$, т.е.

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},\ a > 0\quad a^0 = 1,\ a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Свойства степени с рациональным показателем.

$a > 0,\ b > 0,\ p \in \mathbf{Q},\ q \in \mathbf{Q}$

1. $a^p a^q = a^{p+q}$;
2. $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$;
3. $(a^p)^q = a^{pq}$;
4. $(ab)^p = a^p b^p$;
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.

Задания для самостоятельного решения:

<u>1 вариант</u>

<u>Задание 1.</u> Вычислить

а) $\sqrt[3]{12 + 4\sqrt{5}} \times \sqrt[3]{12 - 4\sqrt{5}}$;

б) $(6 + \sqrt{27})^{\frac{1}{2}} \times (6 - \sqrt{27})^{\frac{1}{2}}$;

в) $(\sqrt{5^3} + \frac{1}{\sqrt{5^3}}) \div (\sqrt{5} + \sqrt{\frac{1}{5}})$;

г) $\frac{7-4\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}} + \frac{7+4\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}}$

Задание 2. Упростить выражение и найти его значение

а) $\dfrac{a^{\frac{7}{3}}+a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}}$ при *а = 2*

б) $\dfrac{a^{\frac{5}{3}}c^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{2}{3}}c^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{5}{3}}c^{\frac{5}{3}}}$ при *а=7, с=3*

Задание 3. Избавиться от иррациональности в знаменателе

а) $\frac{5}{2\sqrt{3}}$; б) $\frac{3\sqrt{c}}{\sqrt{c}+\sqrt{b}}$; в) $\frac{5-\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}$; г) $\frac{6}{\sqrt[7]{64}}$ д) $\frac{a^6}{\sqrt[9]{a}}$

2 вариант

Задание 1. Вычислить

а) $\sqrt[5]{10+2\sqrt{17}}\times\sqrt[5]{10-2\sqrt{17}}$;

б) $(12-\sqrt{19})^{\frac{1}{3}}\times(12+\sqrt{19})^{\frac{1}{3}}$;

в) $(\sqrt{7^3}-\frac{1}{\sqrt{7^3}})\div(\sqrt{7}-\sqrt{\frac{1}{7}})$;

г) $\frac{8-4\sqrt{3}}{8+4\sqrt{3}}+\frac{8+4\sqrt{3}}{8-4\sqrt{3}}$.

Задание 2. Упростить выражение и найти его значение

а) $\dfrac{b^{\frac{5}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{3}{2}}}$ при *b=3*

б) $\dfrac{a^{\frac{7}{5}}c^{\frac{2}{5}}+a^{\frac{2}{5}}c^{\frac{7}{5}}}{a^{\frac{7}{5}}c^{\frac{7}{5}}}$ при *а=9, с=2*

Задание 3. Избавиться от иррациональности в знаменателе

а) $\frac{7}{5\sqrt{3}}$; б) $\frac{5\sqrt{c}}{\sqrt{c}-\sqrt{b}}$; в) $\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$; г) $\frac{12}{\sqrt[7]{81}}$; д) $\frac{a^7}{\sqrt[6]{a}}$

Контрольные вопросы:

1. Что называют степенью с рациональным показателем?
2. Перечислить свойства степени с рациональным показателем.

Практическая работа №23: Свойства степенных функций и их графики

Цель: сформировать навыки исследования свойств степенных функций и построения их графиков в зависимости от показателя; формировать компоненты ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество; ОК 6. Работать в коллективе и в команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями; ОК8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации

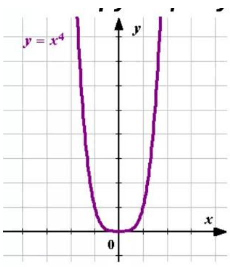
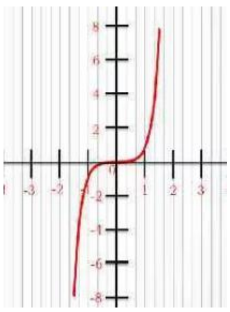
Теоретическая часть:

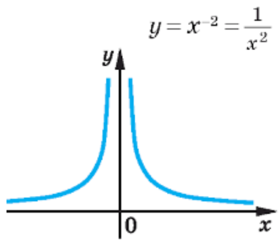
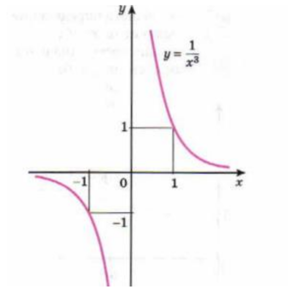
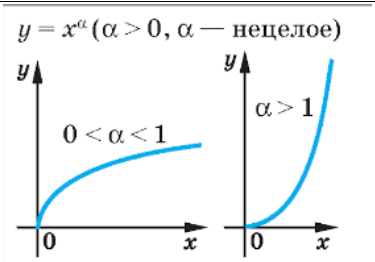
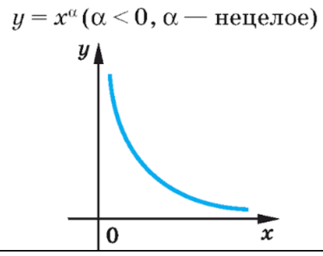
Вы уже знакомы с функциями $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$, $y=1/x$. Все эти функции являются частными случаями СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ, те функции $\mathbf{y = x^p}$.

Свойства степенной функции зависят от свойств степени с действительным показателем, а в частности от того, при каких значениях **x** и **p** имеет смысл степень $\mathbf{x^p}$.
Давайте вспомним определение функции, дадим понятие степенной функции и рассмотрим ее свойства через таблицу.

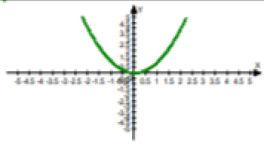
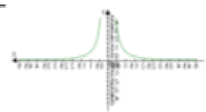
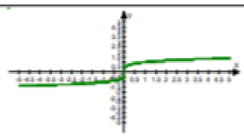
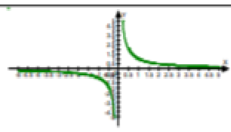
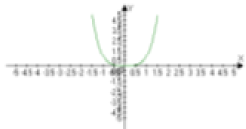
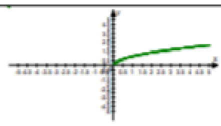
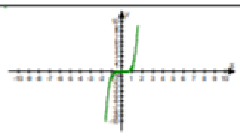
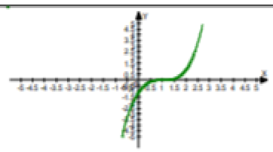
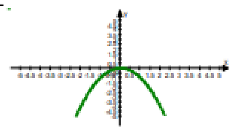
- **Функция** – это соответствие между двумя множествами такое, что каждому элементу одного множества X ставится в соответствие единственный элемент другого множества Y. Первое множество называют **областью определения функции**, а второе – **областью значений функции**. Обозначают: $D(y)$ и $E(y)$ соответственно.

- **Степенная функция** — это функция вида $\mathbf{y = x^p}$, где p — заданное действительное число.
Необходимые обозначения:
X - область определения функции
Y - область изменения функции
X_0 - нули функции
X^+ - область положительных значений функции
X^- - область отрицательных значений функции
max - точки максимума функции
min - точки минимума функции
$X\uparrow$ - область возрастания функции
$X\downarrow$ - область убывания функции

Название(P)	***График***	***Свойства***
P=2n (четное натуральное число)	 *парабола*	• область определения — все действительные числа, т. е. множество R; • множество значений — неотрицательные числа, т. е. $y \geq 0$; функция четная; • функция является убывающей на промежутке $x \leq 0$ и возрастающей на промежутке $x \geq 0$. *Пример функции с показателем p = 2n:* $\mathbf{y = x^4}$.
P=2n-1 (нечетное натуральное число)	 *кубическая парабола*	• область определения — множество R; • множество значений — множество R; • функция нечетная; • функция является возрастающей на всей действительной оси. *Пример функции с показателем p = 2n - 1:* $\mathbf{y = x^5}$.

P = -n где **n** — **отрицательное натуральное число:**	 *гипербола*	• область определения — множество R, кроме x = 0; • множество значений — положительные числа y > 0; • функция четная; • функция является возрастающей на промежутке x < 0 и убывающей на промежутке x > 0. *Пример* **y = 1/x^2**.
P = -(2n - 1), где n — нечетное натуральное число:	 *гипербола*	• область определения — множество R, кроме x = 0; • множество значений — множество R, кроме y = 0; • функция нечетная; • функция является убывающей на промежутках x < 0 и x > 0. *Пример* **y = 1/x^3**.
p — положительная дробь		• множество значений — неотрицательные числа y ≥ 0; • функция является возрастающей на промежутке x ≥ 0. • область определения — неотрицательные числа x ≥ 0; *Пример* **y = x$^{4/3}$**.
p — отрицательная дробь		• область определения — положительные числа x > 0; • множество значений — положительные числа y > 0; • функция является убывающей на промежутке x > 0. *Пример:* **y = x$^{-1/3}$**.

Сопоставьте графическому изображению степенной функции ее аналитическое выражение. Введите ответ в режиме «Т2» в форме цифра-буква

Аналитическое выражение		Графическое изображение степенных функций	
1	$y = x^3$	А	
2	$y = x^5$	Б	
3	$y = x^2$	В	
4	$y = x^{-2}$	Г	
5	$y = x^4$	Д	
6	$y = \frac{1}{x}$	Е	
7	$y = x^{0,5}$	Ж	
8	$y = -x^2$	и	
9	$y = (x-1)^3$	к	

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Отметка о выполнении									

«+» - правильный ответ

«-» - неверный ответ

Практическая работа №24: Показательная функция, ее свойства и график

Цель: обобщить и закрепить знания по данной теме. Формировать умения: вычислять значения функции по значению аргумента; определять положение точки на графике по ее координатам и наоборот; использовать свойства функций для сравнения значений степеней; строить графики функций; выполнять преобразование графиков функций.

Требования к знаниям и умениям: уметь изображать схематически графики функции, знать свойства показательной функции.

Теоретическая часть:

Показательная функция, её свойства и график

Определение: Функцию $y=a^x$, где $a>0$, $a\neq 1$, называют показательной функцией.

Свойство 1: Область определения показательной функции $y=a^x$ – множество R всех действительных чисел.

Свойство 2: Множество значений показательной функции $y=a^x$ – множество положительных чисел.

Свойство 3: Показательная функция $y=a^x$ является возрастающей, если $a>1$, и убывающей, если $0<a<1$.

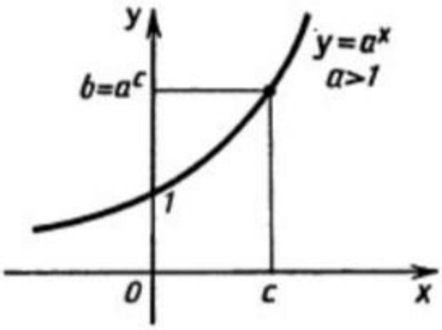


Рис. 1

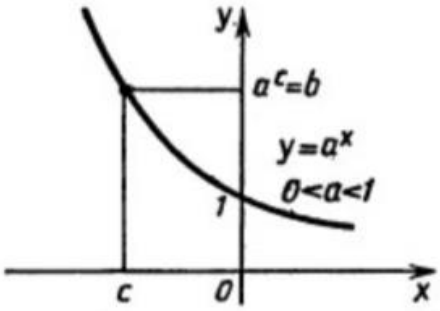


Рис. 2

Тест по теме «Показательная функция»

Вариант 1.

1. Из приведенных ниже функций укажите показательную:

а) $y=x^3$ б) $y=\sqrt{7^x}$ в) $y=\dfrac{1}{x^2}$ г) $y=e^x$

1) а) и в) 2) а) и б) 3) в) и г) 4) б) и г)

2. Из приведенных ниже утверждений верными являются:

а) функция $y=a^x$ принимает в некоторой точке значение 0;

б) функция $y=a^x$ является нечетной;

в) функция $y=a^x$ пересекает ось Oy в точке (0; 1);

г) функция $y=a^x$ принимает только положительные значения.

1) а) и в) 2) а) и б) 3) в) и г) 4) б) и г)

3. При каких значениях *x* выражении 4^x больше 1?

1) $x>0$ 2) $x<0$ 3) $x>1$ 4) $x<1$

4. Областью значений функции $y=-3^x$ является множество

1) $(0;+\infty)$ 2) $(-\infty;0)$ 3) $[0;+\infty)$ 4) $(-\infty;0]$

5. Из приведенных ниже утверждений верными являются:

а) графики функций $y=7^x$ и $y=\dfrac{1}{7^x}$ симметричны относительно оси ординат;

б) графики функций $y=7^x$ и $y=\dfrac{1}{7^x}$ пересекают ось *Oy* в точке (0; 1);

в) графики функций $y=7^x$ и $y=\dfrac{1}{7^x}$ симметричны относительно оси абсцисс;

г) графики функций $y=7^x$ и $y=\dfrac{1}{7^x}$ пересекают ось *Ox* в точке (1; 0).

1) а) и в) 2) а) и б) 3) в) и г) 4) б) и г)

6. Из приведенных ниже функций укажите возрастающие:

а) $y=\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$ б) $y=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-x}$ в) $y=\left(4-\sqrt{7}\right)^x$ г) $y=\left(\dfrac{e}{3}\right)^x$

1) а) и в) 2) а) и б) 3) в) и г) 4) б) и г)

7. Корень уравнения $\sqrt{2^x}\sqrt{3^x}=36$ равен

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

8. Выражение 2*a*, где а - корень уравнения $\left(\dfrac{49}{16}\right)^{x+1}=\left(\dfrac{4}{7}\right)^9$, равно

1) 9 2) 11 3) -11 4) -9

9. Произведение корней уравнения $\left(\dfrac{9}{23}\right)^{x^2-21}=\left(\dfrac{23}{9}\right)^{19x-3}$ равно

1) 19 2) -19 3) -24 4) -18

10. Выражение 0,2+*a*, где *a* - корень уравнения $3^{|x-2|}=9^{2x-1}$ равно

1) 1 2) 0,2 3) -1 4) -0,2

11. Решением неравенства $(0,2)^{\frac{2x-3}{x-2}}\geq 5$ является множество

1) $\left(-\infty;\dfrac{5}{3}\right]\cup(2;+\infty)$ 2) $\left(\dfrac{5}{3};2\right)$ 3) $\left[\dfrac{5}{3};2\right)$ 4) $\left(-\infty;\dfrac{5}{3}\right]\cup[2;+\infty)$

12. Решением неравенства $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x^2+4x+6}{x^2-4x+3}} > 9$ является множество

1) $(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$ 2) $(1;3)$ 3) $(-\infty;-3)\cup(-1;+\infty)$ 4) $(-3;-1)$

13. Наибольшее целое значение х, удовлетворяющее неравенству $10^{\frac{2x}{7}} < 0{,}1$, равно

1) -3 2) -4 3) 0 4) не существует

14. Наименьшее целое значение х, удовлетворяющее неравенству $2^{-x} < \sqrt{2}$, равно

1) 0 2) -1 3) 1 4) не существует

15. Наименьшее целое значение х, удовлетворяющее неравенству $4^{-\frac{x}{2}} < 8$, равно

1) -4 2) -3 3) -2 4) не существует

Тест по теме «Показательная функция»

Вариант 2.

1. Из приведенных ниже функций укажите показательную:

а) $y=x^7$ б) $y=\sqrt{15^x}$ в) $y=\frac{1}{x^5}$ г) $y=-\frac{e^x}{3}$

1) а) и в) 2) а) и б) 3) в) и г) 4) б) и г)

2. Из приведенных ниже утверждений верными являются:

а) функция $y=a^x$ не принимает значение 0;

б) функция $y=a^x$ является четной;

в) функция $y=a^x$ пересекает ось *Oy* в точке (0; 1);

г) функция $y=a^x$ принимает только неотрицательные значения.

1) а) и в) 2) а) и б) 3) в) и г) 4) б) и г)

3. При каких значениях *x* выражении 5^x меньше 1?

1) *x*>0 2) *x*<0 3) *x*>1 4) *x*<1

4. Областью значений функции $y=-\frac{1}{5^x}$ является множество

1) $(0;+\infty)$ 2) $(-\infty;0)$ 3) $[0;+\infty)$ 4) $(-\infty;0]$

5. Из приведенных ниже утверждений верными являются:

а) графики функций $y=7^x$ и $y=-\frac{1}{7^x}$ симметричны относительно оси ординат;

б) графики функций $y=7^x$ и $y=\frac{1}{7^x}$ не пересекают ось *Ox*;

в) графики функций $y=-7^x$ и $y=\frac{1}{7^x}$ симметричны относительно оси абсцисс;

г) графики функций $y=7^x$ и $y=-\frac{1}{7^x}$ пересекают ось Oy в разных точках.

1) а) и в) 2) а) и б) 3) в) и г) 4) б) и г)

6. Из приведенных ниже функций укажите убывающие:

а) $y=\left(\frac{\pi}{3}\right)^{-x}$ б) $y=\left(\frac{3}{4}\right)^{x}$ в) $y=\left(4-\sqrt{7}\right)^{-x}$ г) $y=\left(\frac{e}{3}\right)^{-x}$

1) а) и в) 2) а) и б) 3) в) и г) 4) б) и г)

7. Корень уравнения $\sqrt{5^x}\sqrt{3^x}=225$ равен

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

8. Произведение корней уравнения $36^x-4\cdot 6^x-12=0$ равна

1) 4 2) -12 3) 1 4) -2

9. Сумма корней уравнения $\left(\frac{21}{4}\right)^{29x^2-8x}=\left(\frac{4}{21}\right)^{8x^2-29x}$ равно

1) -37 2) 37 3) 1 4) -1

10. Сумма корней уравнения $4^x-10\cdot 2^x+16=0$ равна

1) -10 2) 10 3) -4 4) 4

11. Выражение 0,3+a, где a - корень уравнения $\sqrt[3]{4^{x+2}}=\frac{4}{\sqrt[5]{2}}$, равно

1) 0,7 2) 1 3) 2,7 4) 5

12. Наибольшее целое значение x, удовлетворяющее неравенству $2^{3x-2}<2^{x+3}$, равно

1) 2 2) 3 3) 0 4) не существует

13. Количество натуральных решений неравенства $(0{,}2)^{2x^2-3x+3}\geq 0{,}04$ равно

1) 1 2) 2 3) 3 4) нет ответа

14. Наименьшее целое значение x, удовлетворяющее неравенству $3\cdot 9^{x+1}-12\cdot 3^x-1\leq 0$, равно

1) -2 2) 0 3) 2 4) -1

15. Наибольшее целое значение x, удовлетворяющее неравенству $4\cdot 3^x+3^{2x+1}<7$, равно

1) 1 2) 0 3) -1 4) не существует

Практическая работа №25,26:

Методы решения показательных уравнений и неравенств

Цель работы: Определение типов показательных уравнений и методов их решения, решение простейших показательных неравенств.
Определение. Уравнение вида $a^x = b$, где $a > 0, a \neq 1$, называется *показательным.* Если $b > 0,$ *то урвнение имеет единтсвенный корень, если* $b \leq 0,$ *то корней нет.*

Способы решения показательных уравнений.

1. Приравнивание показателей.

Суть метода:
1. Уединить слагаемое, содержащее переменную;
2. Привести степени к одному основанию;
3. Приравнять показатели;
4. Решить полученное уравнение;
5. Записать ответ.

Пример:

$3^x - 27 = 0.$

$3^x = 27;$

$3^x = 3^3;$

$x = 3.$

Ответ: $x = 3$.

2. Вынесение общего множителя за скобки.

Примечание: выносим за скобки множитель с меньшим показателем.
Пример:

$3^x - 3^{x+3} = -78.$

$3^x(1 - 3^3) = -78;$

$3^x(1 - 27) = -78;$

$3^x(-26) = -78;$

$3^x = 3;$

$x = 1.$

Ответ: $x = 1$

3. Введение новой переменной

Как правило, уравнения, решаемые этим способом, сводятся к квадратным.
Пример: $4^{2x} - 5 \cdot 4^x + 4 = 0.$
Пусть $4^x = a$ тогда уравнение можно записать в виде:

$a^2 - 5a + 4 = 0;$

$D = 25 - 16 = 9;$

$a_1 = \frac{5+3}{2} = 4;$

$a_2 = \frac{5-3}{2} = 1.$

Сделаем обратную замену:
$4^x = 4$ или $4^x = 1$;
$x = 1$ или $x = 0$

Ответ: $x = 1$ или $x = 0$

4. <u>Использование однородности</u>

Определение Показательные уравнения вида $a^{f(x)} = b^{f(x)}$ называются однородными.
Суть метода: Так как показательная функция не может принимать значение, равное нулю, и обе части уравнения можно делить на одно и то же не равное нулю число, разделим обе части уравнения, например, на $b^{f(x)}$.
Пример: $2^x = 3^x$

Разделим обе части уравнения на $3^x \neq 0$:

$$\frac{2^x}{3^x} = \frac{3^x}{3^x};$$

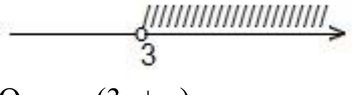
$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1;$$

$$x = 0.$$

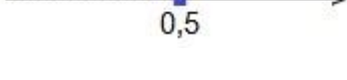
Ответ: $x = 0$.
Определение. *Показательным* неравенством называется неравенство, в котором переменная содержится в показателе степени.

Решение простейших показательных неравенств.

Простейшими считаются показательные неравенства вида: $\mathbf{a^x<a^y}$, $\mathbf{a^x>a^y}$. ($a^x \le a^y$, $a^x \ge a^y$).
Так же, как и при решении простейших показательных уравнений, одинаковые основания степеней опускают, но **знак** нового неравенства **сохраняют**, **если** функция $y=a^x$ является возрастающей **(a>1)**; **если** же показательная функция $y=a^x$ убывает **(0<a<1)**, то **знак** нового неравенства **меняют на противоположный**:
$a^x<a^y \to x<y$, если **a>1**; знак сохранен, так как функция возрастает;
$a^x<a^y \to x>y$, если **0<a<1**; функция убывает – знак поменялся;
$a^x>a^y \to x>y$, если **a>1**; знак сохранен, так как функция возрастает
$a^x>a^y \to x<y$, если **0<a<1**; функция убывает – знак поменялся.
<u>Примеры.</u>
Решить неравенство:
1) $\mathbf{4^{5-2x}<0,25}$.
Представим правую часть в виде: $0,25=(^{25}/_{100})=(^{1}/_{4})=4^{-1}$;
$4^{5-2x}<4^{-1}$; функция $y=4^x$ с основанием $4>1$ **возрастает на R**, поэтому, опуская основания степеней, знак неравенства сохраним:
$5-2x<-1$;
$-2x<-1-5$;
$-2x<-6$ |:(-2) при делении обеих частей неравенства на отрицательное число, знак неравенства меняют на противоположный:
$x>3$.



Ответ: $(3; +\infty)$.
2) $\mathbf{0,4^{2x+1}\geq 0,16}$.
Представим число 0,16 в виде степени числа 0,4. Получаем:
$0,4^{2x+1}\geq 0,4^2$; основание степеней – число **0,4** — удовлетворяет условию: **0<0,4<1**; поэтому, опускаем основания степеней, а знак неравенства меняем на противоположный:
$2x+1\leq 2$;
$2x\leq 2-1$;



$2x \le 1$ |:2
$x \le 0,5$.

Ответ: $(-\infty; 0,5]$.

ВАРИАНТ – I	ВАРИАНТ – II
1. Решите уравнения: **а.** $7^x = 49$ **;** **б.** $8^{x^2-2} = 64^x$ **;** **в.** $5^{x-4} = 1$ **г.** $25^x = 7^{2x}$ **2. Решите уравнение:** $\left(\frac{16}{9}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^5$ **3. Найдите сумму корней уравнения** $5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$ **4. Решите неравенства:** **а.** $2^x \ge 4$ **б.** $0,6^{x^2+3x} \ge 0,6^0$ **5. Найдите наибольшее целое решение неравенства** $2^x + 2^{x+2} \le 20$	**1. Решите уравнения:** **а.** $2^{4x} = 8$ **;** **б.** $9^{x-5} = 1$ **;** **в.** $6^{4x^2-2x} = 36$ **г.** $27^x = 5^{3x}$ **2. Решите уравнение:** $\left(\frac{4}{25}\right)^{x+2} = \left(\frac{5}{2}\right)^6$ **3. Найдите сумму корней уравнения** $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$ **4. Решите неравенства:** **а.** $2^x \le 8$ **б.** $0,3^{x+4} \le 0,3^2$ **5. Найдите наименьшее целое решение неравенства** $3^x + 3^{x+2} \succ 30$

ВАРИАНТ – III

1. Решите уравнения:

а. $3^{2x} = 81$**;**

б. $4^{3x} = 64^{x^2-6}$**;**

в. $2^{3x+6} = 1$

г. $3^{6x} = 8^{6x}$

2. Решите уравнение:

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{3-2x} = \left(\frac{49}{9}\right)^{-3}$$

3. Найдите сумму корней уравнения

$3^{2x} - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$

4. Решите неравенства:

а. $3^x \le 81$

б. $0{,}5^{2x+4} \ge 0{,}5^{x-1}$

5. Найдите наибольшее целое решение неравенства

$4^x + 4^{x+2} \le 68$

ВАРИАНТ – IV

1. Решите уравнения:

а. $4^x = 64$**;**

б. $3^{6-x} = 3^{3x-2}$**;**

в. $3^{x^2-4x} = 1$

г. $4^x = 9^{2x}$

2. Решите уравнение:

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{x} = \left(\frac{4}{25}\right)^{2}$$

3. Найдите сумму корней уравнения

$2 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$

4. Решите неравенства:

а. $5^x \succ 125$

б. $0{,}7^{x+8} \le 0{,}7^2$

5. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$5^x + 5^{x+2} \ge 650$

ВАРИАНТ – V

1. Решите уравнения:

а. $2^{14-x} = 4$;

б. $8^{x+5} = 1$;

в. $625^{x^2-5x} = 25^{12}$;

г. $7^{3x-10} = 4^{3x-10}$.

2. Решите уравнение:

$5^{2-3x} = \frac{1}{25}$

3. Найдите сумму корней уравнения

$$10 \cdot 3^{2x} - 7 \cdot 3^x - 3 = 0$$

4. Решите неравенства:

а. $4^x \le 64$

б. $0{,}3^{2x-1} < 0{,}3^{x+4}$

5. Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$6^x + 6^{x+2} \le 222$$

ВАРИАНТ – VI

1. Решите уравнения:

а. $3^{x+11} = 9$;

б. $16^{x-4} = 1$;

в. $7^{x^2-9x+22} = 49$;

г. $17^{4x-1} = 22^{4x-1}$.

2. Решите уравнение:

$6^{2-3x} = \frac{1}{36}$

3. Найдите сумму корней уравнения

$$9^x - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$$

4. Решите неравенства:

а. $3^x > 27$

б. $0{,}9^{2x} \le 0{,}9^{4x-3}$

5. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$8^x + 8^{x+1} \le 72$$

Практическая работа №27:

Понятие логарифма. Основное логарифмическое тождество

Цель:

Знать определение логарифма, основное логарифмическое тождество.
Уметь вычислять логарифмы, применять основное логарифмическое тождество.
Уметь вычислять значения выражений содержащих логарифмы, содержащие логарифмы, логарифмировать и потенцировать выражения.

Логарифмом числа b по основания a называется такой показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b.

$$\boldsymbol{\log_a b = x \quad <=> \quad a^x = b}, \text{ где } b>0;\ a>0;\ a\neq 1$$

Примеры: $\log_2 8 = 3$; т.к.2^3=8
$\log_5 625 = 4$; т.к.5^4=625
$\log_4 16 = 2$; т.к.4^2=16
$\log_3 \frac{1}{9} = -2$; т.к.$3^{-2}=\frac{1}{9}$
$\log_5 \frac{1}{5} = -1$; т.к.$5^{-1}=\frac{1}{5}$
$\log_4 \frac{1}{64} = -3$; т.к.$4^{-3}=\frac{1}{64}$
$\log_2 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}$; т.к.$2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$
$\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$; т.к $25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$
$\log_{243} 3 = \frac{1}{5}$
$\log_7 7 = 1$; $\log_6 1 = 0$

Пользуясь определением можно записать основное логарифмическое тождество:

$$\boldsymbol{a^{\log_a b} = b}$$

Примеры: $5^{\log_5 3} = 3$
$8^{\log_8 5} = 5$
$3^{-2\log_3 5} = \left(3^{\log_3 5}\right)^{-2} = 5^{-2} = \frac{1}{25}$
$2^{3+\log_2 7} = 2^3 \cdot 2^{\log_2 7} = 8 \cdot 7 = 56$

Практическая часть:

Вариант №1	**Вариант №2**
I уровень 1. Вычислите: а) $\log_3 27 - \log_{\frac{1}{7}} 7$, б) $2^{1+\log_2 5}$ в) $\lg 4 + 2\lg 5$, г) $\log_5 \sqrt{10} - \log_5 \sqrt{2}$ 2. Найдите x: $\log_3 x = 4\log_3 a + 7\log_3 b$	***I уровень*** 1. Вычислите: а) $\log_2 16 - \log_{\frac{1}{3}} 9$, б) $5^{\log_5 9 - 1}$ в) $\log_6 9 + 2\log_6 2$, г) $\lg\sqrt{30} - \lg\sqrt{3}$ 2. Найдите x: $\log_5 x = 2\log_5 a - 3\log_5 b$ 3. Прологарифмируйте по основанию 5:

3. Прологарифмируйте по основанию 5 выражение: $125a^4 : b^4$.

II уровень

1. Вычислить: а) $\dfrac{\log_2 24 - \frac{1}{2}\log_2 72}{\log_3 18 - \frac{1}{3}\log_3 72}$

б) $36^{\log_6 5} + 10^{1-\lg 2} - 8^{\log_2 3}$

2. Найдите x:

$\log_2 x = \frac{1}{2}\log_2 a - \frac{2}{3}\log_2 b - \frac{1}{3}\log_2 b + 5$

3. Прологарифмируйте выражение по основанию e: $\dfrac{e^2 \cdot \sqrt[3]{e} \cdot m^4}{\sqrt[4]{n^2 \cdot p^3}}$

4. Упростите выражение:

$\dfrac{\lg b}{\lg a} + \dfrac{2}{\log_a b} - \log_a b^2$

$25a^6 b^7$

II уровень

1. Вычислите:

а) $\dfrac{\log_7 14 - \frac{1}{3}\log_7 56}{\log_6 30 - \frac{1}{2}\log_6 150}$,б)

$\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}\right) \cdot 49^{\log_7 2}$

2. Найдите x:

$\log_{\frac{1}{3}} x = 3 - \frac{2}{3}\log_{\frac{1}{3}} a - 8\log_{\frac{1}{3}} b + 2\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{3}} c$

3. Прологарифмируйте выражение по основанию 3: $\dfrac{c^2\sqrt{c}}{243\left(ab^3\right)^{\frac{1}{2}}}$

4. Упростите выражение: $a^{2\log_a b} - \left(\log_a a^b\right)^2$

Вариант №3

I уровень

1. Вычислите: а) $\log_2 16 + \log_{\frac{1}{5}} 5$, б) $12^{2-\log_{12} 4}$

в) $3\lg 2 + 3\lg 5$, г) $\log_8 \sqrt{80} - \log_5 \sqrt{10}$

2. Найдите x: $\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}} a - \frac{1}{5}\log_{\frac{1}{2}} b$

3. Прологарифмируйте по основанию 2 $48a\sqrt{a} \cdot b^4$

II уровень

1. Вычислите: а) $\dfrac{\log_2 4 + \log_2 \sqrt{10}}{\log_2 20 + 3\log_2 2}$

б) $16^{1-\log_4 5} + 4^{\frac{1}{2}\log_2 3 - 3\log_8 5}$

2. Найдите x:

$\log_3 x = \frac{2}{3}\log_3 a - 4 + 5\log_3 b - \frac{1}{2}\log_3 b$

3. Прологарифмируйте выражение по основанию 5: $\dfrac{0{,}04 \cdot \sqrt[3]{a^2 b}}{ac^2}$

4. Упростите выражение:

$\dfrac{3}{\log_a b} - \log_b a^2 - \dfrac{\log_3 a}{\log_3 b}$

Вариант №4

I уровень

1. Вычислите: а) $\log_8 64 + \log_{\frac{1}{3}} 3$, б) $\left(\frac{1}{9}\right)^{1-\log_9 18}$

в) $\frac{1}{2}\lg 4 + \lg 5$, г) $\log_3 \sqrt{90} - \log_5 \sqrt{10}$

2. Найдите x: $\log_{\frac{2}{3}} x = \frac{1}{4}\log_{\frac{2}{3}} a - \frac{4}{7}\log_{\frac{2}{3}} b$

3. Прологарифмируйте по основанию 10: $\dfrac{0{,}001b^2}{a^3}$

II уровень

1. Вычислите:

а) $\dfrac{3\log_7 2 - \frac{1}{2}\log_7 64}{4\log_5 2 + \frac{1}{3}\log_5 27}$, б)

$72 \cdot \left(49^{\frac{1}{2}\log_7 9 - \log_7 6} + 5^{-\log_{\sqrt{5}} 4}\right)$

2. Найдите x:

$\log_{25} x = \frac{3}{5}\log_{25} a + \frac{1}{2} - 5\log_{25} b + 4\log_{25} b$

3. Прологарифмируйте по основанию *4*:

$\dfrac{\sqrt{r^5}}{256 \cdot \left(p^2 q\right)^3}$

4. Упростите выражение: $\log_b b^a - b^{2\log_b \sqrt{a}}$

Практическая работа №28,29:

Свойства логарифмической функции и её график

Цель: Знать свойства логарифма, формулы перехода к другому основанию.
Уметь преобразовывать выражения, содержащие логарифмы.

Для *a>0; a≠1; x>0; y>0* справедливы формулы:

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
4. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
5. $\log_a x^p = p \log_a x$
6. $\log_{a^p} x \quad = \frac{1}{p}$

Примеры: а) $\log_6 18 + \log_6 2 = \log_6 18 \cdot 2 = \log_6 36 = 2$

б) $\log_{12} 48 + \log_{12} 4 = \log_{12} 48 \div 4 = \log_{12} 12 = 1$

в) $\log_3 3^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\log_3 3 \quad = \frac{1}{4}$

г) $\log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2}\log_5 12 + \log_5 50 = \log_5 \sqrt{3} - \log_5 \sqrt{12} + \log_5 50 =$

$$= \log_5 \frac{\sqrt{3} \cdot 50}{\sqrt{12}} = \log_5 25 = 2$$

Десятичные и натуральные логарифмы.

Десятичные логарифм числа называют логарифм этого числа по основанию 10.

$$\boxed{\lg b \ = \ \log_{10} b}$$

Примеры: $\lg 100 \ = 2,$

$\lg 1000 \ = 4,$

$\lg 0{,}00001 \ = \ -5,$

$\lg 0{,}01 \ = \ -2.$

Натуральным логарифмом числа называется логарифм этого числа по основанию e, где e = 2,71828

$$\boxed{\ln b \ = \ \log_e b}$$

$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{1\times2\times1} + \ \ldots + \frac{1}{1\times2\times3\ldots n} + \ \ldots$

Примеры: $\ln e^2 = 2,$

$\ln\frac{1}{e} = \ -1\ ,$

$\ln\frac{1}{\sqrt[5]{e^2}} = -\frac{2}{5}$

Для натуральных и десятичных логарифмов составлены специальные таблицы.
Для вычисления других логарифмов используют ***формулу перехода к другому основанию*** :

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

$$\boxed{\log_a b \ = \ \frac{1}{\log_b a}}$$

Пример: $\frac{\log_5 2}{\log_5 6} + \frac{\log_4 3}{\log_4 6} = \log_6 2 + \log_6 3 = \log_6 6 = 1$

Функция – это отображение, при котором каждому значению одного множества ставится в соответствие единственной значение второго множества. Причем отображение называется обратимым если каждому элементу второго множества ставится в соответствие единственный элемент первого множества. Графики обратных функций симметричный относительно прямой *y=x*

Вспомните определение и свойства показательной функции: y= a^x, при *a>0, a*$\neq$ 1. Эта функция возрастает на всей числовой прямой при *a>1* и убывает при *0<a<1.* То есть при любом значении *a* показательная функция монотонна. Для нее существует обратная функция. Можно ее построить. (Рис 1). Функция, обратная показательной называется логарифмической.

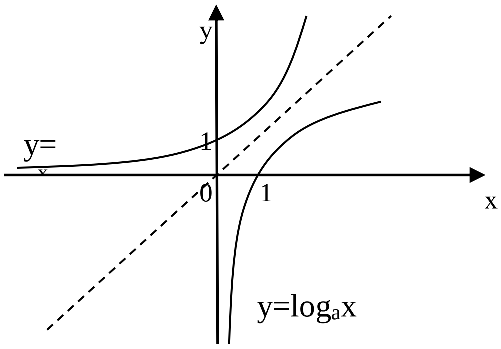


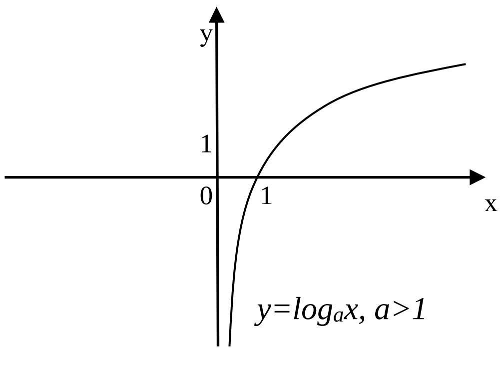
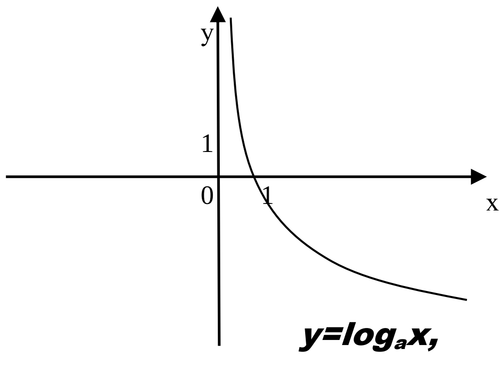
Рис 1. Графики показательной и логарифмической функций.

Функцию, заданную формулой

$$\boxed{y=\log_a x, \text{ где } a>0,\ a\neq 1}$$

называют ***логарифмической функцией*** с основанием *a.*

Для показательной функции существует два случая поведения функции: при a>1 и при *0<a<1. Логарифмическую функцию рассмотрим*

y=log$_a$x, где a>1	***y=log$_a$x, где 0<a<1***
График функции  	***График функции*** 
Свойства функции 1. D(f)=(0;+∞). *Область определения – это все допустимые значения независимого переменного x.* 2. E(f)=R. *Область значения – это все допустимые значения зависимого переменного y.* 3. Возрастает на всей области	***Свойства функции*** 1. D(f)=(0;+∞). 2. E(f)=R. 3. Убывает на всей области определения

определения *Функция называется возрастающей, если большему значению аргумента ставится в соответствие большее значении функции.* 4. Проходит через точку (1;0)	*Функция называется убывающей, если большему значению аргумента ставится в соответствие большее значении функции.* 4. Проходит через точку (1;0)

Пример 1. Построить график функции $y=log_3(x-2)$. Описать ее свойства.
Решение. График искомой функции получается из графика функции $y=log_3x$.

X	1/3	3	9
y	-1	1	2

График функции $y=log_3(x-2)$ получаем из предыдущего сдвигом по оси Ох на 2 единицы вправо (Рис 11).

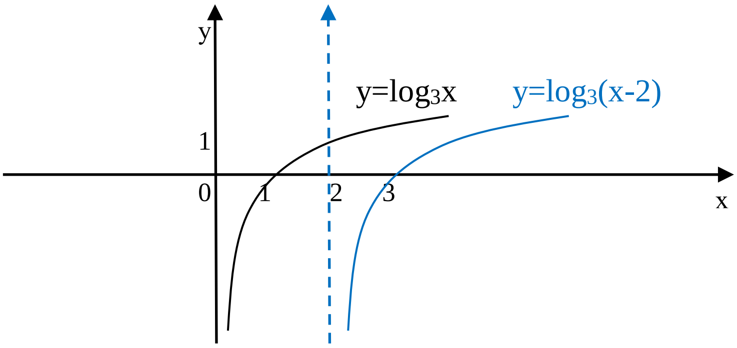


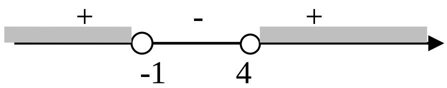
Рис 11**.** График функции $y=log_3(x-2)$.

Пример 2. Найдите область определения функции $y=log_5(6-2x)$.
Решение. Областью определения логарифмической функции является множество положительных действительных чисел. Поэтому аргумент логарифма должен быть строго больше нуля. $6-2x>0;\ -2x>-6;\ x<3$.
Ответ $x\epsilon(-\infty;3)$
Пример 3. Найдите область определения функции $y=log_5(x^2-3x-4)$.
Решение. $x^2-3x-4>0$.

Решим неравенство методом интервалов: $f(x)=x^2-3x-4$

$x^2-3x-4=0;\ x_1=-1;\ x_2=4$

$x\epsilon(-\infty;-1\cup(4;+\infty)$



Ответ: $x\epsilon(-\infty;-1\cup(4;+\infty)$
Пример 3. Найдите область определения функции $y=log_8\frac{2x+6}{5-10x}$
Решение. $\frac{2x+6}{5-10x}>0$

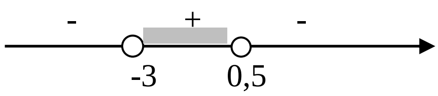
Решим неравенство методом интервалов*:* $f(x)=\frac{2x+6}{5-10x}$

$\frac{2x+6}{5-10x}=0$; Дробь равна 0 когда числитель равен 0, а знаменатель не равен 0. Т.О. получим:

$2x+6=0$ и $5-10x\neq 0$

$x=-3 \qquad x\neq 0{,}5$

$x\epsilon(-3;0{,}5)$



Ответ: $x\epsilon(-3;0{,}5)$

Практическая часть:

№	1 вариант	№	2 вариант
1. Постройте график функции:			
a	$y = log_3(x-2)$	**a**	$y = log_2(x+1)$
b	$y = -log_{\frac{1}{2}}x$	**b**	$y = log_{\frac{1}{3}}x + 2$

1. Выполните действия:

Свойства логарифмов		***Вариант 1***
А) Выберите номер правильного ответа		
А1	Вычислите: $log_{12}160 + log_{12}0,9$	**1)** 2; **2)** 1; **3)** 3; **4)** 0
А2	Упростите: $5^{2+log_5 3}$	**1)** 50; **2)** 3; **3)** 75; **4)** 12
А3	Вычислите: $2log_2 12 - log_2 18$	**1)** 3; **2)** 4; **3)** 1; **4)** 2
А4	Найдите значение выражения: $\log_4(16c)$, если $\log_2 c = 0,5$	**1)** 1; **2)** 2,25; **3)** 3,75; **4)** 4,5
А5	Найдите значение выражения: $\dfrac{log_5 144}{log_5 12} - 8$	**1)** 4; **2)** 6; **3)** $log_5 12 - 8$; **4)** -6
А6	Вычислите: $\log_2(24m)$, если $\log_2 3m = 8,5$	**1)** 11,5; **2)** $-5,5$; **3)** 19,5; **4)** 20
А7	Найдите значение выражения: $\log_5 \dfrac{25}{c}$, если $\log_c 5 = 0,2$	**1)** 3; **2)** 7; **3)** -3 **4)** 5
А8	Вычислите $81^{log_3 \sqrt[4]{5}} - 2^{log_{0,5} 5}$	**1)** 5; **2)** 5,2; **3)** 4,8; **4)** 4,5
Свойства логарифмов		***Вариант 2***
А) Выберите номер правильного ответа		
А1	Вычислите: $log_{11}110 + log_{11}1,1$	**1)** 1; **2)** 3; **3)** 2; **4)** -1
А2	Упростите: $6^{2-log_6 2}$	**1)** 18; **2)** 15; **3)** 75; **4)** 25
А3	Вычислите: $log_3 96 - 5log_3 2$	**1)** 3; **2)** 1; **3)** -1; **4)** 2
А4	Найдите значение выражения: $\log_4 \dfrac{16}{c}$, если $\log_4 c = -0,5$	**1)** $-0,5$; **2)** 3,5; **3)** 1,5; **4)** 2,5
А5	Найдите значение выражения: $\dfrac{log_7 169}{log_7 13} + 5$	**1)** 6; **2)** 7; **3)** $log_7 13 + 5$; **4)** -2
А6	Вычислите: $\log_5(100m)$, если $\log_5 4m = 7,5$	**1)** 6,5; **2)** $-4,5$; **3)** 9,5; **4)** 10
А7	Найдите значение выражения: $\log_6 \dfrac{216}{c}$, если $\log_c 6 = 0,5$	**1)** 3; **2)** 1; **3)** -2 **4)** 2
А8	Вычислите $64^{log_4 \sqrt[3]{7}} - 5^{log_{0,2} 2}$	**1)** 6,5; **2)** 5; **3)** 6,2; **4)** 7,5

Свойства логарифмов		***Вариант 3***
	А) Выберите номер правильного ответа	
А1	Вычислите: $lg125+lg8$	**1)** 1; **2)** 2; **3)** 3; **4)** 4
А2	Упростите: $6^{2-log_6 9}$	**1)** 4; **2)** 6; **3)** 9; **4)** 12
А3	Вычислите: $2log_{15}3+log_{15}25$	**1)** 3; **2)** 4; **3)** 1; **4)** 2
А4	Найдите значение выражения: $\log_9(27c)$, если $\log_3 c=0,5$	**1)** 1; **2)** 1,75; **3)** 0,75; **4)** 1,5
А5	Найдите значение выражения: $\dfrac{log_3 121}{log_3 11}+5$	**1)** 11; **2)** 6; **3)** $log_3 11+5$; **4)** 7
А6	Вычислите: $\log_5(50m)$, åñëè $\log_5 2m=4,5$	**1)** 8,5; **2)** 6,5; **3)** 9,5; **4)** 9
А7	Найдите значение выражения: $\log_4\dfrac{16}{c}$, если $\log_c 4=0,1$	**1)** -8; **2)** -6; **3)** -3 **4)** 4
А8	Вычислите $64^{log_2\sqrt[3]{5}}+3^{log_{\frac{1}{3}}5}$	**1)** 5; **2)** 25,2; **3)** 15,1; **4)** $4\dfrac{1}{3}$
Свойства логарифмов		***Вариант 4***
	А) Выберите номер правильного ответа	
А1	Вычислите: $log_9 810-log_9 10$	**1)** 1; **2)** 2; **3)** 3; **4)** -1
А2	Упростите: $3^{3+log_3 2}$	**1)** 54; **2)** 48; **3)** 81; **4)** 29
А3	Вычислите: $log_5 12,5-log_5 0,1$	**1)** 3; **2)** 1; **3)** -2; **4)** 4
А4	Найдите значение выражения: $\log_{36}(6c)$, если $\log_6 c=0,2$	**1)** 1,2; **2)** 1,5; **3)** 0,6; **4)** 1,8
А5	Найдите значение выражения: $\dfrac{log_9 64}{log_9 4}-2$	**1)** 2; **2)** 8; **3)** 1; **4)** $log_9 4-2$
А6	Вычислите: $\log_3(54m)$, если $\log_3 2m=1,5$	**1)** 4,5; **2)** $-2,5$; **3)** 1,5; **4)** 5
А7	Найдите значение выражения: $\log_7\dfrac{49}{c}$, если $\log_c 7=0,25$	**1)** -3; **2)** 1; **3)** 2 **4)** -2
А8	Вычислите $216^{log_6\sqrt[3]{3}}+7^{log_{\frac{1}{7}}5}$	**1)** 4,8; **2)** -3; **3)** 3,2; **4)** 10,5

2. Определите множество значений функции:

А1	Определите множество значений функции: $y=11-\log_7(x+5)$	**1)** $[5;+\infty)$; **2)** $(-\infty;+\infty)$; **3)** $(-\infty;11]$; **4)** $(5;11)$
А2	Определите множество значений функции: $y=\dfrac{4}{log_3(x^2+9)}$	**1)** $(1;9]$; **2)** $(-\infty;2]$; **3)** $(0;2]$; **4)** $[2;+\infty)$
А3	Определите множество значений функции: $y=12+\log_3(4-x)$	**1)** $[12;+\infty)$; **2)** $(-\infty;12)$; **3)** $(-\infty;+\infty)$; **4)** $(4;12)$
А4	Определите множество значений функции: $y=log_2(\lvert x\rvert+1)$	**1)** $(-\infty;0)$; **2)** $(-\infty;+\infty)$; **3)** $[1;+\infty)$; **4)** $(0;+\infty)$

A5	Определите множество значений функции: $y=\log_4^2(x+3)$	**1)** $[0;+\infty)$; **2)** $(-\infty;+\infty)$; **3)** $(-\infty;3]$; **4)** $(0;3)$
A6	Определите множество значений функции: $y=\dfrac{3}{log_2(x^2+8)}$	**1)** $(0;1]$; **2)** $(-\infty;1]$; **3)** $(1;3]$; **4)** $[3;+\infty)$
A8	Определите множество значений функции: $y=log_2(x^2+16)$	**1)** $(-\infty;+\infty)$; **2)** $(-\infty;4]$; **3)** $[4;+\infty)$; **4)** $[16;+\infty)$

Практическая работа №30,31:

Методы решения логарифмических уравнений

Цель работы: закрепить знания и умения студентов при решении логарифмических уравнений и неравенств.

Теортическая часть

Логарифмическое уравнение

Определение: Логарифмическое уравнение – это уравнение вида

$$\log_a b(x) = \log_a c(x), \quad \text{где } a > 0,\ a \neq 1.$$

Уравнения, сводящиеся к этому виду, также называются логарифмическими уравнениями.
Пример.
Решим уравнение
$\log_3 (x^2 – 3x – 5) = \log_3 (7 – 2x)$.
Решение.
1) Поскольку основания в левой и правой частях одинаковые (равны 3), то мы можем освободиться от знаков логарифмов и прийти к уравнению вида $b(x) = c(x)$:
$x^2 – 3x – 5 = 7 – 2x$
2) Приравниваем уравнение к нулю и получаем квадратное уравнение:
$x^2 – 3x – 5 – 7 + 2x = 0$
$x^2 – x – 12 = 0$
Решив квадратное уравнение, находим его корни:
$x_1 = 4$, $x_2 = –3$.
3) Проверим, при каком из двух значений x уравнение имеет смысл.
Мы уже знаем, что логарифмическое уравнение равносильно уравнению $b(x) = c(x)$ только в том случае, если $b(x) > 0$ и $c(x) > 0$. Следовательно, выводим два неравенства:
$x^2 – 3x – 5 > 0$,
$7 – 2x > 0$.
При $x = 4$ неравенства неверны. Значит, 4 не является решением уравнения.
При $x = –3$ неравенства верны. Значит, 3 является единственным решением уравнения.

Логарифмическое неравенство

Определение: Логарифмическое неравенство – это неравенство вида

$$\log_a b(x) > \log_a c(x), \quad \text{где } a > 0,\ a \neq 1.$$

Неравенства, сводящиеся к этому виду, также называются логарифмическими неравенствами.
Если $b(x) > 0$ и $c(x) > 0$, то:

- при $a > 1$ логарифмическое неравенство $\log_a b(x) > \log_a c(x)$ равносильно неравенству $b(x) > c(x)$;
- при $0 < a < 1$ логарифмическое неравенство $\log_a b(x) > \log_a c(x)$ равносильно неравенству с противоположным смыслом $b(x) < c(x)$

Пример.

Решим неравенство $\log_3 (2x - 4) > \log_3 (14 - x)$.

Решение.

1) В основании обеих частей уравнения – одно и то же число 3. Значит, можем убрать значки логарифмов. Поскольку 3 больше 1, то, следуя правилу, составляем следующую систему неравенств:

$$\left|\begin{array}{l} 2x - 4 > 0 \\ 14 - x > 0 \\ 2x - 4 > 14 - x. \end{array}\right.$$

Решаем неравенства и получаем:

$$\left|\begin{array}{l} x > 2 \\ x < 14 \\ x > 6 \end{array}\right.$$

Мы видим, что x больше не только двух, но и больше шести. Значит, неравенство $x > 2$ мы уже в расчет не берем: если x больше 6, то естественно и больше 2. Таким образом, для нас важны только два других неравенства, согласно которым x больше 6, но меньше 14. Это и есть ответ:

$6 < x < 14$.

Текст задания:

Решение логарифмических уравнений и неравенств		**Вариант 1**
	А) Выберите номер правильного ответа	
А1	Если x_0 - корень уравнения $\log_{0,5}(6-2x) = -2$, то значение выражения $x_0^2 + 5$ равно	**1)** 5; **2)** 30; **3)** 9; **4)** 6
А2	Найдите произведение корней уравнения $\lg^2 x - \lg x^3 + 2 = 0$	**1)** 1000; **2)** 0,01; **3)** 0,1; **4)** 100
А3	Найдите сумму корней уравнения $\log_5(2x^2+3) - 1 = \log_5 x$	**1)** -2; **2)** 4,5; **3)** 2,5; **4)** 3
А4	Найдите наибольшее целое решение неравенства $\log_{1/3}(x-2) \le \log_{1/3}(6-x)$	**1)** -1; **2)** 4; **3)** 5; **4)** -3
А5	Найдите область определения функции $y = \sqrt{log_{0,2}(4-x)}$	**1)** $[3;+\infty)$; **2)** $(-\infty;3]$; **3)** $[3;4)$; **4)** $(-\infty;4)$
	В) Напишите правильный ответ	
В1	Найдите произведение корней уравнения $\log_x 2 + \log_{2x} 2 = \log_4 2$	
В2	Укажите количество целых решений неравенства: $\log_{1/2}(3x-1) - 2 > \log_2 x$	
В3	Если x_0 и y_0 - решение системы уравнений $\begin{cases} x + 2y = 5, \\ \log_{16}(y+x) = 0,5; \end{cases}$ то значение выражения $2x_0 + y_0$ равно	
	С) Приведите подробное решение данного задания.	
С	При каких значениях параметра a уравнение $\log_3(2a - 9^x) = x$ не имеет корней	

Решение логарифмических уравнений и неравенств		**Вариант 2**
А) Выберите номер правильного ответа		
А1	Если x_0 - корень уравнения $\log_{0,25}(3x+1)=-2$, то значение выражения $x_0^2-x_0$ равно	**1)** 45; **2)** 20; **3)** 4; **4)** 31
А2	Найдите произведение корней уравнения $\lg^2 x-\lg x^2-3=0$	**1)** 1000; **2)** 0,01; **3)** 0,1; **4)** 100
А3	Найдите сумму корней уравнения $\log_6\left(4x^2+32\right)-2=\log_6 x$	**1)** 9; **2)** 11; **3)** -10; **4)** 3
А4	Найдите наибольшее целое решение неравенства $\log_{3/\pi}(2x+13)<\log_{3/\pi}(5+3x)$	**1)** 7; **2)** 6; **3)** -6; **4)** -7
А5	Найдите область определения функции $y=\sqrt{log_{0,5}(x+1)}$	**1)** $(-1;0)$; **2)** $(-1;0]$; **3)** $(-\infty;0]$; **4)** $(-1;+\infty)$
В) Напишите правильный ответ		
В1	Найдите наименьший корень равнения $\log_2 x+\log_3 x=1$	
В2	Укажите количество целых решений неравенства $\log_{1/2}(x-0,5)-\log_2(x-1)\geq 1$	
В3	Если x_0 и y_0 - решение системы уравнений $\begin{cases}3x+2y=5,\\ \log_{16}(y+x)=0,25;\end{cases}$ то значение выражения $2x_0+y_0$ равно	
С) Приведите подробное решение данного задания.		
С	При каких значениях параметра a уравнение $\log_2\left(a^3+4^x\right)-x=0$ имеет ровно два корня	

Практическая работа №32:

Переход к новому основанию логарифма

Цель: закрепить знания и умения студентов по освоению логарифмов и свойств логарифмической функции.

Теоретическая часть:

Основные свойства логарифмов

Сложение и вычитание логарифмов

1. $\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$;

2. $\log_a x - \log_a y = \log_a (x : y)$.

Вынесение показателя степени из логарифма

1. $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$;

2. $\log_{a^k} x = \frac{1}{k}\cdot\log_a x$

3. $\log_{a^k} x^n = \frac{n}{k}\cdot\log_a x$

Переход к новому основанию $\log_a x = \dfrac{\log_c x}{\log_c a}$

В частности, если положить *c* = *x*, получим: $\log_a x = \dfrac{1}{\log_x a}$

Основное логарифмическое тождество

Часто в процессе решения требуется представить число как логарифм по заданному основанию. В этом случае нам помогут формулы:

1. $n = \log_a a^n$

2. $a = b^{\log_b a}$

Логарифмическая единица и логарифмический ноль

1. $\log_a a = 1$ — это логарифмическая единица. Запомните раз и навсегда: логарифм по любому основанию *a* от самого этого основания равен единице.

2. $\log_a 1 = 0$ — это логарифмический ноль. Основание *a* может быть каким угодно, но если в аргументе стоит единица — логарифм равен нулю! Потому что $a^0 = 1$ — это прямое следствие из определения.

Переход к новому основанию $\log_a в = \dfrac{\log_c в}{\log_c a}$, частности, если c = b, то $\log_в в = 1$,

и тогда: $\log_a в = \dfrac{1}{\log_в a}$.

$$\log_{0,8} 3 \cdot \log_3 1{,}25 = \log_{0,8} 3 \cdot \frac{\log_{0,8} 1{,}25}{\log_{0,8} 3} = \log_{0,8} 1{,}25 = \log_{\frac{4}{5}} \frac{5}{4} = -1$$

Логарифмирование – это нахождение логарифмов заданных чисел или выражений.

<u>**Пример**</u>**:** Найдем логарифм $x = a^2 \cdot \dfrac{b}{c}$.

<u>Решение</u>.
Последовательно воспользуемся сразу всеми тремя основными свойствами логарифмов, которые изложены выше (логарифм произведения, логарифм частного и логарифм степени):

$\lg x = \lg (a^2 \cdot \dfrac{b}{c}) = \lg a^2 + \lg b - \lg c = 2\lg a + \lg b - \lg c.$

Потенцирование – это нахождение чисел или выражений по данному логарифму числа (выражения).
Потенцировать – значит освобождаться от значков логарифмов в процессе решения логарифмического выражения.
<u>**Пример**</u>**:**

$x = 3a\sqrt[3]{4b^2}$, $\quad \ln x = \ln 3a\sqrt[3]{4b^2}, \ln x = \ln 3 + \ln a + \dfrac{1}{3}(\ln 4 + 2\ln b), \ln x = \ln 3 + \ln a + \dfrac{1}{3}\ln 4 + \dfrac{2}{3}\ln b,$

Ответ: $\ln x = \ln 3 + \ln a + \dfrac{1}{3}\ln 4 + \dfrac{2}{3}\ln b.$

Выполните действия:

А1	Вычислите: $log_{12}160+log_{12}0,9$	1)2 2) 1 3)3 4) 0
А2	Упростите: $5^{2+log_5 3}$	1) 50 2) 3 3) 75 4) 12
А3	Вычислите: $2log_2 12-log_2 18$	1) 3 2) 4 3) 1 4) 2
А4	Найдите значение выражения: $\log_4(16c)$, если $\log_2 c=0,5$	1) 1 2) 2,25 3) 3,75 4) 4 ,5
А5	Найдите значение выражения: $\dfrac{log_5 144}{log_5 12}-8$	1) 4 2) 6 3) $log_5 12-8;$ 4) -6
А6	Вычислите: $\log_2(24m)$, если $\log_2 3m=8,5$	1) 11,5 2) -5,5 3) 19,5 4) 20
А7	Найдите значение выражения: $\log_5\dfrac{25}{c}$, если $\log_c 5=0,2$	1) 3 2) 7 3) -3 4) 5
А8	Вычислите $81^{log_3\sqrt[4]{5}}-2^{log_{0,5}5}$	1) 5 2) 5,2 3) 4,8 4) 4,5
	2 вариант	
А1	Вычислите: $log_{11}110+log_{11}1,1$	1) 1 2) 3 3) 2 4) -1
А2	Упростите: $6^{2-log_6 2}$	1) 18 2) 15 3) 75 4) 25
А3	Вычислите: $log_3 96-5log_3 2$	1) 3 2) 1 3) -1 4) 2
А4	Найдите значение выражения:	1) -0,5 2) 3,5 3) 1,5 4) 2,5

	$\log_4 \frac{16}{c}$, если $\log_4 c = -0{,}5$	
A5	Найдите значение выражения: $\frac{log_7 169}{log_7 13}+5$	1) 6 2) 7 3) $log_7 13+5$; 4) -2
A6	Вычислите: $\log_5(100m)$, если $\log_5 4m = 7{,}5$	1) 6,5 2) -4,5 3) 9,5 4) 10
A7	Найдите значение выражения: $\log_6 \frac{216}{c}$, если $\log_c 6 = 0{,}5$	1) 3 2) 1 3) -2 4) 2
A8	Вычислите $64^{log_4 \sqrt[3]{7}} - 5^{log_{0,2} 2}$	1) 6,5 2) 5 3) 6,2 4) 7,5

Практическая работа №33:
Системы показательных и логарифмических уравнений

Цель: сформировать умение решать системы показательных и логарифмических уравнений и неравенств

Теоретическая часть:

При решении системы, которая содержит показательные и логарифмические уравнения, используют приёмы решения систем (способ подстановки, способ сложения, замену переменных) и методы решения показательных и логарифмических уравнений.

Пример 1. Решим систему уравнений: $\begin{cases} 3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 81, \\ \lg\sqrt{xy} = 1+\lg 3. \end{cases}$

Решение. Для первого уравнения применяем свойства показательной функции, а второе

уравнение потенцируем: $\begin{cases} 3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 3^4, \\ \lg\sqrt{xy} = \lg 10+\lg 3; \end{cases}$ $\begin{cases} 3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 3^4, \\ \lg\sqrt{xy} = \lg 30; \end{cases}$

$$\begin{cases} 2\sqrt{x}-\sqrt{y} = 4, \\ \sqrt{xy} = 30. \end{cases}$$

Введем новые переменные:

$a=\sqrt{x}$ è $b=\sqrt{y}$, получим систему рациональных уравнений: $\begin{cases}2a-b=4,\\ a\cdot b=30.\end{cases}$

Решаем систему методом подстановки, получаем: *a = 5 и b = 6*. Тогда: $\sqrt{x}=5$ è $\sqrt{y}=6$

или *x = 25 и y = 36.*

Проверка: $\begin{cases}3^{2\sqrt{25}-\sqrt{36}}=81,\\ \lg\sqrt{25\cdot 36}=1+\lg 3;\end{cases}$ $\begin{cases}3^4=81,\\ \lg 30=1+\lg 3;\end{cases}$ $\begin{cases}81=81,\\ \lg 30=\lg 30.\end{cases}$

Вывод: пара чисел (25;36) действительно является решением системы.

Ответ: (25;36).

Самые простые системы логарифмических уравнений – это *системы, в которых оба уравнения сводятся к простейшим*. В дальнейшем получается обычная система из двух уравнений с двумя неизвестными, которую мы уже умеем решать.

Пример такой системы: $\begin{cases}\log_2(x+3y)=2\\ \log_3 xy=1\end{cases}$.

Ещё один тип систем логарифмических уравнений – это *системы, которые сводятся к обычным с помощью замены*. Пример такой системы: $\begin{cases}\log_2 x-\log_3 y=2\\ 4\log_2 x-5\log_3 y=7\end{cases}$.

Пример 2

Решить систему уравнений: $\begin{cases}\log_{\sqrt{5}}(2y-x)=2\\ \log_{\frac{1}{2}}(y-x)=-2\end{cases}$.

Как видим, оба уравнения являются простейшими, поэтому используем определение логарифма и получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases}2y-x=\left(\sqrt{5}\right)^2\\ y-x=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\end{cases}$$

$$-\begin{cases}2y-x=5\\ y-x=4\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=1\\ y-x=4\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=1\\ x=-3\end{cases}$$

Проверка: $(-3;1)$ – подходит.

Ответ: $(-3;1)$.

Пример 3

Решить систему уравнений: $\begin{cases} \log_2 x - \log_3 y = 2 \\ 4\log_2 x - 5\log_3 y = 7 \end{cases}$.

Как видим, переменная x в системе встречается только в выражении $\log_2 x$, а переменная y только в выражении $\log_3 y$, поэтому с помощью замены: $\log_2 x = a$, $\log_3 y = b$ данная система сводится к системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} a - b = 2 \\ 4a - 5b = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = b + 2 \\ 4b + 8 - 5b = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 8 \\ y = 3 \end{cases}$$

Проверка:

$(8;3)$ – подходит.

Ответ: $(8;3)$.

Практическая часть

1. Решите системы логарифмических уравнений:
   1 вариант

   $a)\begin{cases} \log_3(xy) = 2 + \log_3 2, \\ \log_3(x+y) = 2; \end{cases}$ *Ответ*: $(6;3)$; $(3;6)$

   2 вариант

   $б)\begin{cases} 3^{\log_3(x-y)} = 1, \\ \log_3(2x-1) + \log_3 y = 1; \end{cases}$ *Ответ*: $(2;1)$.

1 вариант

$$в)\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576, \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 4; \end{cases} \qquad Ответ: (2;6)$$

2 вариант

$$г)\begin{cases} 10^{1+\lg(x+y)} = 50, \\ \lg(x-y)+\lg(x+y) = 2-\lg 5. \end{cases} \qquad Ответ: (4{,}5;0{,}5)$$

Практическая работа №34:

Системы логарифмических и показательных неравенств

Цель: Закрепить и отработать навыки решения систем логарифмических и показательных неравенств

Теоретическая часть:

Условие, когда ставится задача найти множество общих решений двух или нескольких неравенств с двумя или более переменными, называют **системой неравенств**

Решить систему неравенств – это значит найти множество всех общих для обоих неравенств

решений.

Решением системы неравенств называют значение переменной, которое каждое из неравенств системы обращает в верное числовое неравенство.

Чтобы найти решение системы неравенств, надо найти пересечение множеств входящих в неё неравенств

Пример 1

решить систему неравенств.

$$\begin{cases} 7^{2x+1} > 49 \\ 2x-4 > 3 \end{cases}$$

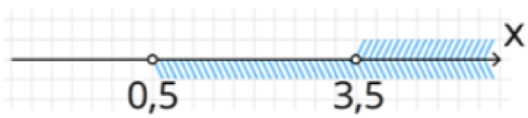
Решение:

представим 49 *в виде степени с основанием* 7 *в первом неравенстве.*

$$\begin{cases} 7^{2x+1} > 7^2 \\ 2x-4 > 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+1 > 2 \\ 2x-4 > 3 \end{cases}$$

Т. к. $y = 7^t$ $(7 > 1)$ *возрастающая функция, знак неравенства не меняется.*

$$\begin{cases} 2x > 2-1 \\ 2x > 3+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x > 1 \,|:2 \\ 2x > 7 \,|:2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0{,}5 \\ x > 3{,}5 \end{cases}$$



Ответ: $x \in (3{,}5;\ +\infty)$.

Пример2

решить систему неравенств:

$$\begin{cases} log_{\frac{1}{3}}(5x-1) \geq 0 \\ 2x+4>3 \end{cases}$$

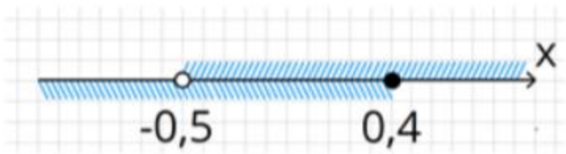
Решение:

1. в первом неравенстве представим 0 *в виде логарифма с основанием* $\frac{1}{3}$.

$$\begin{cases} log_{\frac{1}{3}}(5x-1) \geq log_{\frac{1}{3}} 1 \\ 2x+4>3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x-1 \leq 1 \\ 2x+4>3 \end{cases}$$

Т. к. $y = log_{\frac{1}{3}} t$ *убывающая* $(0 < \frac{1}{3} < 1)$, *знак неравенства меняется.*

$$\begin{cases} 5x \leq 1+1 \\ 2x > 3-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x \leq 2 \mid :5 \\ 2x > -1 \mid :2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 0{,}4 \\ x > -0{,}5 \end{cases}$$



$x \in (-0{,}5;\ 0{,}4]$.

2. ОДЗ. Выражение под знаком логарифма должно быть положительным:

$5x-1>0;$

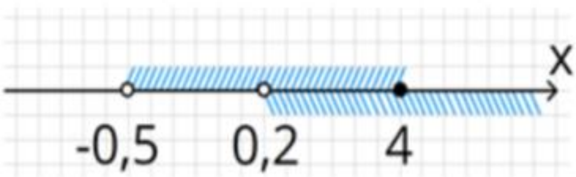
$5x>1 \mid :5;$

$x>0{,}2;$

$x \in (0{,}2;\ +\infty)$.

3. Проверим принадлежность множества решений системы ОДЗ.

$$\begin{cases} x \in (-0{,}5;\ 4] \\ x \in (0{,}2;\ +\infty) \end{cases}$$



Ответ: $x \in (0{,}2;\ 4]$.

Практическая часть:

	1 вариант		2 вариант
	Решить системы		
1	$\begin{cases} 5^{2x+1} > 25 \\ 15^{x^2-1x} = 15^{2x-2} \end{cases}$	1	$\begin{cases} 5^{2x+1} > 25 \\ 17^{x^2-3x} = 17^{2x-6} \end{cases}$
2	$\begin{cases} log_{\frac{1}{3}} x^2 \geq log_{\frac{1}{3}} 36 - log_{\frac{1}{3}} 4 \\ log_{11}(4x-1) > 0 \end{cases}$	2	$\begin{cases} log_{\frac{1}{4}} x^2 \geq log_{\frac{1}{4}} 32 - log_{\frac{1}{4}} 2 \\ log_6(5x-1) > 0 \end{cases}$
3	$\begin{cases} log_{2,5}(2x+3) > log_{2,5}(x-2) \\ log_{6,6}(3x-1) \leq log_{6,6}(8x+4) \end{cases}$	3	$\begin{cases} log_{2,2}(2x+4) > log_{2,2}(x-3) \\ log_6(4x-1) \leq log_6(8x+4) \end{cases}$
4	Реши систему неравенств: $\begin{cases} 5^{x^2-3x-26} < 25 \\ log_{\frac{1}{3}}(x^2+6) \geq log_{\frac{1}{3}} 5x \end{cases}$ Выбери правильный ответ: ○ $(-4;\ 2] \cup [3;\ 7)$ ○ $(2;\ 3)$ ○ $(-\infty;\ -4) \cup (7;\ +\infty)$ ○ другой ответ ○ $[2;\ 3]$ ○ $(-4;\ 7)$ ○ $(-\infty;\ 2] \cup [3;+\infty)$	4	Реши систему неравенств: $\begin{cases} 7^{x^2-4x-3} < 49 \\ log_{\frac{1}{6}}(x^2+3) \geq log_{\frac{1}{6}} 4x \end{cases}$ Выбери правильный ответ: ○ $(-1;\ 5)$ ○ $(-\infty;\ -1) \cup (5;\ +\infty)$ ○ $(-\infty;\ 1] \cup [3;+\infty)$ ○ $(1;\ 3)$ ○ другой ответ ○ $[1;\ 3]$ ○ $(-1;\ 1] \cup [3;\ 5)$

5	Реши систему: $\begin{cases} 11^{2x-2} \geq 11^{x^2-1x} \\ \left(\frac{1}{10}\right)^{2x+1} < \frac{1}{100} \end{cases}$ Выбери правильный ответ: ○ $\emptyset$ ○ $x \in (0{,}5;\ 1] \cup [2;\ +\infty)$ ○ $x \in (-\infty;\ 0{,}5)$ ○ другой ответ ○ $x \in [1;\ 2]$ ○ $x \in (1;\ 2)$	5	Реши систему: $\begin{cases} 9^{2x-12} \geq 9^{x^2-6x} \\ \left(\frac{1}{9}\right)^{2x+1} < \frac{1}{81} \end{cases}$ Выбери правильный ответ: ○ другой ответ ○ $x \in [2;\ 6]$ ○ $x \in (-\infty;\ 0{,}5)$ ○ $\emptyset$ ○ $x \in (2;\ 6)$ ○ $x \in (0{,}5;\ 2] \cup [6;\ +\infty)$

Практическая работа №36: Числовая окружность на координатной плоскости

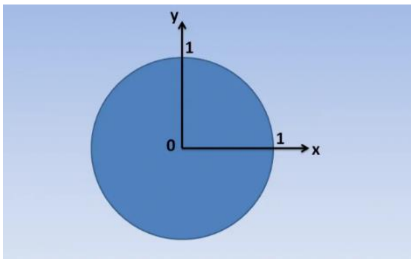
Цель:

– введение понятия тригонометрической окружности и поворота точки вокруг начала координат;

Задачи:

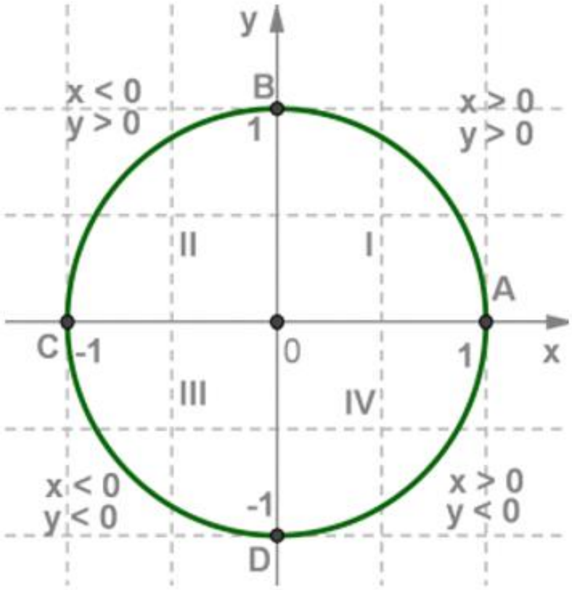
- уметь определять координаты точки, лежащей на тригонометрической окружности;
- объяснять зависимость угла от положения точки на тригонометрической окружности;

Теоретическая часть:

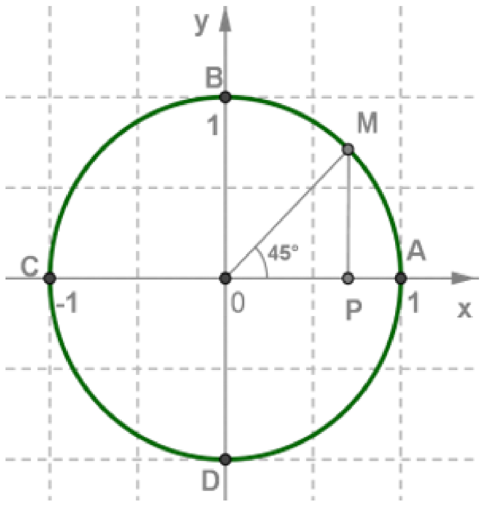


Для описания многих физических процессов обычных алгебраических выражений бывает недостаточно. В особенности это касается колебаний и распространения волн. Здесь на помощь физикам приходит тригонометрия. Сегодня мы познакомимся с базовым понятием тригонометрии – с единичной окружностью.

Соотношение числовой окружности и координатной плоскости



Каждая точка числовой окружности имеет в координатной плоскости свои координаты. Найдём сначала координаты тех точек координатной плоскости, которые получены на макетах числовой окружности.



Точка $M(\frac{\pi}{4})$ — середина I четверти.
Опустим перпендикуляр MP на прямую OA и рассмотрим треугольник OMP.
Так как дуга AM составляет половину дуги AB, то $\measuredangle$MOP=45°.

Значит, треугольник OMP — равнобедренный прямоугольный треугольник и OP=MP, т. е. у точки M абсцисса и ордината равны: $x = y$.

Так как координаты точки $M(x; y)$ удовлетворяют уравнению числовой окружности $x^2 + y^2 = 1$, то для их нахождения нужно решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x = y. \end{cases}$$

Подставив x вместо y в первое уравнение системы, получим следующее решение:

$$x^2 + x^2 = 1$$
$$2x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{2}$$
$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$y = x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

При решении учитываем, что абсцисса точки М положительна.

Получили, что координаты точки М, соответствующей числу $\frac{\pi}{4}$, будут

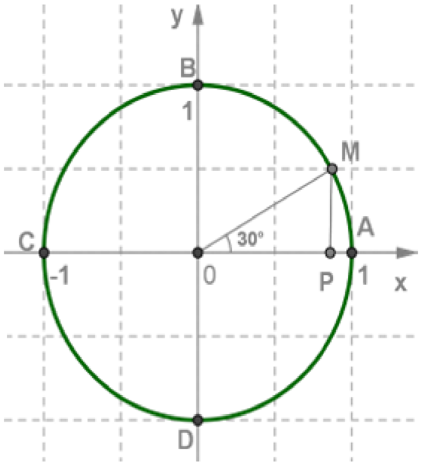
$$M(\frac{\pi}{4}) = M(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$$

Аналогично можно получить координаты и других точек первого макета числовой окружности, учитывая только знаки координат в каждой четверти.

Полученные результаты запишем в таблицу.

Точка окружности									
	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
Абсцисса x	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
Ордината y	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Рассуждаем аналогично для точки М, если теперь она соответствует числу $\frac{\pi}{6}$.



Треугольник МОР прямоугольный. Так как дуга АМ составляет третью часть дуги АВ, то $\measuredangle MOP = 30°$.

Катет МР лежит против угла 30 градусов в прямоугольном треугольнике, значит, равен половине гипотенузы, т. е. ордината точки М равна

$$MP = \frac{1}{2};$$
$$y = \frac{1}{2}$$

Абсциссу x точки М найдём, решив уравнение:

$$x^2 + y^2 = 1$$
$$x^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$x = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

При решении учитываем, что абсцисса точки М положительна.
Получили, что координаты точки М, соответствующей числу $\frac{\pi}{6}$, будут $M(\frac{\pi}{6}) = M(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2})$.

Аналогично можно получить координаты и других точек второго макета числовой окружности, учитывая только знаки координат в каждой четверти.

Полученные результаты запишем в таблицу.

Точка окружности								
	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
Абсцисса x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Ордината y	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Пример1:

Найти координату точки числовой окружности: $P(\frac{45\pi}{4})$.

Решение:

Т.к. числам t и $t + 2\pi * k,$ где $k -$ целое число, соответствует одна и та же точка числовой окружности то:

$$\frac{45\pi}{4} = (10 + \frac{5}{4}) * \pi = 10\pi + \frac{5\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + 2\pi * 5$$

Значит, числу $\frac{45\pi}{4}$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу $\frac{5\pi}{4}$.

Посмотрев значение точки $\frac{5\pi}{4}$ в таблице, получаем: $P(\frac{45\pi}{4}) = P(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2})$

Пример 2.

Найти координату точки числовой окружности: $P(\frac{-37\pi}{3})$.

Решение:

Т.к. числам t и $t + 2\pi * k,$ где k-целое число, соответствует одна и та же точка числовой окружности то:

$$\frac{-37\pi}{3} = -(12 + \frac{1}{3}) * \pi = -12\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{-\pi}{3} + 2\pi * (-6).$$

Значит, числу $\frac{-37\pi}{3}$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу $\frac{-\pi}{3}$, а числу $-\frac{\pi}{3}$ соответствует та же точка, что и $\frac{5\pi}{3}$.

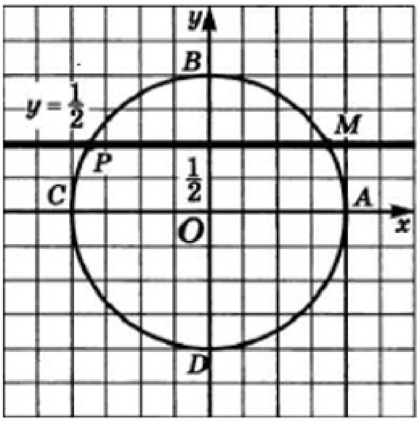
Посмотрев значение точки $\frac{5\pi}{3}$ в таблице, получаем:

$$P\left(\frac{-37\pi}{3}\right) = P\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Пример 3.

Найти на числовой окружности точки с ординатой $y = \frac{1}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.

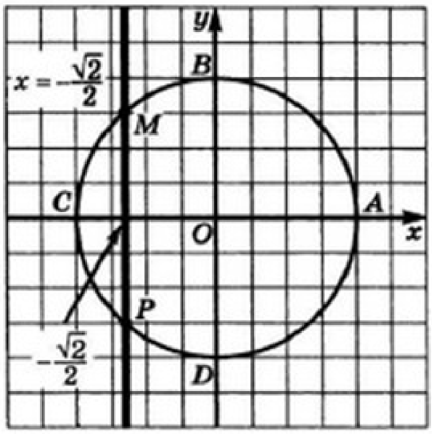
Решение:
Прямая числовую окружность в точках M и P. Точка M соответствует числу $\frac{\pi}{6}$ (из данных таблицы). Значит, и любому числу вида: $\frac{\pi}{6} + 2\pi * k$. Точка P соответствует числу $\frac{5\pi}{6}$, а значит, и любому числу вида $\frac{5\pi}{6} + 2\pi * k$.
Получили, как часто говорят в таких случаях, две серии значений:
$\frac{\pi}{6} + 2\pi * k$ и $\frac{5\pi}{6} + 2\pi * k$.
Ответ : $t = \frac{\pi}{6} + 2\pi * k$ и $t = \frac{5\pi}{6} + 2\pi * k$.



<u>Пример 4.</u>

Найти на числовой окружности точки с абсциссой $x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.

Решение:
Прямая $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ пересекает числовую окружность в точках M и P. Неравенству $x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ соответствуют точки дуги PM. Точка M соответствует числу $\frac{3\pi}{4}$ (из данных таблицы). Значит, и любому числу вида $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi * k$. Точка P соответствует числу $\frac{-3\pi}{4}$, а значит, и любому числу вида $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi * k$.



Тогда получим $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi * k \leq t \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$.

Ответ : $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi * k \leq t \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$.

Практическая часть:

	1 вариант		2 вариант
1	Найти координату точки числовой окружности: $P(\frac{61\pi}{6})$	1	Найти координату точки числовой окружности: $P(-\frac{52\pi}{3})$
2	Найти на числовой окружности точки с ординатой $y = -\frac{1}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.	2	Найти на числовой окружности точки с ординатой $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.
3	Найти на числовой окружности точки с ординатой $y \geq -\frac{1}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.	3	Найти на числовой окружности точки с ординатой $y \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.

4	Найти на числовой окружности точки с абсциссой $x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.	4	Найти на числовой окружности точки с абсциссой $x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.
5	Обозначьте на числовой окружности точку, которая соответствует данному числу, и найдите её декартовы координаты: 1) $\frac{\pi}{2}$ 2) $\frac{\pi}{3}$ 3) $\frac{3\pi}{4}$ 4) $-\frac{\pi}{6}$	5	Обозначьте на числовой окружности точку, которая соответствует данному числу, и найдите её декартовы координаты: 1) π 2) $\frac{\pi}{4}$ 3) $\frac{5\pi}{6}$ 4) $-\frac{\pi}{4}$

Практическая работа №37: Радианная и градусная мера угла

Цель работы: Повторить тригонометрию треугольника, ввести понятие угла поворота, показать связь между радианной и градусной мерой угла, научиться переводить радианы в градусы и наоборот.

Студент должен

- знать:
- Понятие о радианном измерении углов
- Чему равен 1 радиан
- Формулы перехода из радианной меры в градусную и наоборот

уметь:

- Переводить угол из градусной меры в радианную
- Выполнить переход от радианной меры углов к градусной
- Выполнить переход от градусной меры углов к радианной
- Вычислять длину дуги с использованием значений углов в радианах
- Вычислять площадь сектора
- Строить углы на окружности

Теоретическая часть:

Центральный угол, опирающийся на дугу окружности, длина которой равна радиусу этой окружности, называется *радианом*, точнее — угловым радианом, а эта дуга — *дуговым радианом.*

Длина окружности равна $2\pi r$, где r — длина радиуса, поэтому окружность любого радиуса содержит одно и то же число дуговых радиан, а именно $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$. Следовательно, 2π угловых радиан содержит окружность любого радиуса, значит, величина углового радиана не изменяется при изменении длины радиуса окружности:

1 **радиан** $= \frac{360^o}{2\pi} \approx 57^o$

Если угол содержит α радиан, то его градусное измерение (a) можно найти по формуле:

$$a = \frac{180^o}{\pi}\alpha.$$

Решив это уравнение относительно α, получаем формулу для нахождения радианной меры (α) угла по известной его градусной мере (a):

$$\alpha = \frac{\pi}{180}a.$$

Для перевода угла из радиан в градусы используется формула:

$$\alpha_{град.} = \frac{\alpha_{рад.} \bullet 180}{\pi}$$

Для перевода угла из градусов в радианы используется формула:

$$\alpha_{рад.} = \frac{\alpha_{град.} \bullet \pi}{180}$$

Здесь $\alpha_{рад.}$ – это величина угла в радианах, а $\alpha_{град.}$ – величина угла в градусах.

Примеры с решениями:

Пример1. Выполнить переход от радианной меры углов к градусной

Решение

Выразить в градусах 4,5 рад.

Так как $1\,рад = \frac{180°}{\pi}$, то $4{,}5\,рад = 4{,}5 \cdot \frac{180°}{\pi} = \frac{810°}{\pi} \approx 258°$

Пример 2.

Выполнить переход от градусной меры углов к радианной

Решение

Найти радианную меру угла 72 °

Так как $1° = \frac{\pi}{180}\,рад$, то $72° = 72 \cdot \frac{\pi}{180}\,рад = \frac{2\pi}{5}\,рад \approx 1{,}3\,рад$

При записи радианной меры угла, обозначение «рад» часто опускают и записывают $72° = \frac{2\pi}{5}$

Пример 3. Найти длину дуги окружности радиуса 6 см, если её радианная мера $\frac{3\pi}{4}$.

Решение: Используя формулу $l = \alpha R$,

получим: $l = \alpha R = 6\,\frac{3\pi}{4} = 4{,}5\pi$ (см)

Ответ: $4{,}5\pi$ (см).

Пример 4. Найти площадь сектора, если радиус окружности 10 м, а радианная мера центрального угла $\frac{9\pi}{10}$.

Решение:

По формуле $S = \frac{R^2}{2}\alpha$ вычисляем $S = \frac{R^2}{2} \cdot \alpha = \frac{10^2}{2} \cdot \frac{9\pi}{10} = 45\,\pi$(м)

Ответ: 45 π м^2

Задание:

	1 вариант		**2 вариант**
1	Выразить в радианах	**1**	Выразить в радианах величины

	величины углов: 30^0; 45^0; 270^0; 360^0; 36 °; 135 °; - 810 °; 20 °; - 150 °; 2160^0; 210^0		углов: 60^0; 90^0; 540^0;150^0; 240^0;225^0; 120^0; 800^0; 44°; 156°; 625°.
2	Найти градусную меру угла, радианная мера которого равна $\frac{3\pi}{5}$; $\frac{5\pi}{8}$; $-\frac{7\pi}{10}$; $\frac{5\pi}{18}$; $\frac{4\pi}{9}$; $\frac{5\pi}{7}$;	**2**	Найти градусную меру угла, радианная мера которого равна $-\frac{7\pi}{12}$; $\frac{7\pi}{5}$; $\frac{2\pi}{9}$; $-\frac{8\pi}{5}$; $\frac{5\pi}{3}$; $-\frac{9\pi}{15}$.

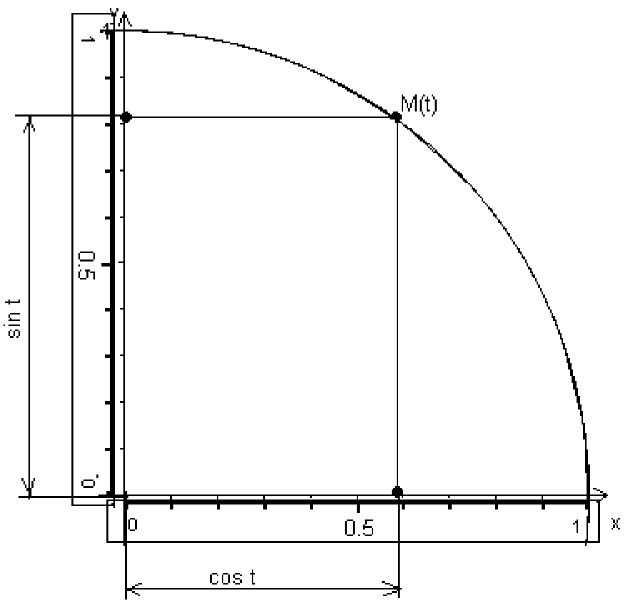
№	Выразите в радианной мере величины углов:	Выразите в градусной мере величины углов:	Определите, углом какой четверти является угол α, если:
1.	$1^\circ; 165^\circ;\ 1800^\circ.$	$-\frac{25\pi}{6}; \frac{3\pi}{8}; \frac{5\pi}{12}.$	$-216^\circ;\ 103^\circ;\ -10^\circ.$
2.	$10^\circ; 145^\circ;\ 8000^\circ.$	$10\pi; -\frac{\pi}{8}; \frac{16\pi}{3}.$	$-4^\circ;\ -125^\circ;\ -11^\circ.$
3.	$15^\circ; 175^\circ;\ 2100^\circ.$	$\frac{\pi}{12}; -\frac{7\pi}{6}; \frac{25\pi}{4}.$	$-318^\circ;\ 91^\circ;\ -7^\circ.$
4.	$20^\circ; 210^\circ;\ 3000^\circ.$	$\frac{4\pi}{3}; -\frac{11\pi}{6}; 3\pi.$	$-415^\circ;\ 102^\circ;\ -8^\circ.$
5.	$25^\circ; 225^\circ;\ 2700^\circ.$	$7\pi; -\frac{26\pi}{3}; \frac{5\pi}{8}.$	$-208^\circ;\ 104^\circ;\ -9^\circ.$
6.	$50^\circ; 235^\circ;\ 7200^\circ.$	$-\frac{25\pi}{4}; \frac{5\pi}{12}; \frac{11\pi}{6}.$	$-214^\circ;\ 512^\circ;\ -12^\circ.$
7.	$55^\circ; 180^\circ;\ 500^\circ.$	$10\pi; -\frac{16\pi}{3}; \frac{\pi}{8}.$	$-200^\circ;\ 613^\circ;\ -13^\circ.$
8.	$60^\circ; 270^\circ;\ 800^\circ.$	$\frac{\pi}{36}; -\frac{5\pi}{10}; \frac{3\pi}{18}.$	$-117^\circ;\ 814^\circ;\ -14^\circ.$
9.	$65^\circ; 300^\circ;\ 9000^\circ.$	$\frac{7\pi}{6}; -\frac{3\pi}{4}; -\frac{5\pi}{12}.$	$-113^\circ;\ 800^\circ;\ -15^\circ.$
10.	$70^\circ; 135^\circ;\ 9100^\circ.$	$4\pi; \frac{5\pi}{8}; \frac{25\pi}{4}.$	$-101^\circ;\ 902^\circ;\ -16^\circ.$

Практическая работа №38:

Нахождение значений синуса и косинуса, тангенса и котангенса

Цель: закрепить навыки нахождения значений синуса и косинуса, тангенса и котангенса

Рассмотрим первую четверть координатной плоскости с дугой единичной окружности. Возьмем произвольную точку на дуге M(t). Найдем абсциссу и ординату точки M(t)=M(x; y).



Косинусом числа t называют абсциссу точки t и обозначают cos t.

Синусом числа t называют ординату точки t и обозначают sin t.

если M(t)=M(x; y), то x = cos t, y = sin t.

Рис. 1

Задание 1. По рисунку 1 с помощью изображенной линейки определить приближенно значения cos t =__ , sin t = __ . Результат запишите в тетради.

Это же проделайте по рисунку 2 для точек M_1, M_2, M_3, M_4.

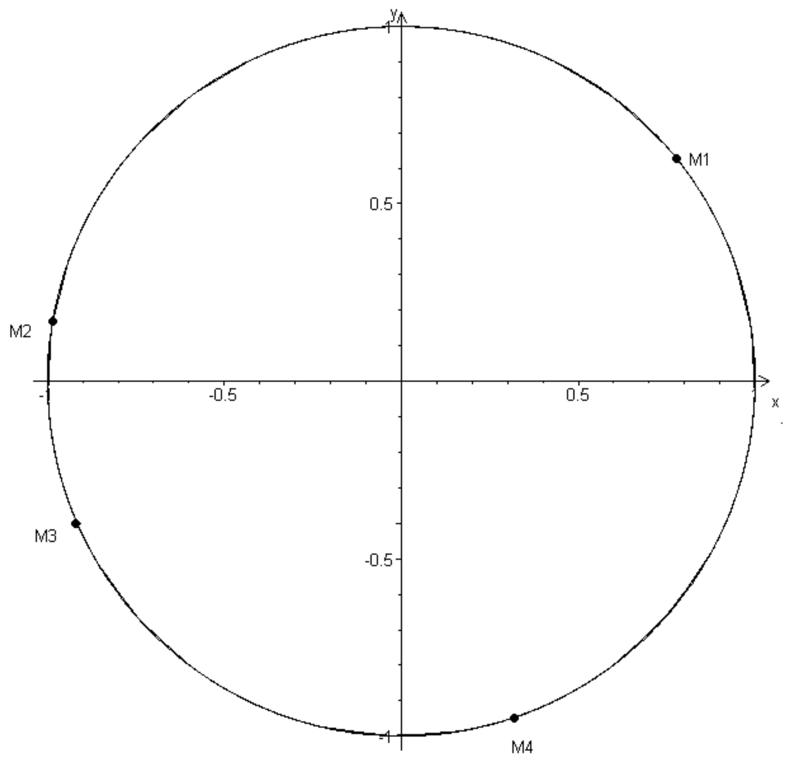


Рис. 2

Задание 2. По рисунку 3 определите чему равны (1вариант -нечетная нумерация, 2й-чётная) $\sin\dfrac{\pi}{4}$, $\cos\dfrac{\pi}{4}$, $\cos\dfrac{\pi}{6}$, $\sin\dfrac{\pi}{3}$, $\cos\dfrac{\pi}{2}$, $\sin 0$, $\sin 1$, $\cos 0$, $\cos 1$.

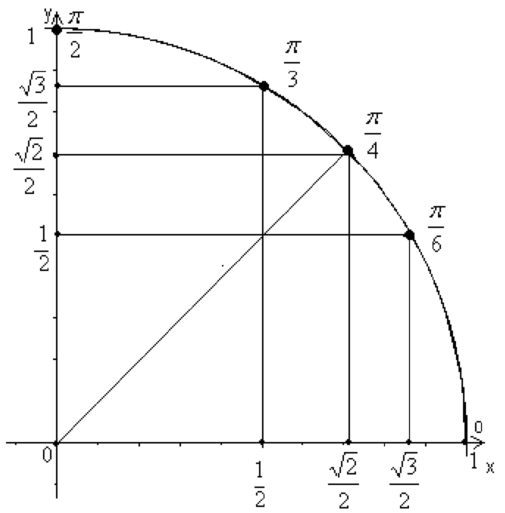


Рис. 3

Справка. Начало учению о тригонометрических величинах было положено в Индии, начиная с IV – VI вв. Индийские ученые впервые в науке стали употреблять линию синуса как половину хорды, и составили первые тригонометрические таблицы синусов (полухорд).

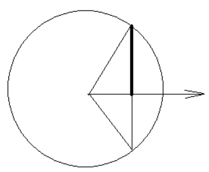


Рис. 4

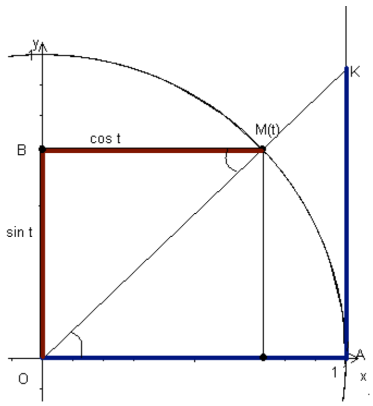
По примеру индийских математиков рассмотрите на рисунке 4 лук с натянутой стрелой. Греческое слово *хорде,* от которого происходит термин «хорда», буквально означает «тетива лука», «струна». Индийские ученые впервые предложили рассматривать величину полухорды, которую назвали *джива*. Арабские математики, которые позже (начиная с VIII в.) осваивали накопленные математические знания, писали слово *джива* в арабской транскрипции как *джайб*, которое дословно означает «пазуха». Вместе с военными завоеваниями арабов слово «пазуха» для обозначения полухорды в тригонометрии попало в Европу (X – XI вв.), где европейские ученые перевели его на латынь как «синус». Этот термин сохранился до настоящего времени, но он применяется не только в математике: сейчас в медицине заболевание пазух носа называют синуситом. Слово «косинус» – это сокращение латинского выражения complementy sinus, т. е. «дополнительный синус» или, иначе, «синус дополнительной дуги» ведь в тригонометрии действительно равенство $\cos t = \sin(\dfrac{\pi}{2} - t)$.

Задание 3. Тест (запишите в тетрадях ответы в виде 1а, 2а,…)

Вычислите и укажите ответ		а	б	в	г	д	е	ж	з
		0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	2	3
1в	$\sin^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{3}$								
2в	$\sin^2\frac{\pi}{4}+\cos^2\frac{\pi}{4}$								
1в	$\sin^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{\pi}{3}$								
2в	$2\cdot\sin^2\frac{\pi}{2}+\cos^2 0$								

Задание 4. На окружности дана точка M(t). Известны синус и косинус этой точки. К окружности через точку А провели касательную, которая перпендикулярна Ох (рис. 5). Вырази АК через sint и cost (использовать подобие треугольников).

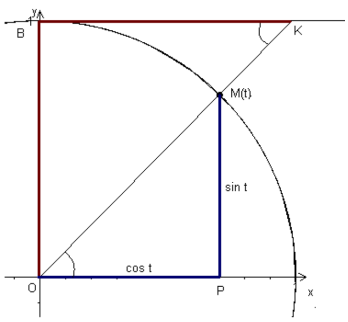
Рис. 5



Тангенсом числа t называют число, соответствующее длине отрезка правой касательной, заключенного между Ох и лучом ОМ и обозначают tg t.

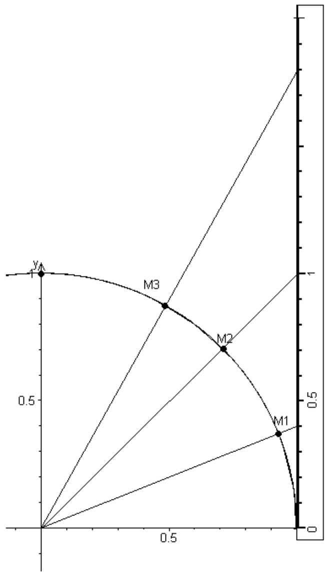
Какой вывод ты можешь сделать из задания 4 и определения тангенса?

Задание 5. На окружности дана точка M(t). Известны синус и косинус этой точки. К окружности через точку В провели касательную, которая перпендикулярна Оу (рис. 6). Вырази ВК через sint и cost. Рис 6



Котангенсом числа t называют число, соответствующее длине отрезка верхней касательной, заключенного между Оу и лучом ОМ и обозначают ctg t.

Какой вывод ты можешь сделать из задания 5 и определения котангенса?

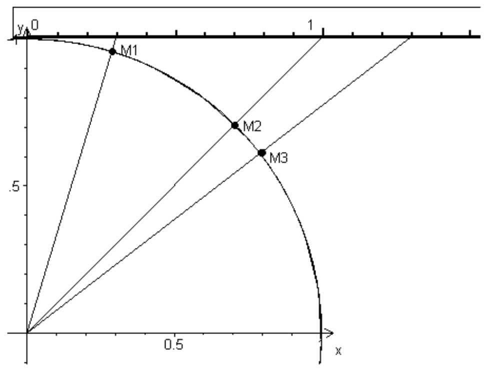


Справка. Понятия «тангенс» и «котангенс», как и первые таблицы значений этих новых тригонометрических величин, родились не из рассмотрения тригонометрической окружности, а из учения о солнечных часах – гномоники. Термин tangens (от лат. касающийся [отрезок касательной]) был введен только в 1583 г. датским математиком Томасом Финком.

Задание 6. Определите число.

	1 вариант		2 вариант
1	tg 0 = __,	1	tg M_3 =__,
2	tg M_1 =__,	2	tg $\frac{\pi}{2}$ = ___.

Как изменяется значение тангенса числа, при увеличении числа?



Задание 7. Определите число

	1 вариант		2 вариант
1	ctg $\frac{\pi}{2}$ = __,		ctg M_3 =__,
2	ctg M_1 =__		ctg 0 = __

Как изменяется значение котангенса числа, при увеличении числа?

Задание 8. Изобразите в тетради целиком единичную окружность, расположенной на координатной плоскости

	1 вариант		2 вариант
1	определите числа на этой окружности, синус которых равен $\frac{1}{2}$;	1	определите числа на этой окружности, косинус которых равен $-\frac{1}{2}$;
2	определите числа на этой окружности,	2	определите числа на этой окружности,

	тангенс которых равен $\frac{1}{2}$;		котангенс которых равен $-\frac{1}{2}$;

Практическая работа №39:
Числовой аргумент тригонометрических функций

- **Цель:** закрепление ключевых понятий:

  синуса, косинуса, тангенса и котангенса числового аргумента;

  знаки функций в четвертях; основные свойства каждой функции (четность/нечетность, периодичность);

- Выработка практических навыков:

  в преобразовании тригонометрических выражений с применением теорем сложения и следствий из них;

Теоретическая часть:

1. $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ - основное тригонометрическое тождество
2. $tg\,t = \frac{\sin t}{\cos t}$
3. $ctg\,t = \frac{\cos t}{\sin t}$
4. $tg\,t \cdot ctg t = 1$
5. $1 + ctg^2 t = \frac{1}{\sin^2 t}$
6. $tg^2 t + 1 = \frac{1}{\cos^2 t}$

Дано \ Найти	*sin t*	*cos t*	*tg t*	*ctg t*
sin t		$\pm\sqrt{1-\sin^2 t}$	$\frac{\sin t}{\pm\sqrt{1-\sin^2 t}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t}$
cos t	$\pm\sqrt{1-\cos^2 t}$		$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 t}}{\cos t}$	$\frac{\cos t}{\pm\sqrt{1-\cos^2 t}}$
tg t	$\pm\sqrt{1-\frac{1}{tg^2 t+1}}$	$\pm\sqrt{\frac{1}{tg^2 t+1}}$		$\frac{1}{tg\,t}$
ctg t	$\pm\sqrt{\frac{1}{ctg^2 t+1}}$	$\pm\sqrt{1-\frac{1}{ctg^2 t+1}}$	$\frac{1}{ctg\,t}$	

Образцы решения задач:

1. Найти $\sin\alpha - ?$, *если* $\cos\alpha = \frac{1}{7}$; $\alpha - IV$ *чет*

решение:

$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$, *т.к.* α – IV, $\sin\alpha$ - IV, знак отрицательный, ттогд

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\left(\frac{1}{7}\right)^2} = -\sqrt{1-\frac{1}{49}} = -\sqrt{\frac{49}{49}-\frac{1}{49}} = -\sqrt{\frac{48}{49}} = -\sqrt{\frac{16\cdot 3}{49}} = -\frac{4\sqrt{3}}{7}$$

Ответ: $\sin\alpha = -\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

3. Найти $tg\alpha - ?$, *если* $\mathrm{ctg}\alpha = -\frac{2}{3}$; $\alpha - II$ *чет*

Решение:

$$tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha}$$

$$tg\alpha = \frac{1}{-\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2} = -1\frac{1}{2}$$

Ответ: $tg\alpha = -1\frac{1}{2}$.

4. Найти: $ctg\alpha - ?$, *если* $\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{5}$; $\alpha - II$ *чет*

Решение:

$$ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$$

$$ctg\alpha = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$$

Ответ: $ctg\alpha = 5$

5. Упростить выражение:

а) $\frac{1}{\cos^2\alpha} - tg^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 + tg^2\alpha - tg^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$.

б) $1 - \cos^2\alpha + tg^2\alpha\cdot\cos^2\alpha = \sin^2\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\cos^2\alpha = \sin^2\alpha + \sin^2\alpha = 2\sin^2\alpha$

Найти: Упростить Найти;

1.	$\sin\alpha - ?,\ \textit{если}\ \cos\alpha = \frac{2}{3};\ \alpha - II\ \textit{чет}$	$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + tg^2\alpha =$	$tg\alpha - ?,\ \textit{если}\ \mathrm{ctg}\alpha = -\frac{1}{3};\ \alpha - II\ ч$
2.	$\cos\alpha - ?,\ \textit{если}\ \sin\alpha = \frac{2}{5};\ \alpha - I\ \textit{чет}$	$\frac{1}{\sin^2\alpha} - ctg^2\alpha =$	$ctg\alpha - ?,\ \textit{если}\ \mathrm{tg}\alpha = 2;\ \alpha - II\ че$
3.	$\sin\alpha - ?,\ \textit{если}\ \cos\alpha = \frac{2}{7};\ \alpha - III\ \textit{чет}$	$tg\alpha \cdot \cos\alpha + \sin\alpha =$	$tg\alpha - ?,\ \textit{если}\ \mathrm{ctg}\alpha = -5;\ \alpha - II\ ч$
4.	$\sin\alpha - ?,\ \textit{если}\ \cos\alpha = -\frac{6}{7};\ \alpha - IV\ \textit{чет}$	$ctg^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha =$	$ctg\alpha - ?,\ \textit{если}\ \mathrm{tg}\alpha = -3;\ \alpha - II\ ч$
5.	$\cos\alpha - ?,\ \textit{если}\ \sin\alpha = \frac{1}{5};\ \alpha - II\ \textit{чет}$	$ctg\alpha \cdot \sin\alpha - \cos\alpha =$	$tg\alpha - ?,\ \textit{если}\ \mathrm{ctg}\alpha = \frac{2}{3};\ \alpha - II\ ч$
6.	$\sin\alpha - ?,\ \textit{если}\ \cos\alpha = \frac{1}{6};\ \alpha - III\ \textit{чет}$	$\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 =$	$ctg\alpha - ?,\ \textit{если}\ \mathrm{tg}\alpha = \frac{2}{5};\ \alpha - II\ ч$
7.	$\cos\alpha - ?,\ \textit{если}\ \sin\alpha = -\frac{3}{4};\ \alpha - IV\ \textit{чет}$	$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 1 =$	$tg\alpha - ?,\ \textit{если}\ \mathrm{ctg}\alpha = 3;\ \alpha - II\ че$
8.	$\sin\alpha - ?,\ \textit{если}\ \cos\alpha = \frac{2}{3};\ \alpha - II\ \textit{чет}$	$ctg\alpha \cdot \sin\alpha + \cos\alpha =$	$ctg\alpha - ?,\ \textit{если}\ \mathrm{tg}\alpha = -2;\ \alpha - II\ ч$
9.	$\cos\alpha - ?,\ \textit{если}\ \sin\alpha = \frac{3}{7};\ \alpha - II\ \textit{чет}$	$\frac{1}{\cos^2\alpha} - tg^2\alpha =$	$tg\alpha - ?,\ \textit{если}\ \mathrm{ctg}\alpha = 5;\ \alpha - II\ че$
10.	$\sin\alpha - ?,\ \textit{если}\ \cos\alpha = \frac{4}{7};\ \alpha - III\ \textit{чет}$	$tg\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha =$	$ctg\alpha - ?,\ \textit{если}\ \mathrm{tg}\alpha = \frac{3}{7};\ \alpha - II\ ч$

Практическая работа №40:

Тригонометрические функции углового аргумента

Цель: вспомнить определения тригонометрических функций углового аргумента, основные правила нахождения неизвестных элементов прямоугольного треугольника с использованием тригонометрических функций, использовали их при решении конкретных геометрических задач.

Теоретическая часть: Задача

Наблюдателю нужно измерить высоту дерева, не залезая на него (рис. 1).

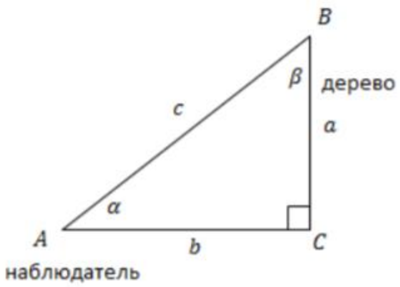


Рис. 1

Наблюдатель может измерить угол α и расстояние до подножия дерева ($AC = b$).

Этих данных достаточно, чтобы определить все неизвестные величины.

Вспомним, что тригонометрические функции в прямоугольном треугольнике – это **отношения сторон** треугольника:

$$sin\alpha = \frac{a}{c};\ \ cos\alpha = \frac{b}{c};\ \ tg\alpha = \frac{a}{b};\ \ ctg\alpha = \frac{b}{a};$$

$$a = c \cdot sin\alpha = c \cdot cos\beta;$$

$$a = b \cdot tg\alpha = b \cdot ctg\beta.$$

Задача 1. В прямоугольном треугольнике известна гипотенуза c и острый угол α. Найти катеты, площадь треугольника и радиус описанной окружности, если $c = 12,\ \alpha = 60^\circ$.

Решение: Дано: Задан ΔABC

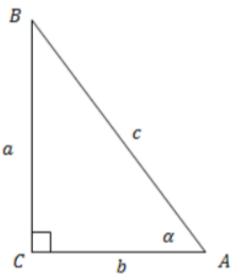


Рис. 2

Мы можем вычислить любой элемент треугольника:

$$a = c \cdot sin\alpha;$$

$$a = 12 \cdot sin60^\circ = 6\sqrt{3};$$

$$b = c \cdot cos\alpha;$$

$$b = c \cdot cos60^\circ = 6;$$

$$S = \frac{1}{2}a \cdot b = 18\sqrt{3};$$

Если мы забыли формулу радиуса описанной окружности, можно достроить треугольник до прямоугольника, описать окружность и сразу станет ясно, что центр описанной окружности находится в середине гипотенузы и радиус описанной окружности равен половине гипотенузы (рис. 3).

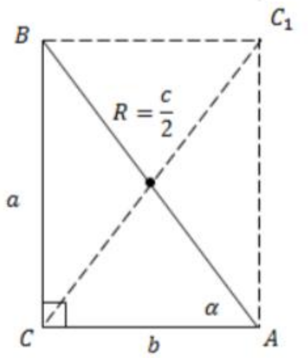


Рис. 3

$R = \frac{1}{2} \cdot c = 6.$

Ответ: $a = 6\sqrt{3}$; $b = 6$; $S = 18\sqrt{3}$; $R = 6.$

Задача 2. Хорда AC окружности образует с диаметром AB угол α. Найдите длину хорды AC, если радиус окружности равен R.

Дано: $AB = 2R;$

Ð$BAC = \alpha.$

Найти: $AC.$

Решение:

Рассмотрим $\Delta ABC.$ ÐACB опирается на диаметр, значит он прямой (по теореме о вписанном угле). Ð$ACB = 90°$ (рис. 4).

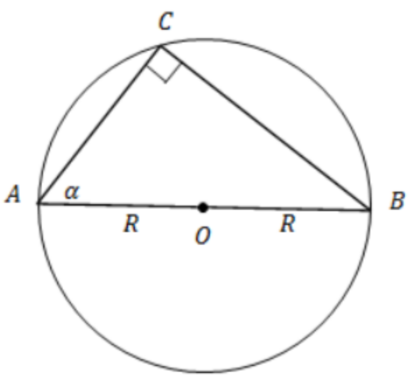


Рис. 4

Имеем прямоугольный треугольник с известным углом α и известной гипотенузой.

$AC = AB \cdot cos\alpha = 2Rcos\alpha.$

Ответ: $AC = 2Rcos\alpha.$

Задача 3. Докажите, что площадь выпуклого четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

Дано: $ABCD -$ выпуклый четырёхугольник.

Доказать: $S = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot sin\alpha.$

Доказательство:

Вспомним, что такое выпуклый четырехугольник. Это четырёхугольник, который лежит в одной полуплоскости относительно каждой прямой, содержащей его сторону (рис. 5).

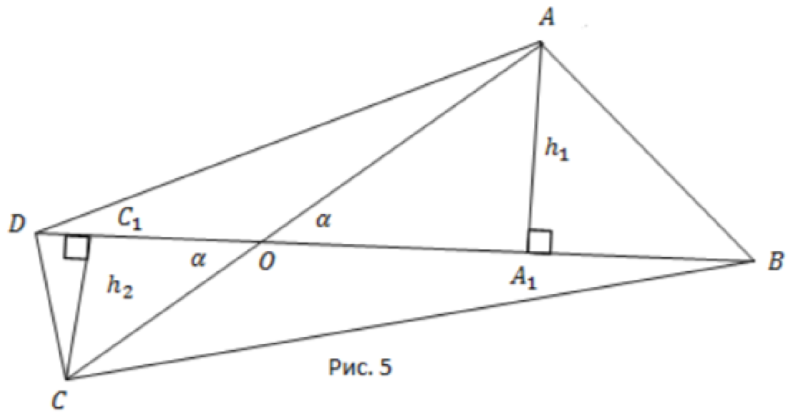


Рис. 5

$ABCD$ – выпуклый четырёхугольник; AC, BD –его диагонали; AA_1 – высота в ΔABD; CC_1 – высота в ΔBCD.

$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{CBD}$;

$S_{ABD} = \frac{1}{2}BD \cdot h_1$; $S_{CBD} = \frac{1}{2}BD \cdot h_2$.

Вычислим h_1 и h_2 через α.

ΔAA_1O: $h_1 = AO \cdot sin\alpha$;

ΔCC_1O: $h_2 = CO \cdot sin\alpha$;

$$S = \frac{1}{2}BD \cdot (h_1 + h_2) = \frac{1}{2}BD \cdot (AO + CO)sin\alpha = \frac{1}{2}BD \cdot AC \cdot sin\alpha.$$

Тождество доказано.

Задача 4. Для угла $\alpha = 90°$ вычислить $sin\alpha, cos\alpha, tg\alpha, ctg\alpha$.

Решение:

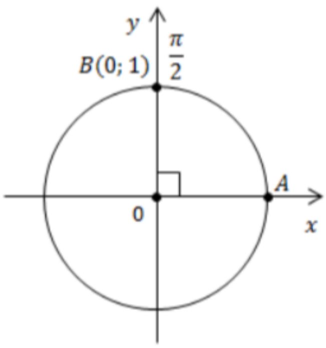


Рис. 7

$\overset{\frown}{AB} = \frac{\pi}{2}$; $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$.

$cos90° = 0$;

$sin90° = 1$;

$tg90°$ – не существует;

$ctg90° = 0$.

Задача 5. Расположите в порядке возрастания числа
$sin 40°;\ sin 80°;\ sin 120°;\ sin 160°.$

Решение:

Решим данную задачу с помощью числовой окружности путем сравнения с эталонными углами (рис. 8).

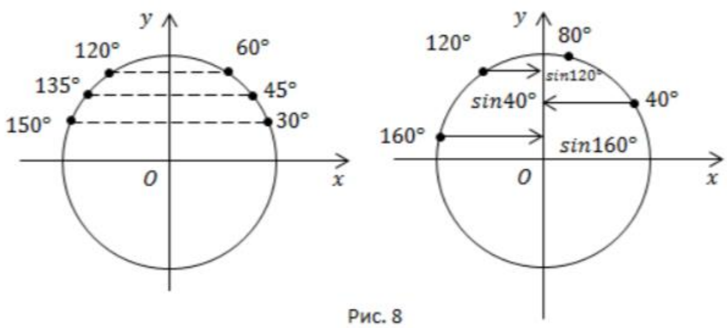


Рис. 8

Ответ: $sin 160° < sin 40° < sin 120° < sin 80°.$

1 вариант

1. Определите знак числа:
   1) sin 285° 2) cos (- 16°) 3) tg 119° 4) sin $\frac{9\pi}{8}$ 5) cos $\frac{7\pi}{15}$ 6) tg (- $\frac{11\pi}{6}$)
2. Вычислите:
   1) cos t, tg t, ctg t, если sin t = - $\frac{7}{25}$, $\pi \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$
   2) cos t, sin t, ctg t, если tg t = - $\frac{7}{24}$, $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$

2 вариант

1. Определите знак числа:
1) sin 275° 2) cos (- 76°) 3) tg 139° 4) sin $\frac{8\pi}{9}$ 5) cos $\frac{11\pi}{12}$ 6) ctg (- $\frac{13\pi}{6}$)
2. Вычислите:
1) cos t, tg t, ctg t, если sin t = - $\frac{24}{25}$, $\pi \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$
2) cos t, sin t, tg t, если ctg t = $\frac{5}{12}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

Практическая работа №41: Основные тригонометрические тождества. Решение задач на основные тригонометрические тождества.

Цель работы: Отработать и закрепить навыки применения основных тригонометрических тождеств

Общие сведения и примеры выполнения заданий:

При выполнении заданий по данной теме нужно помнить:

Основные тригонометрические тождества	Четность, нечетность тригонометрических функций
1) $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ 2) $tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$ 3) $ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$ 4) $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$ 5) $\frac{1}{cos^2\alpha} = tg^2\alpha + 1$ 6) $\frac{1}{sin^2\alpha} = ctg^2\alpha + 1$	$sin(-\alpha) = -sin\,\alpha$ $cos(-\alpha) = cos\,\alpha$ $tg(-\alpha) = -tg\,\alpha$ $ctg(-\alpha) = -ctg\,\alpha$

Знаки тригонометрических функций по четвертям

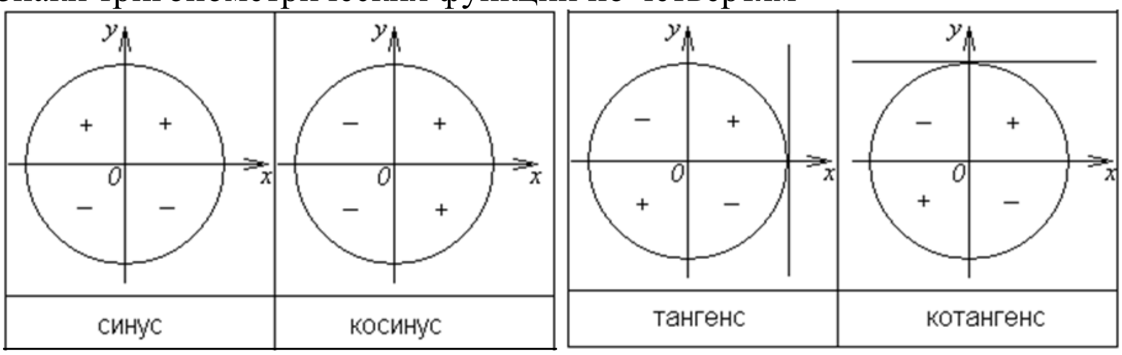


Таблица значений тригонометрических функций, некоторых углов.

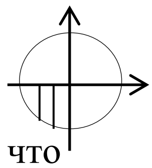
Угол в градусах	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Угол в радианах	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	**1**	**0**	-1	**0**
$\cos\alpha$	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	**0**	-1	**0**	**1**
$tg\alpha$	**0**	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	**1**	$\sqrt{3}$	**не сущ.**	**0**	**не сущ.**	**0**
$ctg\alpha$	**не сущ.**	$\sqrt{3}$	**1**	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	**0**	**не сущ.**	**0**	**не сущ.**

Рассмотрим примеры выполнения заданий.

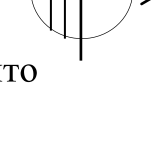
1. Упростите $(sin\,\alpha + cos\,\alpha)^2 + (sin\,\alpha - cos\,\alpha)^2 =$ $= sin^2\alpha + 2\,sin\,\alpha \cdot cos\,\alpha + cos^2\alpha +$ $+sin^2\alpha - 2\,sin\,\alpha \cdot cos\,\alpha + cos^2\alpha =$ $= 2sin^2\alpha + 2cos^2\alpha = 2(sin^2\alpha + cos^2\alpha) =$ $= 2 \cdot 1 = 2$	Применяемые правила $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

b) Найти неизвестные из тригонометрических функций:

$sin\,\alpha\,, cos\alpha, tg\,\alpha\,, ctg\,\alpha$, если $sin\,\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Дано: $sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2};$ $\alpha \in \left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$ Найти: $cos\alpha,$ $tg\,\alpha\,, ctg\,\alpha.$	Решение:  Из формулы : $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$, выразим $cos\alpha$, учитывая, что $\alpha \in$ III четверти=> $cos\alpha < 0$, => $cos\alpha = -\sqrt{1 - sin^2\alpha},$ $cos\alpha = -\sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{3}{4}} = -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2},$ Формуле (2): $tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$ $tg\alpha = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1} = \sqrt{3},$ Т.к. $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$, то $ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha},$ $ctg\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ Ответ: $cos\alpha = -\frac{1}{2}, tg\alpha = \sqrt{3}, ctg\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

2.Дано $tg\alpha = \frac{1}{2}$. Какое значение имеют остальные тригонометрические функции этого угла. В ответе дроби не сокращайте.

Дано: $tg\alpha = \dfrac{1}{2};$ $\alpha \in \left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$ Найти: $sin\,\alpha\,, cos\alpha,$ $ctg\,\alpha.$	Решение:  Из формулы : $\frac{1}{cos^2\alpha} = tg^2\alpha + 1$, выразим $cos\alpha$, учитывая, что $\alpha \in$ III четверти=> $cos\alpha < 0$, => $\frac{1}{cos^2\alpha} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1, <=> \frac{1}{cos^2\alpha} = \frac{5}{4}$, решим пропорцию

	$cos^2\alpha = \frac{4}{5}, => cos\alpha = -\sqrt{\frac{4}{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ По формуле (1): $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$, выразим $sin\,\alpha$, учитывая, что $\alpha \in$ III четверти=> $sin\,\alpha < 0, =>$ $sin\,\alpha = -\sqrt{1-\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = -\sqrt{1-\frac{4}{5}} = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ Т.к. $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$, то $ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$, $ctg\alpha = 2$ Ответ: $cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}, sin\,\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}, ctg\alpha = 2$.

3. Доказательство тригонометрических тождеств

При доказательстве любых тождеств, и в частности тригонометрических, обычно используют следующие способы:

1) выражение, стоящее и одной части равенства, с помощью тождественных преобразований приводят к выражению, стоящему в другой части равенства;
2) выражения, стоящие в левой и правой частях тождества, с помощью тождественных преобразований приводят к одному и тому же виду;
3) доказывают, что разность между левой и правой частями данного тождества равна нулю.

Рассмотрим пример:

Доказать тождество: $sin^4\alpha - cos^4\alpha = sin^2\alpha - cos^2\alpha$.

Используя формулу для разности квадратов двух чисел, получаем:

$$sin^4\alpha - cos^4\alpha = (sin^2\alpha + cos^2\alpha)\,(sin^2\alpha - cos^2\alpha).$$

Но $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$. Поэтому

$$sin^4\alpha - cos^4\alpha = sin^2\alpha - cos^2\alpha,$$ что и требовалось доказать.

Контрольные вопросы:

1. Значения тригонометрических функций основных углов.
2. Знаки тригонометрических функций по четвертям.
3. Свойства тригонометрических функций.
4. Перечислите свойства, основные тригонометрические тождества.
5. Формулы сокращенного умножения.

Задания для самостоятельной подготовки к практическому занятию:

Задание 1

a) Упростите выражение;

b) Найти неизвестные из тригонометрических функций:

$sin\,\alpha\,, cos\alpha, tg\,\alpha\,, ctg\,\alpha$

1 вариант	$a)1 - sin^2\alpha - cos^2\alpha$ $b)$ Если $sin\,\alpha = \frac{\sqrt{19}}{10}, 0 < \alpha < 90°$
2 вариант	$a)\frac{1 - sin^2\alpha}{ctg\,\alpha}$ $b)$ Если $cos\,\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, 0 < \alpha < 90°$

Задание 2

Дан тангенс (котангенс) угла. Какое значение имеют остальные тригонометрические функции этого угла. В ответе дроби не сокращайте.

1 вариант	$tg\alpha = \frac{20}{21}, a \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$
2 вариант	$ctg\alpha = -\frac{6}{8}, a \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

Задание 3

Докажите, что равенство, является тождеством

1 вариант	$sin^4\alpha + cos^4\alpha - 1 == -2sin^2\alpha \cdot cos^2\alpha$
2 вариант	$\frac{1 - sin\alpha}{cos\alpha} = \frac{cos\alpha}{1 + sin\alpha}$

Практическая работа №42: Формулы приведения. Решение задач на формулы приведения

Цель: закрепление знаний, отработка навыков работы с формулами приведения.

Формулами приведения называются формулы, позволяющие тригонометрические функции углов $0 \pm \alpha$; $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$; $\pi \pm \alpha$; $\frac{3}{2}\pi \pm \alpha$ и $2\pi \pm \alpha$ выражать через тригонометрические функции угла α .

Мнемонические правила:

1. Если угол α отсчитывается от концов горизонтального диаметра *0; ± π;± 2π*, то наименование функции не меняется; если угол α отсчитывается от концов вертикального диаметра $\pm\frac{\pi}{2}$; $\pm\frac{3}{2}\pi$, то наименование функции меняется на кофункцию (sin на cos, cos на sin, tg на ctg и ctg на tg).

2. Знак правой части определяется по знаку приводимой функции, стоящей слева.

При решении примеров применяются мнемонические правила формул приведения, свойства четности и нечетности и периодичности тригонометрических функций.

Свойства четности и нечетности: $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$; $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$; $tg(-\alpha)=-tg\alpha$; $ctg(-\alpha)=-ctg\alpha$.

Свойства периодичности: $\cos(\alpha+2\pi\kappa)=\cos\alpha$; $\sin(\alpha+2\pi\kappa)=\sin\alpha$; $tg(\alpha+\pi\kappa)=tg\alpha$; $ctg(\alpha+\pi\kappa)=ctg\alpha$, где $\kappa\in$Z.

Значения тригонометрических функций основных углов

Угол / Функция	0^o 0	30^o $\frac{\pi}{6}$	45^o $\frac{\pi}{4}$	60^o $\frac{\pi}{3}$	90^o $\frac{\pi}{2}$	120^o $\frac{2\pi}{3}$	135^o $\frac{3\pi}{4}$	150^o $\frac{5\pi}{6}$	180^o π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$tg\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$ctg\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	–

Таблица №1. Формулы приведения

Функ-ция	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$
sin	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
cos	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
tg	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$
ctg	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$
sec	$cosec\,\alpha$	$-cosec\,\alpha$	$-sec\,\alpha$	$-sec\,\alpha$	$-cosec\,\alpha$	$cosec\,\alpha$	$sec\,\alpha$
cosec	$sec\,\alpha$	$sec\,\alpha$	$cosec\,\alpha$	$-cosec\,\alpha$	$-sec\,\alpha$	$-sec\,\alpha$	$-cosec\,\alpha$

Пример 1. Вычислите $\cos 840^0$.

Решение: применяя свойство периодичности и формулы приведения, получим:

$$\cos 840^0=\cos\left(360^\circ\cdot 2+120^\circ\right)=\cos 120^\circ=\cos\left(180^\circ-60^\circ\right)=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}.$$

Пример 2. Вычислите $\sin\left(-\frac{19}{6}\pi\right)$.

Решение: воспользуемся свойством нечетности, периодичности и формулами приведения, получим:

$$\sin\left(-\frac{19}{6}\pi\right)=-\sin\frac{19}{6}\pi=-\sin 3\frac{1}{6}\pi=-\sin\left(2\pi+\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}.$$

Пример 3. Вычислите $ctg\frac{23\pi}{6}-\sqrt{3}\cos\frac{22}{3}\pi;$

Решение:

$$ctg\frac{23\pi}{6}-\sqrt{3}\cos\frac{22}{3}\pi=ctg\left(\frac{24\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}\cos\left(\frac{24\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)=$$

$$ctg\left(4\pi-\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}\cos\left(8\pi-\frac{2\pi}{3}\right)=ctg\left(-\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=$$

$$-ctg\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}\cos\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}-\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Пример 4. Докажите тождество $\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cdot ctg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{ctg\left(\beta-\frac{3}{2}\pi\right)\cdot tg\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)}=\sin\alpha.$

Решение:

$$\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cdot ctg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{ctg\left(\beta-\frac{3}{2}\pi\right)\cdot tg\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)}=\left[\begin{array}{l} ctg\left(\beta-\frac{3}{2}\pi\right)=-ctg\left(\frac{3}{2}\pi-\beta\right)=-tg\beta \\ tg\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)=-tg\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=-ctg\beta \\ \sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha \\ ctg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-tg\alpha \end{array}\right]=\frac{-\cos\alpha\cdot(-tg\alpha)}{-tg\beta\cdot(-ctg\beta)}=\frac{\cos\alpha\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{tg\beta\cdot ctg\beta}=\frac{\sin\alpha}{1}=$$

$=\sin\alpha.$

$\sin\alpha=\sin\alpha$.

Пример 5.

Упростите выражение: а) $\dfrac{tg(180^0-\alpha)\cos(180^0-\alpha)tg(90^0-\alpha)}{\sin(90^0+\alpha)ctg(90^0+\alpha)tg(90^0+\alpha)};$

б) $\dfrac{\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)\right)^2-1}{tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin(\pi+\alpha)\cdot\cos(\pi-\alpha)}.$

Решение: а) используя формулы приведения, получим

$$\frac{tg(180^0-\alpha)\cos(180^0-\alpha)tg(90^0-\alpha)}{\sin(90^0+\alpha)ctg(90^0+\alpha)tg(90^0+\alpha)}=\frac{(-tg\alpha)(-\cos\alpha)ctg\alpha}{\cos\alpha(-tg\alpha)(-ctg\alpha)}=1.$$

б)

$$\frac{\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)\right)^2-1}{tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin(\pi+\alpha)\cdot\cos(\pi-\alpha)}=\frac{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2-1}{ctg\alpha-(-\sin\alpha)\cdot(-\cos\alpha)}=\frac{\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cdot\sin\alpha+\sin^2\alpha-1}{ctg\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$$

$$=\frac{2\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{2\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{\frac{\cos\alpha-\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{2\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{\frac{\cos\alpha(1-\sin^2\alpha)}{\sin\alpha}}=\frac{2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=2tg^2\alpha$$

Задания для самостоятельного решения

№1. Упростите выражение. №2. Вычислите. №3.Докажите тождество.

В-т	*Задания*	
1	№1	$\sin(\alpha-\frac{3\pi}{2})\cdot\cos(\pi-\alpha)+\sin(\alpha-\pi)\cdot\sin(\pi+\alpha)$
	№2	$4cos\left(-\frac{8\pi}{3}\right)\cdot ctg\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\cdot\sin\frac{3\pi}{2}$
	№3	$\sin(\alpha-\pi)+tg(\alpha-\pi)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=tg\alpha$
2	№1	$\dfrac{\sin(\alpha-\pi)+\cos(\alpha-\frac{3\pi}{2})}{ctg(\alpha-\frac{\pi}{2})-tg(\pi+\alpha)}$
	№2	$2cos\left(-\frac{17}{6}\pi\right)\cdot ctg\frac{35\pi}{6}\cdot\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$
	№3	$\dfrac{\cos\alpha\cdot tg(3\pi+\alpha)\cdot tg\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=1$
3	№1	$\dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)+\cos(12\pi-\alpha)\cdot\cos(\frac{3\pi}{2}+\beta)}{\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)+\sin(3\pi-\alpha)\sin(4\pi+\beta)}$
	№2	$5tg^3\left(-\frac{10}{3}\pi\right)+ctg\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$

	№3	$tg(5\pi-\alpha)\cdot tg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)+\sin(\alpha-2\pi)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=1$
4	№1	$\dfrac{\cos(\alpha-\pi)\cdot ctg(\alpha+\frac{\pi}{2})\cdot\sin(4\pi-\alpha)}{\sin(7\pi+\alpha)\cdot ctg(\frac{3\pi}{2}-\alpha)}$
	№2	$5cos^2\left(-\frac{9}{4}\pi\right)-3\sin^2\left(-\frac{7}{4}\pi\right)-2tg^2\left(-\frac{13\pi}{4}\right)$
	№3	$\dfrac{\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)\right)^2-1}{tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin(\pi+\alpha)\cdot\cos(\pi-\alpha)}=2tg^2\alpha$
5	№1	$\dfrac{1-cos(\frac{3\pi}{2}-\beta)+\cos(6\pi-\beta)}{1+\sin(8\pi+\beta)-\sin(\frac{3\pi}{2}+\beta)}$
	№2	$\sin^3\left(-\frac{9\pi}{4}\right)+\cos^2\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$
	№3	$\cos\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)\cdot tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+ctg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=tg\alpha$
6	№1	$\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\alpha-12\pi)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\beta\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)-\sin(3\pi-\alpha)\cdot\sin(-\beta-4\pi)}$
	№2	$2\sin^3\left(-\frac{16\pi}{6}\right)+5\cos^2\left(-\frac{19}{3}\pi\right)$
	№3	$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)+\sin(\alpha-\pi)-tg\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)-tg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=0$
7	№1	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\cos(2\pi+\alpha)-\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin(3\pi-\alpha)$
	№2	$4\cos^4\left(-\frac{13}{4}\pi\right)-2\cos\left(-\frac{7}{3}\pi\right)+3\sin^3\left(-\frac{\pi}{6}\right)$
	№3	$\left(\sin\alpha+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)^2+\left(\cos\alpha-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)^2=2$
8	№1	$\dfrac{\sin(2\pi-\alpha)\cdot tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot ctg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(2\pi+\alpha)\cdot tg(\pi+\alpha)}$

	№2	$\frac{1}{3}\sin^3\left(-\frac{9}{4}\pi\right)-2tg^3\left(-\frac{7}{4}\pi\right)+3\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)$
	№3	$\frac{\sin(2\pi-\alpha)\cdot tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot ctg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(2\pi+\alpha)\cdot tg(\pi+\alpha)}=1$
9	№1	$\frac{tg\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)-ctg(\pi-\alpha)+\cos\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}{\sin(\pi-\alpha)}$
	№2	$5cos^2\left(-\frac{9}{4}\pi\right)-3\sin^2\left(-\frac{7}{4}\pi\right)-2tg^2\left(-\frac{13\pi}{4}\right)$
	№3	$\frac{ctg\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left[\sin\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)-\sin(\pi+\alpha)\right]}{tg(\pi+\alpha)\cdot[\cos(\alpha+2\pi)+\sin(\alpha-2\pi)]}=-1$
10	№1	$\frac{cos^3\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)\cdot\sin(2\pi-\alpha)}{ctg^3\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$
	№2	$\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)+\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right)+tg\left(-\frac{11\pi}{6}\right)+ctg\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$
	№3	$\frac{tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\cdot\cos(-\alpha)}{ctg(\pi-\alpha)\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=\sin\alpha$
11	№1	$\frac{cos^3\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{ctg^3\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin(2\pi-\alpha)}$
	№2	$\sin^2\left(-330^0\right)-\cos^2\left(-120^0\right)-tg^2\left(-240^0\right)+ctg^2\left(-330^0\right)$
	№3	$\frac{\sin(\pi+\alpha)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}-\frac{tg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{ctg(\pi-\alpha)}+tg(\pi-\alpha)=0$
12	№1	$\frac{cos(\pi-\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin(2\pi-\alpha)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$

	№2	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\cos(\pi-\alpha)+tg(\pi-\alpha)-ctg\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)$
	№3	$\frac{tg(\pi-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{tg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=tg^2\alpha$
13	№1	$\frac{\sin^2(\pi-\alpha)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi-\alpha)}\cdot tg(\pi-\alpha)$
	№2	$\cos(-9\pi)+2\sin\left(-\frac{49\pi}{6}\right)-ctg\left(-\frac{21\pi}{4}\right)$
	№3	$\frac{\sin(\pi-\alpha)}{tg(\pi+\alpha)}\cdot\frac{ctg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}\cdot\frac{\cos(2\pi-\alpha)}{\sin(-\alpha)}=\sin\alpha$
14	№1	$\frac{\sin(\pi+\alpha)\cdot\sin(2\pi+\alpha)}{tg(\pi+\alpha)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$
	№2	$tg1800^0-\sin 495^0+\cos 945^0$
	№3	$\frac{\cos^2(\pi-\alpha)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\pi+\alpha)\cdot\cos(2\pi-\alpha)}{tg^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cdot ctg^2\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=\cos^2\alpha$
15	№1	$\frac{tg(\pi-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{tg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$
	№2	$\frac{\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}{\cos\frac{11\pi}{6}}-\frac{tg\frac{5\pi}{6}\cdot\sin\frac{5\pi}{3}}{\cos\pi}+\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)ctg\frac{2\pi}{3}$
	№3	$\frac{\sin^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)\cdot\cos(2\pi-\alpha)}{tg^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)}=\cos\alpha$

16	№1	$\sin(\pi-\alpha)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\cos(\pi-\alpha)$
	№2	$\sin(-7\pi)+2\cos\frac{31\pi}{3}-tg\frac{7}{4}\pi$
	№3	$\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right)\cdot ctg\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)}{ctg\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right)\cdot tg\left(\beta-\frac{3\pi}{2}\right)}=-\sin\beta$
17	№1	$\frac{\sin(\pi+\alpha)\cdot\sin(\alpha+2\pi)}{tg(\pi+\alpha)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$
	№2	$\frac{\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{ctg^2(\alpha-2\pi)}+\frac{\sin^2(-\alpha)}{ctg^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)}$
	№3	$\frac{\sin(\alpha-\pi)\cdot\sin(2\pi-\alpha)\cdot\cos(\alpha-2\pi)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot ctg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cdot ctg(\pi-\alpha)}=\sin^2\alpha$
18	№1	$\frac{ctg(\pi-\alpha)}{\sin(\pi+\alpha)}\cdot\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{ctg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$
	№2	$\sqrt{2}\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)-6\cos\left(-\frac{22\pi}{3}\right)+2tg\frac{15\pi}{4}-\sqrt{3}ctg\frac{23\pi}{6}$
	№3	$\frac{cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{tg^2(\alpha-2\pi)}+\frac{\cos^2(-\alpha)}{tg^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)}=1$
19	№1	$\frac{\cos(\pi+\alpha)\cdot\cos(2\pi+\alpha)}{ctg(\pi+\alpha)\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$
	№2	$\sin\left(-\frac{13\pi}{6}\right)+\cos\frac{17\pi}{3}+tg\frac{22\pi}{3}-ctg\frac{37\pi}{4}$
	№3	$\frac{\sin(\pi+\alpha)}{ctg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}\cdot\frac{tg(\alpha-\pi)}{ctg(\pi+\alpha)}\cdot\frac{\cos(2\pi-\alpha)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}=\sin\alpha$

20	№1	$\dfrac{\cos^2(\pi-\alpha)+\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi-\alpha)}\cdot ctg(\pi-\alpha)$
	№2	$\sin 9135^0+\cos\left(-585^0\right)+tg1395^0+ctg\left(-630^0\right)$
	№3	$\dfrac{1-ctg^2\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)}{ctg\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)}\cdot\dfrac{tg\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}{1-ctg^2(\alpha-2\pi)}=-1$
21	№1	$\dfrac{\sin(\pi-\alpha)+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(2\pi-\alpha)-\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$
	№2	$\sin\left(-\dfrac{47\pi}{3}\right)-tg\,\dfrac{21\pi}{4}+tg\left(-\dfrac{23\pi}{4}\right)-ctg\,\dfrac{19\pi}{6}$
	№3	$\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)+\sin(\alpha-\pi)-tg\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)-tg\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)=0$
22	№1	$\dfrac{\sin^3\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{tg^3\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot\cos(2\pi-\alpha)}$
	№2	$ctg225^o-ctg675^o-cos495^o+cos765^o$
	№3	$\dfrac{\sin(\pi-\alpha)\cdot ctg\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos(2\pi-\alpha)}{tg(\pi+\alpha)\cdot tg\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\sin(-\alpha)}=\sin\alpha$
23	№1	$\dfrac{\sin^3\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)\cdot\cos(2\pi-\alpha)}{tg^3\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$
	№2	$sin(-810^o)+cos(-900^o)+tg(-395^o)ctg575^o$
	№3	$\sin\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)\cdot\cos(2\pi-\alpha)-\sin(\pi-\alpha)\cdot\sin(\pi+\alpha)=1$

24	№1	$$\frac{\cos(2\pi-\alpha)\cdot ctg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot tg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(2\pi+\alpha)\cdot ctg(\pi+\alpha)}$$
	№2	$\sin 2010^0+4tg(-855^0)+\sqrt{3}\cos(-1590^0)$
	№3	$$\frac{tg\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)-ctg(\pi-\alpha)+\cos\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}{\sin(\pi-\alpha)}=1$$
25	№1	$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(\alpha-12\pi)\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\beta\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)-\cos(3\pi-\alpha)\cdot\cos(-\beta-4\pi)}$$
	№2	$(\sin(90^0-\alpha)+\sin(180^0-\alpha))^2+(\cos(270^0-\alpha)+\cos(360^0-\alpha))^2$
	№3	$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cdot tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+ctg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)-ctg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=0$
26	№1	$$\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)-\cos(5\pi-\alpha)\cdot\cos(\beta+6\pi)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(\alpha+12\pi)\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\beta\right)}$$
	№2	$\sin(\pi+\alpha)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos(2\pi+\alpha)\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$
	№3	$$\frac{\sin(2\pi-\alpha)\cdot tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot ctg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(2\pi+\alpha)\cdot tg(\pi+\alpha)}=1$$
27	№1	$$\frac{\cos^2(2\pi-\alpha)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{tg^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot ctg^2\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$$
	№2	$\sin(90^o-\alpha)+\cos(180^o+\alpha)+tg(270^o+\alpha)+ctg(360^o+\alpha)$
	№3	$\sin(\alpha-2\pi)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)-tg(\pi-\alpha)\cdot tg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=1$
28	№1	$$\frac{\sin^3\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)\cos(2\pi-\alpha)}{tg^3\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cos^3\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)}$$

	№2	$\dfrac{1-ctg^2\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)}{ctg\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)}\cdot\dfrac{tg\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}{1-ctg^2(\alpha-2\pi)}$
	№3	$\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi+\alpha\right)\cdot ctg\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)+ctg\left(\dfrac{3}{2}\pi-\alpha\right)=tg\alpha$
29	№1	$\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)-\cos(\alpha-\pi)+tg\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)+ctg(2\pi+\alpha)$
	№2	$\dfrac{tg\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)-ctg(\pi-\alpha)+\cos\left(\alpha+\dfrac{3\pi}{2}\right)}{\sin(\pi-\alpha)}$
	№3	$ctg^2(2\pi-\alpha)-\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot\dfrac{1}{\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)}=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$
30	№1	$cos^2\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)\cdot ctg(\alpha-\pi)$
	№2	$cos630^\circ - sin1470^\circ - ctg1125^\circ$
	№3	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)-\cos(\pi-\alpha)+tg(\pi-\alpha)-ctg\left(\dfrac{3}{2}\pi+\alpha\right)=2\cos\alpha$

Практическая работа №43,44,45: Функция y = sin x, её свойства и график. Функция y = cos x, её свойства и график. Функции y = tg x, y = ctg x, их свойства и графики

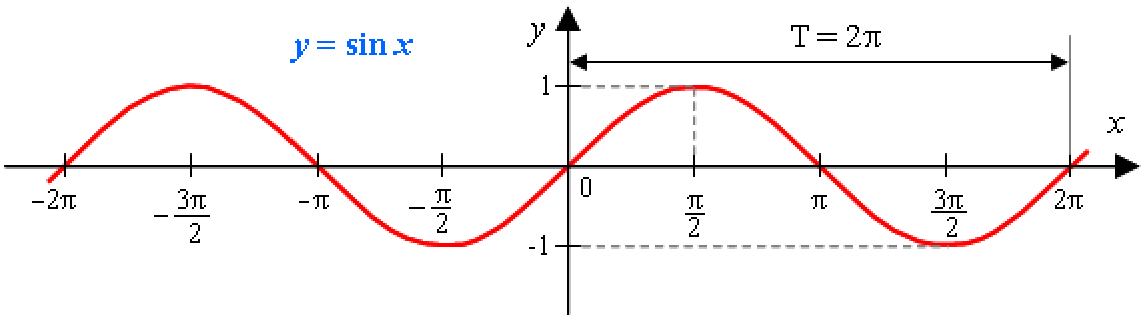
<u>Цель работы:</u> закрепить знания и умения студентов по освоению свойств тригонометрических функций.

<u>Теоритическое обоснование:</u>

Функции y = sin x, y = cos x, y = mf(x), y = f(kx), y = tg x, y = ctg x

Функция *y* = sin *x*

Графиком функции является синусоида.
Полную неповторяющуюся часть синусоиды называют волной синусоиды.
Половину волны синусоиды называют полуволной синусоиды (или аркой).



Свойства функции $y = \sin x$:

1) Область определения функции – множество действительных чисел.
2) Область значений функции – отрезок [–1; 1]
3) Это нечетная функция.
4) Это непрерывная функция.
5) Координаты точек пересечения графика:
- с осью абсцисс: (πn; 0),
- с осью ординат: (0; 0).
6) На отрезке [-π/2; π/2] функция возрастает, на отрезке [π/2; 3π/2] – убывает.
7) На промежутках [2πn; π + 2πn] функция принимает положительные значения.
На промежутках [-π + 2πn; 2πn] функция принимает отрицательные значения.
8) Промежутки возрастания функции: [-π/2 + 2πn; π/2 + 2πn].
Промежутки убывания функции: [π/2 + 2πn; 3π/2 + 2πn].
9) Точки минимума функции: -π/2 + 2πn.
Точки максимума функции: π/2 + 2πn
10) Функция ограничена сверху и снизу. Наименьшее значение функции –1, наибольшее значение 1.
11) Это периодическая функция с периодом 2π (T = 2π)

Для построения графика функции $y = \sin x$ удобно применять следующие масштабы:
- на листе в клетку за единицу отрезка примем длину в две клетки.
- на оси *x* отмерим длину π. При этом для удобства 3,14 представим в виде 3 – то есть без дроби. Тогда на листе в клетку π составит 6 клеток (трижды по 2 клетки). А каждая клетка получит свое закономерное имя (от первой до шестой): π/6, π/3, π/2, 2π/3, 5π/6, π. Это значения *x*.
- на оси у отметим 1, включающий две клетки.
Составим таблицу значений функции, применяя наши значения *x*:

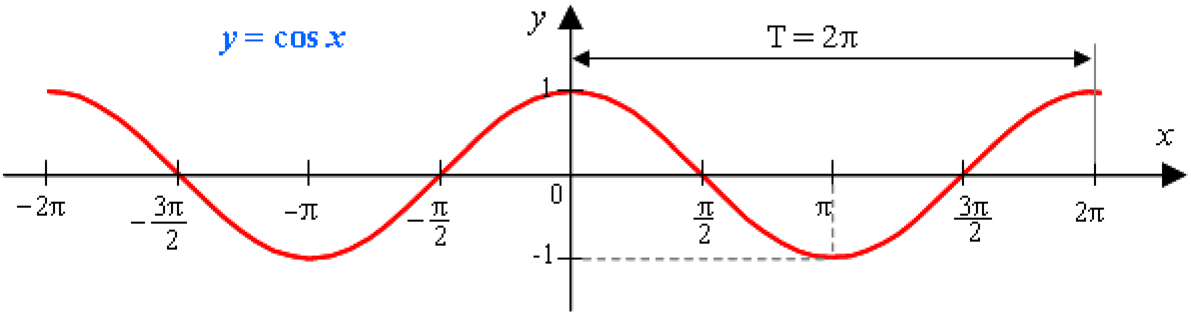
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Далее составим график. Получится полуволна, наивысшая точка которой (π/2; 1). Это график функции $y = \sin x$ на отрезке [0; π]. Добавим к построенному графику симметричную полуволну (симметричную относительно начала координат, то есть на отрезке -π). Гребень этой полуволны – под осью х с координатами (-1; -1). В результате получится волна. Это график функции $y = \sin x$ на отрезке [-π; π].

Можно продолжить волну, построив ее и на отрезке [π; 3π], [π; 5π], [π; 7π] и т.д. На всех этих отрезках график функции будет выглядеть так же, как на отрезке [-π; π]. Получится непрерывная волнистая линия с одинаковыми волнами.

Функция *y* = cos *x*.

Графиком функции является синусоида (ее иногда называют косинусоидой).



Свойства функции *y* = cos *x*:

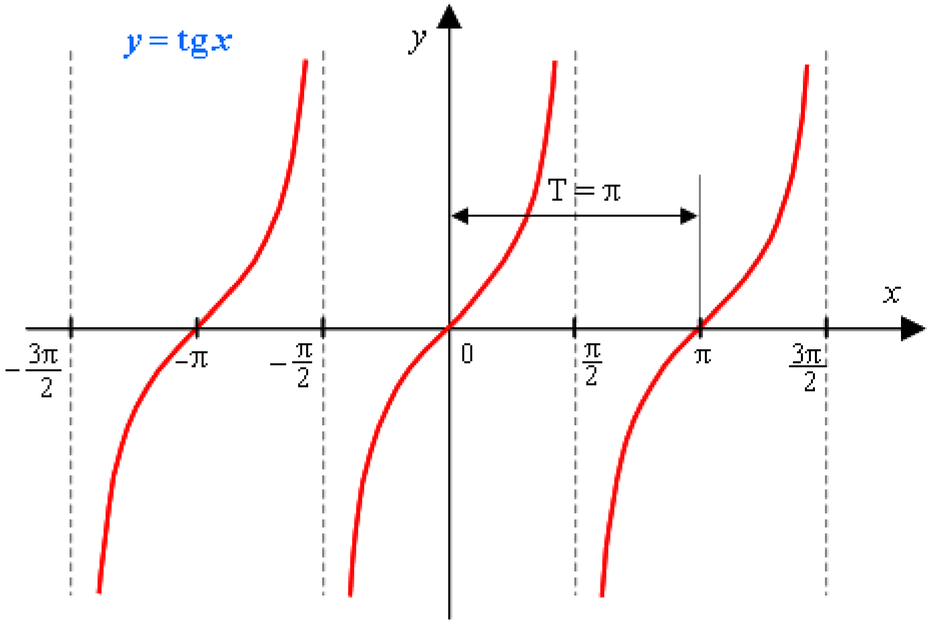
1) Область определения функции – множество действительных чисел.
2) Область значений функции – отрезок [–1; 1]
3) Это четная функция.
4) Это непрерывная функция.
5) Координаты точек пересечения графика:
- с осью абсцисс: (π/2 + πn; 0),
- с осью ординат: (0;1).
6) На отрезке [0; π] функция убывает, на отрезке [π; 2π] – возрастает.
7) На промежутках [-π/2 + 2πn; π/2 + 2πn] функция принимает положительные значения.
На промежутках [π/2 + 2πn; 3π/2 + 2πn] функция принимает отрицательные значения.
8) Промежутки возрастания: [-π + 2πn; 2πn].
Промежутки убывания: [2πn; π + 2πn];
9) Точки минимума функции: π + 2πn.
Точки максимума функции: 2πn.
10) Функция ограничена сверху и снизу. Наименьшее значение функции –1, наибольшее значение 1.
11) Это периодическая функция с периодом 2π (T = 2π)

Функция *y* = *mf*(*x*).
Возьмем предыдущую функцию *y* = cos *x*. Как вы уже знаете, ее графиком является синусоида. Если мы умножим косинус этой функции на определенное число m, то волна растянется от оси *x* (либо сожмется, в зависимости от величины m).
Эта новая волна и будет графиком функции y = mf(x), где m – любое действительное число.
Таким образом, функция y = mf(x) – это привычная нам функция y = f(x), умноженная на m.
Если m < 1, то синусоида сжимается к оси *x* на коэффициент m. Если m > 1, то синусоида растягивается от оси *x* на коэффициент m.
Выполняя растяжение или сжатие, можно сначала построить лишь одну полуволну синусоиды, а затем уже достроить весь график.
Функция *y* = *f*(*kx*).
Если функция *y* = *mf*(*x*) приводит к растяжению синусоиды от оси *x* либо сжатию к оси *x*, то функция y = f(kx) приводит к растяжению от оси *y* либо сжатию к оси *y*.
Причем k – любое действительное число.

При $0 < k < 1$ синусоида растягивается от оси *y* на коэффициент k. Если $k > 1$, то синусоида сжимается к оси *y* на коэффициент k.
Составляя график этой функции, можно сначала построить одну полуволну синусоиды, а по ней достроить затем весь график.

Функция *y* = tg *x*.

Графиком функции *y* = tg *x* является тангенсоида.
Достаточно построить часть графика на промежутке от 0 до π/2, а затем можно симметрично продолжить ее на промежутке от 0 до 3π/2.

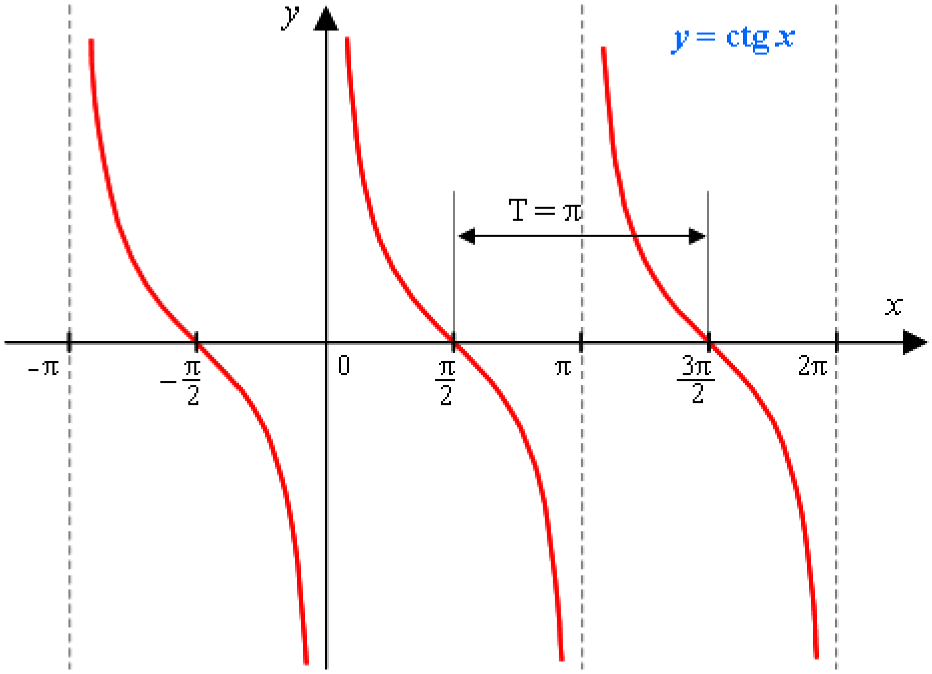


Свойства функции *y* = tg *x*:

1) Область определения функции – множество всех действительных чисел, кроме чисел вида $x = \pi/2 + \pi k$, где k – любое целое число. Это означает, что на графике функции нет точки, принадлежащей прямой $x = \pi/2$, либо прямой $x = 3\pi/2$, либо прямой $x = 5\pi/2$, либо прямой $x = -\pi/2$ и т.д. 2) Область значений функции $(-\infty; +\infty)$ 3) Это нечетная функция. 4) Это непрерывная функция на интервале $(-\pi/2; \pi/2)$. 5) Это периодическая функция с основным периодом π (T = π) 6) Функция возрастает на интервале $(-\pi/2; \pi/2)$. 7) Функция не ограничена ни сверху, ни снизу. Не имеет ни наименьшего, ни наибольшего значений.

Функция *y* = ctg *x*

Графиком функции *y* = ctg *x* также является тангенсоида (ее иногда называют котангенсоидой).



Свойства функции *y* = ctg *x*:

1) Область определения функции – множество всех действительных чисел, кроме чисел вида
x = πk, где k – любое целое число.
2) Область значений функции (–∞; +∞)
3) Это нечетная функция.
4) Это непрерывная функция.
5) Это периодическая функция с основным периодом π (T = π)
6) Функция убывает в промежутке (πk; π + πk), где k – любое целое число.
7) Функция не ограничена ни сверху, ни снизу. Не имеет ни наименьшего, ни наибольшего значений.

Текст задания:

	Множество значений	
A1	Определите множество значений функции: $y = 5\cos x - 2$	**1)** $[-2;5]$; **2)** $[-7;3]$; **3)** $[2;5]$; **4)** $[2;7]$
A2	Найдите сумму целых значений функции $y = 4 - 3\sin^2 x$	**1)** 10; **2)** 6; **3)** 15; **4)** 9
A3	Укажите наибольшее целое значение функции $y = \sqrt{21}\sin x + 2\cos x - 3$	**1)** 3; **2)** 9; **3)** 2; **4)** 8
A4	Определите множество значений функции: $y = 4\cos x + 1$	**1)** $[1;4]$; **2)** $[3;5]$; **3)** $[-3;5]$; **4)** $[0;2]$
A5	Найдите сумму целых значений функции $y = 2\sin^2 x - 6$	**1)** –10; **2)** –15; **3)** –5; **4)** –22
A6	Укажите наименьшее целое значение функции $y = \sqrt{5}\sin x - 2\cos x + 1$	**1)** 3; **2)** –1; **3)** 2; **4)** –2
A7	Определите множество значений функции: $y = 7\cos x + 1$	**1)** $[1;7]$; **2)** $[-5;9]$; **3)** $[-7;7]$; **4)** $[-6;8]$

А8	Найдите сумму целых значений функции $y = 2 - 5\sin^2 x$	**1)** 5; **2)** -3; **3)** -5; **4)** 2
А9	Укажите наибольшее целое значение функции $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x - 4$	**1)** -4; **2)** -2; **3)** 2; **4)** 8
А10	Определите множество значений функции: $y = 2\cos x - 4$	**1)** $[1;4]$; **2)** $[-4;-2]$; **3)** $[-6;-2]$; **4)** $[0;4]$
А11	Найдите сумму целых значений функции $y = 4\sin^2 x - 3$	**1)** 1; **2)** -5; **3)** -6; **4)** -1
А12	Укажите наименьшее целое значение функции $y = 6\sin x - 8\cos x + 4$	**1)** -6; **2)** -14; **3)** 2; **4)** 4

Практическая работа №46:

Преобразования графиков тригонометрических функций

Цель: используя преобразования графиков функции, постройть заданную функцию.

1 вариант	2 вариант	3 вариант
Постройте график функции $y = -2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$	Постройте график функции $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$	Постройте график функции $y = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1$
4 вариант	5вариант	6 вариант
. Постройте график функции $y = -2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$	Постройте график функции $y = -2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1$	Постройте график функции $y = -2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1$
7 вариант	8вариант	9 вариант
. Постройте график функции $y = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$	Постройте график функции $y = -2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$	Постройте график функции $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$

Практическая работа №47:

Обратные тригонометрические функции. Их свойства и графики

Цель:

- <u>закрепление ключевых понятий:</u>
  арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса числового аргумента;
- <u>выработка практических навыков:</u>
  в вычислении обратных тригонометрических функций;
  в решении простейших тригонометрических уравнений;

Актуализация опорных знаний

1. Что называется arcsin a? arccos a? arctg a? arcctg a?
2. Какие значения могут принимать x и y для функций:
   $y = \arcsin x$ $\quad y = \arccos x$
   $y = arctgx$ $\quad y = arcctgx$
3. Как вычислить arcsin и arctg от отрицательного аргумента?
4. Как вычислить arccos и arcctg от отрицательного аргумента?

Задания для практической работы

1.Вычислите:

а) $\arcsin\ a$, если $a = \frac{1}{2}$; 1;0; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; -1	б) arctg a , если $a = 0;1;\sqrt{3};\quad -\frac{\sqrt{3}}{3}$; -1
в) $\arccos\ a$, если $a = \frac{1}{2}$; 1;0; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; -1	г) arcctg a , если $a = 0;1;\sqrt{3};\ -\frac{\sqrt{3}}{3};-1$

2.Найдите значение каждого выражения:

а) $3\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 5arctg0 - \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

б) $\sin\left(arcctg\left(-\sqrt{3}\right) + 2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

в) $tg\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + arctg\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

г) $3tg\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$

д) $\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

е) $ctg\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ $\qquad$ ж) $ctg\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

Определение обратных тригонометрических функций.

Поскольку тригонометрические функции периодичны, то обратные к ним функции не однозначны. Так, уравнение $y = \sin x$, при заданном , имеет бесконечно много корней. Действительно, в силу периодичности синуса, если x такой корень, то и $x + 2\pi n$ (где n целое) тоже будет корнем уравнения. Таким образом, **обратные тригонометрические функции многозначны**. Чтобы с ними было проще работать, вводят понятие их главных значений. Рассмотрим, например, синус: $y = \sin x$. Если ограничить аргумент x интервалом , то на нем функция $y = \sin x$ монотонно возрастает. Поэтому она имеет однозначную обратную функцию, которую называют арксинусом: $x = \arcsin y$.

Если особо не оговорено, то под обратными тригонометрическими функциями имеют в виду их главные значения, которые определяются следующими определениями.

Арксинус (y = arcsin x) – это функция, обратная к синусу ($x = \sin y$), имеющая область определения и множество значений .

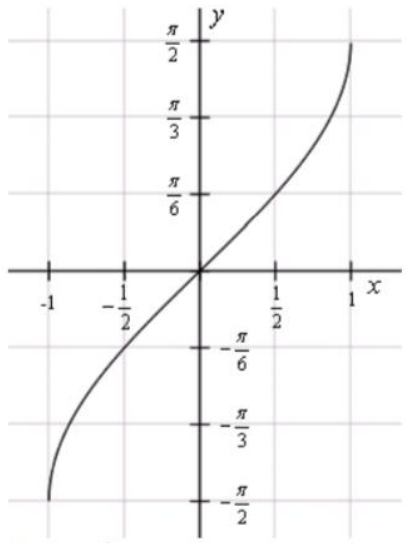
Арккосинус (y = arccos x) – это функция, обратная к косинусу ($x = \cos y$), имеющая область определения и множество значений .

Арктангенс (y = arctg x)– это функция, обратная к тангенсу ($x = \operatorname{tg} y$), имеющая область определения и множество значений .

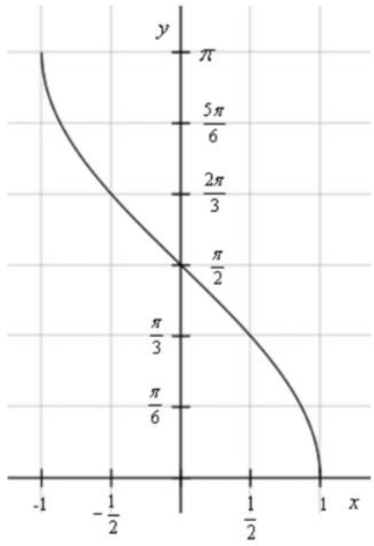
Арккотангенс (y = arcctg x)– это функция, обратная к котангенсу ($x = \operatorname{ctg} y$), имеющая область определения и множество значений .

Графики обратных тригонометрических функций.

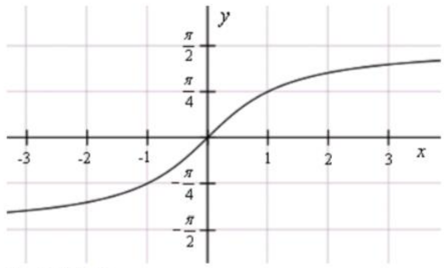
Графики обратных тригонометрических функций получаются из графиков тригонометрических функций зеркальным отражением относительно прямой $y = x$. См. разделы Синус, косинус, Тангенс, котангенс.



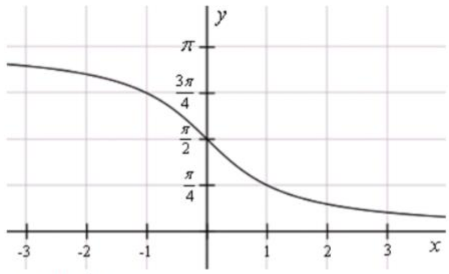
$y = \arcsin x$



$y = \arccos x$



$y = \mathrm{arctg}\, x$



$y = \mathrm{arcctg}\, x$

Задание 3. Постройте графики с помощью преобразований.

1) $y = \cos x - 1$;

2) $y = \frac{1}{2}\sin x$;

3) $y = |2\cos x|$;

4) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$;

5) $y = \mathrm{ctg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Практическая работа №48:

Уравнение cos x = a. Уравнение sin x = a. Уравнение tg x = a, ctg x = a. Решение тригонометрических уравнений основных типов: простейшие тригонометрические уравнения, сводящиеся к квадратным, решаемые разложением на множители, однородные.

Цель: : научиться решать простейшие тригонометрические уравнения и неравенства.

Актуализация опорных знаний

- Какие уравнения называются простейшими тригонометрическими?
- Какие значения может принимать число а в уравнениях sin x=a и cosx = a?
- Какие значения может принимать число а в уравнениях tgx=a и ctgx=a?
- Какие случаи в тригонометрических уравнениях называются частными? Сколько решений имеет тригонометрическое уравнение?
- Основные типы тригонометрических уравнений.
- Алгоритм решения уравнений, сводящихся к квадратным.
- Какие уравнения называются однородными? Алгоритм решения однородных уравнений.

Решение простейших тригонометрических уравнений

Таблица1

Уравнение	*Общее решение*	*Частные случаи*		
		$a=-1$	$a=0$	$a=1$
$\sin x = a$, $\lvert a\rvert \le 1$	$x=(-1)^n \arcsin a + \pi n$	$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$	$x=\pi n$	$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$
$\cos x = a$, $\lvert a\rvert \le 1$	$x=\pm\arccos a + 2\pi n$	$x=\pi+2\pi n$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi n$	$x=2\pi n$
$\mathrm{tg}\, x = a$, $a\in(-\infty;\infty)$	$x=\mathrm{arctg}\, a+\pi n$	$x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$	$x=\pi n$	$x=\frac{\pi}{4}+\pi n$
$\mathrm{ctg}\, x = a$, $a\in(-\infty;\infty)$	$x=\mathrm{arcctg}\, a+\pi n$	$x=\frac{3\pi}{4}+\pi n$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi n$	$x=\frac{\pi}{4}+\pi n$

Задания для практической работы

1.Решите простейшие уравнения:

а) $\sin 2x = -1$; г) $\cos\frac{1}{3}x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0$; д) $tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\left(-\sqrt{3}\right)$;

в) $ctg\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=0$; е) $\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2.Решить уравнения:

а) $6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0$

б) $11 - 16\sin^2 x + 16\cos^2 x = 0$

в) $\sin x - \cos x = 0$

г) $2\cos^2 x - 3\sin x \cos x + \sin^2 x = 0$

д) $\cos 3x - \cos x = 0$

е) $\sin 2x - \cos x = 0$

Вариант №1

1. Решите уравнение: $2\cos x = \frac{\sqrt{8}}{2}$.

1) $(-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$ 2) $\pm\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$

3) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$ 4) $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$

2. Решите уравнение: $\mathrm{tg}(\pi - x) + \sqrt{3} = 0$.

1) $\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$ 2) $\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$

3) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$ 4) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$

3. Решите уравнение: $\sin\left(-\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} = 0$.

1) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$ 2) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$

3) $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$ 4) $(-1)^n \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$

4. Решите уравнение: $2\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sqrt{2} = 0$.

1) $(-1)^n \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$ 2) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$

3) $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$ 4) $(-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$

5. Найдите решения уравнения: $2\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$.

1) $\frac{\pi n}{2},\ n \in Z$ 2) $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$

3) $3\pi n,\ n \in Z$ 4) $\pi n,\ n \in Z$

6. Найдите решения уравнения: $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}x - \pi\right) = 1$.

1) $\frac{1}{2} + 2n,\ n \in Z$ 2) $\pm\frac{1}{2} + n,\ n \in Z$

3) $-\frac{1}{2} + n,\ n \in Z$ 4) $\frac{1}{2} + \frac{n}{2},\ n \in Z$

7. Укажите наименьший положительный корень уравнения $\sin\frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{tg}(-x) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

1) $\frac{\pi}{3}$ 2) $\frac{\pi}{6}$ 3) $\frac{5\pi}{4}$ 4) $\frac{\pi}{2}$

8. При каких значениях x значение функции $f(x) = 4\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} - 1$ равно 0?

1) $\pi n,\ n \in Z$ 2) $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$

3) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$ 4) $(-1)^n\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$

Вариант №2

1. Решите уравнение: $3\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.

1) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$ 2) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

3) $\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$ 4) $\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$

2. Решите уравнение: $\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$.

1) $\pm\frac{2\pi}{3} + 4\pi n,\ n \in Z$ 2) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$

3) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$ 4) $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$

3. Решите уравнение: $1+\sin(\pi-x)=0$.

1) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$ 2) $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$

3) $\pm\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$ 4) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$

4. Найдите решения уравнения: $\operatorname{ctg}^2 x=1-\frac{1}{\sin^2 x}$.

1) $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$ 2) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$

3) $\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$ 4) $\pi n,\ n\in Z$

5. Найдите решения уравнения: $4\cos\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\sqrt{3}$.

1) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$ 2) $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$

3) $\pm\frac{5\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$ 4) $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$

6. Укажите наименьший положительный корень уравнения $\cos\pi\operatorname{ctg}(-x)=-\sqrt{3}$.

1) $\frac{\pi}{6}$ 2) $\frac{5\pi}{6}$ 3) $\frac{\pi}{3}$ 4) $\frac{\pi}{4}$

7. При каких значениях x значение функции $f(x)=8\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}-2\sqrt{2}$ равно 0?

1) $\pm\frac{3\pi}{8}+3\pi n,\ n\in Z$ 2) $(-1)^n\frac{3\pi}{8}+\frac{3\pi n}{2},\ n\in Z$

3) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in Z$ 4) $(-1)^n\frac{3\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$

8. Укажите абсциссы точек пересечения графиков функций $f(x)=2\operatorname{tg}^2 x+\sin^2 x,\ g(x)=1+\operatorname{tg}^2 x-\cos^2 x$.

1) $4\pi n,\ n\in Z$ 2) $\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$

3) $\pi n,\ n\in Z$ 4) $\sqrt{2\pi n},\ n\in Z$

Практическая работа №49:

Простейшие тригонометрические неравенства

Цель: Отработать навыки и умения в решении тригонометрических неравенств

1. Решение тригонометрических неравенств

Задача 1.
Решить неравенство cos x > 1/2.
***Решение*.**
По определению косинуса cos x – это абсцисса точки единичной окружности. Чтобы решить неравенство cos x > 1/2, нужно выяснить, какие точки единичной окружности имеют абсциссу, большую 1/2.
Абсциссу, равную 1/2, имеют две точки единичной окружности M_1 и M_2.
Точка M_1 получается поворотом точки P (0; 1) на угол -π/3, а также на углы -π/3 + 2πn, где n = +/-1, +/-2, …; точка M_2 – поворотом на угол π/3, а также на углы π/3 + 2πn, где n = +/-1, +/-2, …
Абсциссу, большую 1/2, имеют все точки M дуги единичной окружности, лежащие правее прямой M_1M_2. Таким образом, решениями неравенства cos x > 1/2 являются все числа x из промежутка -π/3 < x < π/3.
Ответ. Все решения данного неравенства – множество интервалов π/3 + 2πn < x < π/3 + 2πn, n € Z.

Задача 2.
Решить неравенство cos x ≤ 1/2.
Решение.
Абсциссу, не большую 1/2, имеют все точки дуги M_1MM_2 единичной окружности. Поэтому решениями неравенства cos x ≤ 1/2 являются числа x, которые принадлежат промежутку π/3 ≤ x ≤ 5π/3.
Ответ. Все решения данного неравенства – множество отрезков π/3 + 2πn ≤ x ≤ 5π/3 + 2πn, n € Z.
Задача 3.
Решить неравенство sin x ≥ -1/2.
Решение.
Ординату, не меньшую -1/2, имеют все точки дуги M_1MM_2 единичной окружности. Поэтому решениями неравенства sin x ≥ -1/2 являются числа x, принадлежащие промежутку -π/6 ≤ x ≤ 7π/6. Все решения данного неравенства – множество отрезков -π/6 + 2πn ≤ x ≤ 7π/6 + 2πn, n € Z.
Отметим, что все точки окружности, лежащие ниже прямой M_1M_2, имеют ординату, меньшую -1/2. Поэтому все числа x € (-5π/6; -π/6) являются решениями неравенства sin x < -1/2.
Ответ. Все решения этого неравенства – интервалы (-5π/6 + 2πn; -π/6 + 2πn), n € Z.

Задача 4.
Решить неравенство cos (x/4 – 1) ≤ -(√2/2).
Решение.
Обозначим x/4 – 1 = y. Решая неравенство cos y ≤ -(√2/2), находим 3π/4 + 2πn ≤ y ≤ 5π/4 + 2πn, n € Z.
Заменяя y = x/4 – 1, получаем 3π/4 + 2πn ≤ x/4 – 1 ≤ 5π/4 + 2πn, откуда 1 + 3π/4 + 2πn ≤ x/4 ≤ 1 + 5π/4 + 2πn, 4 + 3π + 8 πn ≤ x ≤ 4 + 5π + 8 πn, n € Z.
Ответ. 4 + 3π + 8 πn ≤ x ≤ 4 + 5π + 8 πn, n € Z.

1. ***Решите тригонометрические неравенства***

1) $\sin 2x < \frac{1}{2}$;

2) $2\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \le \sqrt{2}$;

3) $\cos^2 x \ge \frac{1}{4}$;

4) $-2 \le \mathrm{tg}x < 1$;

5) $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 > 0$;

6) $\sin^4 x + \cos^4 x \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$;

7) $\mathrm{ctg}^2 x - \mathrm{ctg}x - 2 \le 0$;

8) $\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x > \sqrt{2}$;

9) $\frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{1 + \mathrm{tg}\,x} + \frac{1}{\mathrm{tg}\,x} \ge 2$;

10) $4\sin x\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) < \sin 6x$;

11) $\sin x\sin 3x \ge \sin 5x\sin 7x$;

12) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x > 0$.

Практическая работа № 50:

Формулы синуса суммы и разности, косинуса суммы и разности

Цель: отработка умений и навыков решения упражнений на применение формул.

Формулы

1) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

2) $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

3) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

4) $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

5) $tg\alpha \pm tg\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$

6) $ctg\alpha \pm ctg\beta = \frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$

Вариант 1

1. Вычислить:

1) $\frac{\sin 70° + \sin 10°}{\cos 70° - \cos 10°}$

2) $\dfrac{\sin\frac{11\pi}{18}-\sin\frac{\pi}{18}}{\cos\frac{11\pi}{18}-\cos\frac{\pi}{18}}$

2. Вычислите точное значение разности синусов 165 и 75 градусов.

3. Доказать тождество:

$$\frac{sin\alpha + sin3\alpha}{cos\alpha + cos3\alpha} = tg2\alpha$$

Вариант 2

1. Вычислить:

1) $\dfrac{\sin 10° + \sin 80°}{\cos 80° - \cos 10°}$

2) $\dfrac{\sin\frac{11\pi}{36}-\sin\frac{\pi}{36}}{\cos\frac{11\pi}{36}-\cos\frac{\pi}{36}}$

2. Вычислите точное значение суммы косинусов 105 и 75 градусов.

3. Доказать тождество:

$$\frac{sin2\alpha + sin4\alpha}{cos2\alpha - cos4\alpha} = ctg\alpha$$

Практическая работа № 51:

Тангенс суммы и разности

Цель: Изучить формулы тангенса суммы и разности аргументов. Рассмотреть практическое применение данных формул.

Теоретическая часть:
Повторим.
1) Что такое тангенс?
2)Как он связан с синусом и косинусом?
3)Можно ли вывести формулы тангес суммы и разности аргументов, зная формулы суммы и разности аргументов синуса и косинуса?

$$tg(x+y)=\frac{tgx+tgy}{1-tgx\,tgy}$$

$$tg(x-y)=\frac{tgx-tgy}{1+tgx\,tgy}$$

Пример 1.

Вычислить $tg75^0$

$$tg75^0 = tg\left(45^0+30^0\right)=\frac{tg45^0+tg30^0}{1-tg45^0tg30^0}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

Пример 2. **Вычислить:** $tg15^0$

Решение.

$$tg15^0 = tg\left(45^0-30^0\right)=\frac{tg45^0-tg30^0}{1+tg45^0tg30^0}=$$

$$=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$$

Пример 3. **Вычислить:** $\frac{tg27^0+tg18^0}{1-tg27^0tg18^0}$

Решение.

$$\frac{tg27^0+tg18^0}{1-tg27^0tg18^0}= tg\left(27^0+18^0\right)=$$

$$=tg45^0=1$$

№	**1 вариант**	**№**	**2 вариант**
1. Вычислить: $tg(\alpha+\beta)$			
1	если $tg\alpha=\frac{1}{5}, tg\beta=\frac{2}{3}$	**1**	если $tg\alpha=\frac{1}{3}, tg\beta=\frac{2}{3}$
2. Вычислить: $tg(\alpha+\beta)$, или $tg(\alpha-\beta)$			
2	Вычислить $tg75^0$	**2**	Вычислить $tg15^0$.
3. Упростить			

3	$\frac{tg9{,}04^0 - tg2{,}02^0}{1 + tg9{,}04^0 \cdot tg2{,}02^0}$	**3**	$\frac{tg9{,}2^0 - tg0{,}12^0}{1 + tg9{,}2^0 \cdot tg0{,}12^0}$
4	$\frac{tg12^0 + tg33^0}{1 - tg12^0 \cdot tg33^0}$	**4**	$\frac{tg5^0 + tg25^0}{1 - tg5^0 \cdot tg25^0}$
5	$\frac{tg11^0 + tg19^0}{1 - tg11^0 \cdot tg19^0}$		$\frac{tg65^0 - tg5^0}{1 + tg65^0 \cdot tg5^0}$

Практическая работа № 52:

Формулы синуса, косинуса, тангенса двойного угла

Цель:

Теоретическая часть:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha; \quad \boxed{1}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha; \quad \boxed{2}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \quad \boxed{3}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi k}{2}.$$

Из формулы (2)

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1;$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha.$$

Пример: 1

Вычислить $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}3$.

Используя формулу (2) и основное тригонометрическое тождество, получаем

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) =$

$= 2\cos^2\alpha - 1 = 2 \cdot (0{,}3)^2 - 1 = -0{,}82.$ ◁

Пример:2 Используя формулу (1), получаем

$$2sin15^\circ \cdot cos15^\circ = \sin(2 \cdot 15^\circ) = sin30^\circ = \frac{1}{2}$$

2. Используя формулу (2), получаем

$$cos^2 15^\circ - sin^2 15^\circ = \cos(2 \cdot 15^\circ) = cos30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

3. Используя формулу (3), получаем

$$\frac{2tg15^\circ}{1-tg^2 15^\circ}=tg(2\cdot 15^\circ)=tg30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

4. Вычислить:

1 вариант		2 вариант	
$2\sin 30^\circ \cos 30^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$2\sin 45^\circ \cos 45^\circ$	1
$\cos^2 45^\circ - \sin^2 45^\circ$	0	$\cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ$	$\frac{1}{2}$
$2\cos^2 30^\circ - 1$	$\frac{1}{2}$	$2\cos^2 15^\circ - 1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$	$\frac{1}{2}$
$\cos^2\frac{\pi}{12} - \sin^2\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Практическая работа №53:
Формулы понижения степени, или формулы половинного угла

Цель: отработка умений и навыков решения упражнений на применение формул.

Формулы

1) $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$

2) $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$

3) $tg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

4) $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

5) $ctg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$

6) $ctg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Вариант 1

1. Найти числовое значение выражения: $2cos^2\frac{\pi}{8}-1$

2. Пусть $cos\alpha = 0{,}6$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Вычислить: $tg\frac{\alpha}{2}$

3. Упростить выражение:

1) $\frac{1-cos\alpha}{sin\alpha}$

2) $\frac{1-cos2\alpha+sin2\alpha}{1+cos2\alpha+sin2\alpha}$

Вариант 2

1. Найти числовое значение выражения: $1 - 2sin^2\frac{\pi}{12}$

2. Пусть $cos\alpha = 0{,}6$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Вычислить: $ctg\frac{\alpha}{2}$

3. Упростить выражение:

1) $\frac{sin\alpha}{1+cos\alpha}$

2) $\frac{1+cos2\alpha+sin2\alpha}{sin\alpha+cos\alpha}$

Практическая работа №54:

Формулы сумм тригонометрических функций

Цель: отработка умений и навыков решения упражнений на применение формул.

Для нахождения тригонометрических функций суммы и разности двух аргументов применяются следующие формулы:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta; \quad (9.34)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta; \quad (9.35)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta; \quad (9.36)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta; \quad (9.37)$$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}(2k+1),\ \beta\neq\frac{\pi}{2}(2k+1),\ \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta\neq1; \quad (9.38)$$

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta}{1+\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}(2k+1),\ \beta\neq\frac{\pi}{2}(2k+1),\ \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta\neq-1; \quad (9.39)$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta-1}{\mathrm{ctg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\beta},\ \alpha\neq\pi k,\ \beta\neq\pi k,\ \alpha\neq-\beta+\pi k; \quad (9.40)$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta+1}{\mathrm{ctg}\,\beta-\mathrm{ctg}\,\alpha},\ \alpha\neq\pi k,\ \beta\neq\pi k,\ \alpha\neq\beta+\pi k. \quad (9.41)$$

Вариант 1

Уровень А

1. Вычислите:

1. $\cos 98^0 \cos 53^0 + \sin 98^0 \sin 53^0$;
2. $\sin 56^0 \cos 26^0 - \cos 56^0 \sin 26^0$;
3. $\sin\frac{8\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} + \sin\frac{6\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}$;

4. $\cos 3\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha \sin 3\alpha$.

Уровень Б

2.Найдите $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$, если $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Вариант 2

Уровень А

1. Вычислите:

1. $\cos 52^0 \cos 22^0 + \sin 22^0 \sin 52^0$;
2. $\sin 134^0 \cos 44^0 - \cos 134^0 \sin 44^0$;
3. $\cos\frac{10\pi}{6}\cos\frac{8\pi}{6} - \sin\frac{8\pi}{6}\sin\frac{10\pi}{6}$;
4. $\sin\alpha \cos 3\alpha - \sin 3\alpha \cos\alpha$.

Уровень Б

1. Найдите $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$, если $\cos\alpha = -\frac{15}{17}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Практическая работа №55:

Формулы произведений тригонометрических функций

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В АЛГЕБРАИЧЕСКУЮ СУММУ

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)];$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)];$$

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)].$$

	1 вариант
1	Вставь недостающие части формулы:

	$sin\ x \cdot sin\ y = \frac{cos\,(x \boxed{-} y) \boxed{-} cos\,(x+y)}{2}.$
2	Определите, истинно или ложно данное равенство: $2\,sin\ 37^\circ \cdot cos\ 16^\circ = sin\ 53^\circ + sin\ 21^\circ$:
3	Преобразуй произведение в сумму: $sin\ 14\beta \cdot cos\ 4\beta.$
4	Преобразуй произведение в сумму: $\sin 2\alpha \cdot \cos 15\alpha$
5	Преобразуй произведение в сумму: $\sin 64° \cdot \sin 31°$.
2 вариант	
1	Вставь недостающие части формулы: $\cos x \cdot \cos y = \frac{cos(x+y)+cos(x-y).}{\quad}$
2	Определите, истинно или ложно данное равенство: $2\sin 46° \cdot \cos 18° = \sin 64° + \sin 28°$
3	Преобразуй произведение в сумму $\sin 20\beta \cdot \cos 5\beta$
4	Преобразуй произведение в сумму $\sin 2\alpha \cdot \cos 13\alpha$.
5	Преобразуй произведение в сумму $\sin 56° \cdot \sin 33°$.

Практическая работа №56:

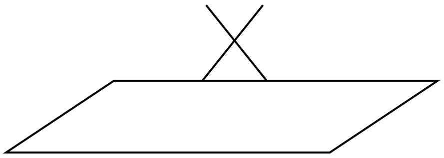
Описание производственных процессов с помощью графиков функций. Использование свойств тригонометрических функций в профессиональных задачах

Цель: выявить связь тригонометрических функций с явлениями окружающего мира и практической деятельностью человека, показать, что данные функции находит широкое применение в жизни.

Теоретическая часть:

Реальные процессы окружающего мира обычно связаны с большим количеством переменных и зависимостей между ними. Описать эти зависимости можно с помощью функций. Понятие «функция» сыграло и поныне играет большую роль в познании реального мира. Знание свойств функций позволяет понять суть происходящих процессов, предсказать ход их развития, управлять ими. В данной работе рассматривается практическое применение тригонометрических функций.

Тригонометрия – раздел математики, в котором изучаются тригонометрические функции и их приложения к геометрии. Слово тригонометрия состоит из двух греческих слов: trigwnon - треугольник и metrew - измерять и в буквальном переводе означает измерение треугольников. Как и всякая другая наука, тригонометрия возникла в результате человеческой практики в процессе решения конкретных практических задач.

2) Обозначьте точку пересечения прямых и точки пересечения прямых и плоскости. 	Ответы: 1. Точки ________________ принадлежащие плоскости 2. Точки ________________ не принадлежащие плоскости

Приступая к написанию данной работы, мы столкнулись с противоречием между имеющимися теоретическими знаниями по данной теме и отсутствием понимания того, где в реальной жизни можно встретиться с функциональной моделью, и как человек использует свойства тригонометрических функций в своей практической деятельности.

Объект нашего исследования – тригонометрические функции; предмет исследования - области их практического применения.

В разработке!!!

Практическая работа №57:
Аксиомы стереометрии и их простейшие следствия

Цель работы: Закрепить знание аксиом стереометрии. Доказать следствия из аксиом стереометрии. Продолжить формирование графической культуры учащихся, оформление краткой записи теорем. Развивать пространственное мышление учащихся

<u>Цель</u>: обобщение и систематизация знаний учащихся, полученных при изучении темы.

<u>Ход работы.</u>

1) Какие фигуры в стереометрии являются основными?

____
____
____
____

3) Объясните, почему штатив имеет всего три точки опоры?

____
____

4) Четыре точки не лежат в одной плоскости. Сколько плоскостей можно провести через тройки этих точек? Сделайте рисунок.
Решение:

5) Докажите, что все вершины четырехугольника принадлежат одной плоскости, если выполняется одно из следующих условий:
1. диагонали четырехугольника пересекаются;
2. пересекаются продолжения двух его несмежных сторон.

Доказательство:
1.

2.

6) Столяр проверяет, лежат ли концы ножек стула в одной плоскости, при помощи двух нитей.
Объясните, как он это делает?

Решение:

7) На плоскости α отмечены три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. Точка D не принадлежит плоскости α. Определите, является ли четырехугольник ABCD трапецией.

Решение:

Выполните тест:

Аксиомы стереометрии. Решение задач.

1. Основными фигурами в пространстве являются
А) треугольники
Б) плоскости
В) точки, прямые и плоскости
Г) многогранники

2.Предложение, которое принимается без доказательства.
А) теорема

Б) лемма
В) аксиома
Г) следствие

3.Какие из данных утверждений не верны? Запишите их номера.

1. через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.
2. через три точки, лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.
3.если две различные прямые имеют общую точку, то через них нельзя провести плоскость

4.Прямые которые не лежат в одной плоскости и не пересекаются называются.

А) скрещивающимися.
Б) Параллельными.
В) пересекающимися.
Г) перпендикулярными

5.Раздел геометрии, в котором фигуры изучаются в пространстве.

А) планиметрия
Б) стереометрия
В) тригонометрия
Г) геометрия Евклида

6. Какие из данных утверждений верны? Запишите их номера.

1.Через две любые точки можно провести прямую и только одну.
2)Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость , и притом только одну.
3) Плоскость и не лежащая на ней прямая пересекаются по прямой.

7)Прямые которые лежат в одной плоскости и не пересекаются называются.

А) скрещивающимися.
Б) Параллельными.
В) пересекающимися.
Г) перпендикулярными

8) Прямая и плоскость называются параллельными

А) если они не пересекаются, то есть не имеют общих точек
Б) если они пересекаются
В) если они имеют общие точки
Г) если они не имеют общих точек.

9) Для каждого обозначения найди название

Обозначение	название
А) aIIв	1) перпендикулярность прямых
Б) а ∩ в	2) параллельность прямых
В) а = в	3) пересечение прямых
Г) а + в	4) равенство прямых
	5) скрещивающиеся прямые

Практическая работа №58:

Определение и свойства параллельности прямых, прямой и плоскости

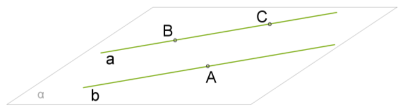
Цель: получить навыки решения задач на параллельность прямых в пространстве

Теоретический материал:

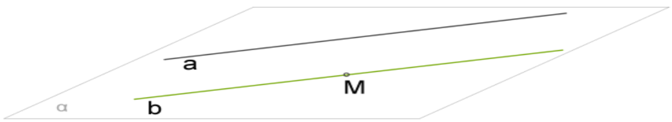
Две прямые в пространстве называются **параллельными**, если лежат в одной плоскости и не пересекаются**.**

Параллельность прямых a и b обозначается так: $a \parallel b$ или $b \parallel a$.

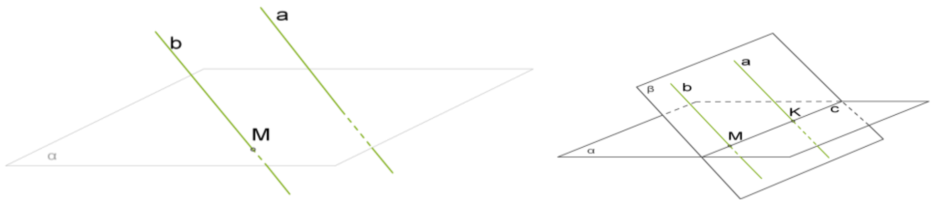
Теорема 1. Через две параллельные прямые можно провести плоскость, и при том только одну.



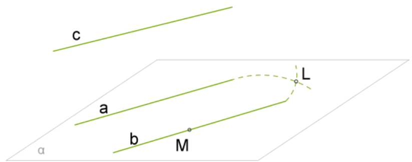
Теорема 2. Через любую точку пространства вне данной прямой можно провести прямую, параллельную данной прямой, и при том только одну.



Теорема 3. Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.



Теорема 4. Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны.



Всё множество прямых в пространстве, которые параллельны данной прямой, называется **пучком параллельных прямых.**

Выводы:

1) Любые две прямые пучка параллельных прямых параллельны между собой.

2) Параллельности прямых в пространстве присуща транзитивность: если $a \parallel b$ и $b \parallel c$, то $a \parallel c$.

Приведем пример решения задачи:

Задача.

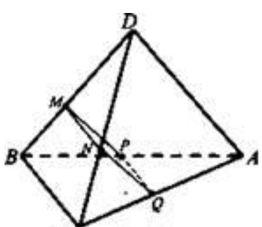


Рис. 5

Дано: M - середина BD; N - середина CD; Q - середина AC; P - середина AB; AD = 12 см; BC = 14 см (рис. 5).

Найти: PMNQP - ?

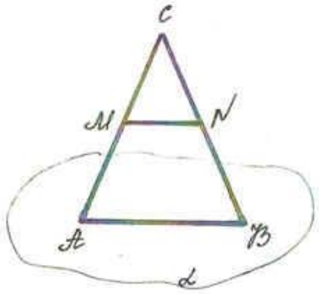
Решение:

1. MN || BC по составу средней линии ⇒ MN || PQ; PQ || BC.
2. PM || AD по составу средней линии ⇒ PM || QN; NQ || DA.
3. По определению MNQP - параллелограмм.
4. PQ = 7; PM = 6 ⇒ PMNQP = 2(7 + 6) = 26.
Ответ: 26 см

Порядок выполнения работы:

1. Прочитайте задачу.
2. Запишите условие задачи
3. Приступайте к расчетам
4. Сделайте вывод о проделанной работе и оцените себя

Задание 1. Указаны условие и рисунок к задаче. Запишите решение. *(1 балл)*



Дано:
Δ ABC,
AB ∈ α, C ∉ α,
AM = MC,
CN = NB.

Доказать: MN || α.

Задание 2. Сторона AC треугольника ABC параллельна плоскости а , а стороны AB и BC пересекаются с этой плоскостью в точках M и N. Докажите, что треугольники ABC и MBN подобны. *(1 балл)*

Задание 3. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки D и E так, что OE = 5 см и BD = 2/3. Плоскость а проходит через точки B и C и параллельна отрезку OE. Найдите длину отрезка BC. *(1 балл)*

Задание 4. Найдите AA_1,если BB_1=12см, MM_1=8см. Через конец A отрезка AB проведена плоскость α. Через точку M (середину AB) и точку B проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках M_1 и B_1 соответственно. 1) Докажите, что точки A,B_1,M_1 лежат на одной прямой.

2) Найдите BB_1,если MM_1=4см. *(2 балла)*

Практическая работа №59:

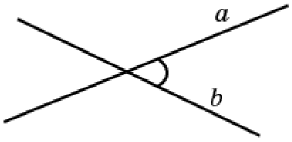
Определение и свойства скрещивающихся прямых. Угол между прямыми

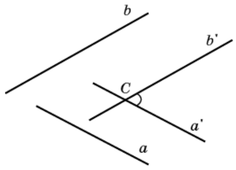
Цель: с помощью определения углов между прямыми научиться находить данные углы и их градусную меру в пространстве.

Теоретический материал:

Углом в пространстве называется фигура, образованная двумя лучами с общей вершиной и одной из частей плоскости, ограниченной этими лучами.

Углом между двумя пересекающимися прямыми в пространстве называется наименьший из углов, образованных лучами этих прямых с вершиной в точке их пересечения.



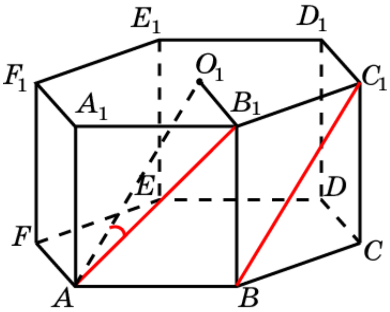


Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным.

Две прямые называются перпендикулярными, если угол между ними прямой.

Пример решения задачи:

В правильной 6-й призме $A\ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1.



Дано: $A\ldots F_1$ – правильная шестиугольная призма, AA1 = 1.

Найти: косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1.

Решение: Пусть O_1 –центр правильного 6-ка $A_1\ldots F_1$. Тогда AO_1 параллельна BC_1, и искомый угол равен углу B_1AO_1. В равно-бедренном треугольнике B_1AO_1 $O_1B_1=1$; $AB_1=AO_1=\sqrt{2}$. Применяя теорему косинусов, получим $\cos\varphi=\frac{3}{4}$.

Ответ: $\cos\varphi=\frac{3}{4}$.

Порядок выполнения работы:

1. Прочитайте задачу.
2. Запишите условие задачи
3. Приступайте к расчетам
4. Сделайте вывод о проделанной работе и оцените себя

Задания:

Задача 1. В правильной 6-й призме $A\ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и DE_1. *(1 балл)*

Задача 2. В правильной 6-й призме $A\ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми: AA_1 и DE_1. *(1 балл)*

Задача 3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми: AB_1 и BC_1.**(2 балла)**

Задача 4. Составить свою задачу по теме и решить ее. (1 балл)

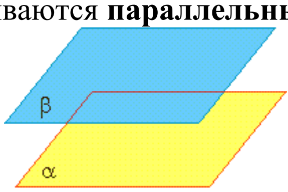
Практическая работа №60:

Определение, признак и свойства параллельности плоскостей

Цель работы: Научиться решать задачи на признак параллельности двух плоскостей.

Теоретический материал:

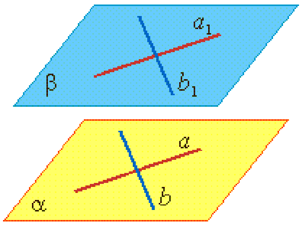
Определение: Две плоскости называются **параллельными**, если они не пересекаются.



Параллельность плоскостей обозначается так: $\alpha \parallel \beta$

Рассмотрим **признак параллельности двух плоскостей**.

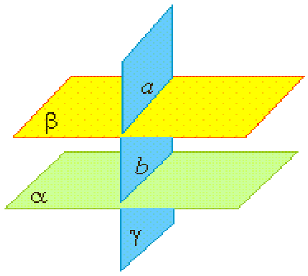
Теорема: Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.



Если $a \| a_1$ и $b \| b_1$, то α‖β.

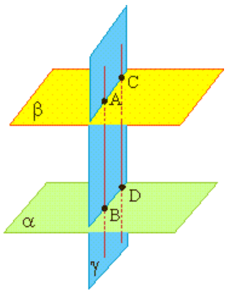
Свойства параллельных плоскостей

1^0 Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.



Если α‖β, α∩γ, β∩γ, то $a \| b$.

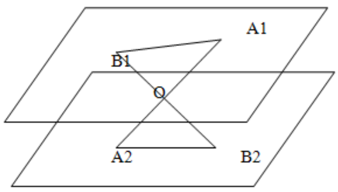
2^0 Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.



Если α‖β и AB‖CD, то AB = CD.

Пример решения задачи:

Через точку O, лежащую между параллельными плоскостями α и β, проведены прямые l и m. Прямая l пересекает плоскость A и B в точках A1и A2 соответственно, прямая m - в точках B1 и B2. Найти длину отрезка A2B2, если A1B1 = 12см, B1O:OB2 = 3:4



Дано: α и β – параллельные плоскости, A1B1 = 12см, B1O:OB2 = 3:4

Найти: A2B2

Решение. Через прямые A1A2 и B1B2 можно повести плоскость, которая пересечёт параллельн
по параллельным прямым A1B1 и A2B2.

У образовавшихся треугольников OA1B1 и OA2B2 соответствующие углы равны. Углы при вер
как вертикальные, а остальные - как внутренние накрест лежащие у параллельных прямых.

Следовательно треугольники OA1B1 и OA2B2 подобны.

У подобных треугольников соответствующие стороны соотностятся через коэффициент

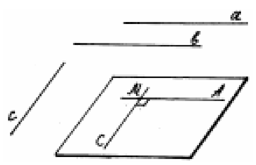
подобияя.
Откуда:
OB1:OB2 = A1B1:A2B2,
Следовательно:
A2B2 = 4 * 12 / 3 = 16
Ответ: 16 см.
Порядок выполнения работы:
1. Прочитайте задачу.
2. Запишите условие задачи
3. Приступайте к расчетам
4. Сделайте вывод о проделанной работе и оцените себя

Задания:

Задание 1. Через точку К, не лежащую между параллельными плоскостями альфа и бета, проведены прямые a и b. Прямая a пересекает плоскость альфа в точке A1 а плоскость бета в точке A2, и прямая b пересекает эти плоскости в точках B1 и B2 соответственно. Найти KB2 если A2B2 относится к A1B1 как 4:3, а KB1 = 14 см. *(2 балла).*
Задание 2. Луч КМ пересекает параллельные плоскости α и β в точках M_1 и M_2, а луч КР- в точках P_1 и P_2 соответственно. Вычислите длину отрезка M_1M_2, если KM_1 = 8см, а $M_1 P_1 : M_2 P_2 = 4 : 9$ *(2 балла)*
Задание 3. Стороны ∡N пересекают параллельные плоскости α и β в точках A,B и C,D. Вычисли длину отрезка AB, если NA=13 см, NC=20 см и CD=56 см. *(2 балла)*

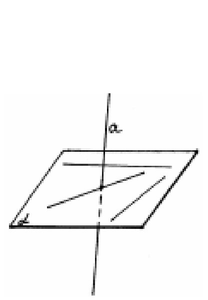
Практическая работа №61:
Определение и свойства перпендикулярности прямой и плоскости

Цель: научиться решать задачи на перпендикулярность прямой и плоскости.
Теоретический материал:
Две прямые в пространстве называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90^o.



Перпендикулярные прямые могут пересекаться и могут быть скрещивающимися.

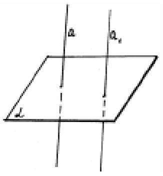
Лемма. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.
Определение. Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости. Говорят также, что плоскость α перпендикулярна к прямой a.



Если прямая a перпендикулярна к плоскости α, то она, очевидно, пересекает эту плоскость. В самом деле, если бы прямая a не пересекала плоскость α, то она лежала бы в этой плоскости или была бы параллельна ей.

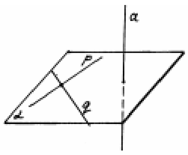
Но в том и в другом случае в плоскости α имелись бы прямые, не перпендикулярные к прямой a, например прямые, параллельные ей, что невозможно. Значит, прямая a пересекает плоскость α.

Связь между параллельностью прямых и их перпендикулярностью к плоскости.



1. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.
2. Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости.



Теорема. Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в одной плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

Замечания.
1. Через любую точку пространства проходит плоскость, перпендикулярная к данной прямой, и притом единственная.
2. Через любую точку пространства проходит прямая, перпендикулярная к данной плоскости, и притом только одна.
3. Если две плоскости перпендикулярны к прямой, то они параллельны.

Пример решения задачи:

Через вершины A и B ромба $ABCD$ проведены параллельные прямые AA_1 и BB_1, не лежащие в плоскости ромба. Известно, что $BB_1 \perp BC$, $BB_1 \perp AB$. Найдите A_1A, если $A_1C = 13$ см, $BD = 16$ см, $AB = 10$ см.

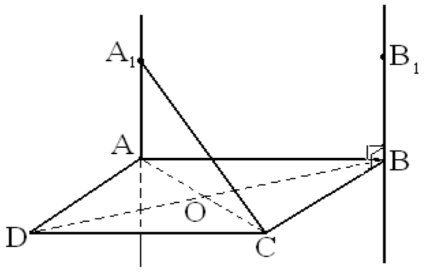


Рис.10

Решение:
1) $BB_1 \perp AB$, $BB_1 \perp BC$, а $AB \cap BC = B \Rightarrow BB_1 \cap (ABC)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости), а т.к. $BB_1 \parallel AA_1$, то $AA_1 \perp (ABC) \Rightarrow AA_1 \perp AC$;
2) Используя свойство диагоналей ромба, имеем в ΔAOB: $\angle AOB = 90°$, $BO = ½ BD = 8$ см. По теореме Пифагора:
$AO = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ см,
$AO = ½ AC \Rightarrow AC = 12$ см;
3) ΔA_1AC – прямоугольный. По теореме Пифагора:
$AA_1 = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ см.

Ответ: 5 см.

Задания (за каждый правильный ответ теста дается 0,5 балла и за правильно решенную задачу дается 2 балла):

Решите тест

1.Если угол между двумя прямыми равен 90°, то эти прямые:

а) пересекаются, б) параллельны, в) скрещиваются, г) перпендикулярны, д) совпадают.

2. Какое из следующих утверждений неверно:

а) если прямая перпендикулярна к двум прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна и к этой плоскости, б) если прямая перпендикулярна к плоскости, то она ее пересекает, в) если две плоскости перпендикулярны к прямой, то они параллельны, г) если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны, д) если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.

3.Если одна из двух скрещивающихся прямых перпендикулярна к плоскости, то будет ли перпендикулярна к этой плоскости вторая прямая?

а) да, б) да, но при определенных условиях, в) определить нельзя, г) нет, д) другой ответ.

4. Прямая α ерпендикулярна к прямым *с* и *в*, лежащим в плоскости α, прямая *а* перпендикулярна к плоскости . Каково взаимное расположение прямых *с* и *в*?

а) параллельны, б) пересекаются, в) параллельны или пересекаются, г) совпадают, д) определить нельзя.

5.Одна из двух параллельных плоскостей перпендикулярна прямой, тогда:

а) другая плоскость параллельна прямой, б) прямая лежит в другой плоскости, в) другая плоскость перпендикулярна прямой, г) прямая не пересекает другую плоскость, д) выполняются все случаи, указанные в пунктах а - г.

6.Точка Е не принадлежит плоскости прямоугольника ABCD, BE $\perp$ AB, BE $\perp$ BC. Тогда прямая и плоскость BCE:

а) параллельны, б) перпендикулярны, в) скрещиваются, г) прямая лежит в плоскости, д) перпендикулярны, но не пересекаются.

7.Какое из следующих утверждений неверно?

а) перпендикуляр и наклонная, выходящие из одной точки, имеют равные длины, б) проекцией прямой на плоскость является точка или прямая, в) наклонные разной длины, проведенные к плоскости из одной точки, имеют проекции разных длин, г) прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна к ее проекции, д) расстояние от произвольной точки одной из параллельных плоскостей до другой плоскости называется расстоянием между параллельными плоскостями.

8.Расстояния от точки М до сторон прямоугольного треугольника ABC (угол С равен 90°) равны. Какое из следующих утверждений верно?

а) плоскости МАВ и АВС перпендикулярны, б) плоскости МВС и АВС перпендикулярны, в) плоскости МАС и АВС перпендикулярны, г) плоскости МАС и МВС перпендикулярны, д) условия в пунктах а - г неверны.

9.Угол между двумя плоскостями равен 80°. Какое из следующих утверждений неверно?

а) плоскости пересекаются, б) в одной из плоскостей найдется прямая, перпендикулярная другой плоскости, в) в одной из плоскостей все прямые не перпендикулярны другой плоскости, г) в одной из плоскостей найдется прямая, параллельная другой плоскости, д) плоскости не перпендикулярны.

10.Какое из следующих утверждений верно?

а) градусная мера двугранного угла не превосходит 90°, б) двугранным углом называется плоский угол, образованный прямой *а* и двумя полуплоскостями с общей границей *а*, в) если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны, г) угол между плоскостями всегда тупой, д) все линейные углы двугранного угла различны.

11.Какое из следующих утверждений верно?

а) в прямоугольном параллелепипеде все шесть граней - произвольные параллелограммы, б) все двугранные углы прямоугольного параллелепипеда - острые, в) прямоугольный параллелепипед, у которого все три измерения равны, называется кубом, г) квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме трех его измерений, д) параллелепипед называется прямоугольным, если его боковые ребра перпендикулярны к основанию.

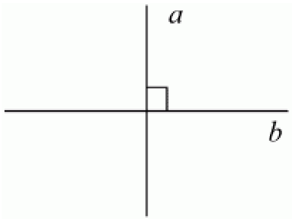
12.Длины трех ребер, имеющих общую вершину, называются:

а) высотами прямоугольного параллелепипеда, б) диагоналями прямоугольного параллелепипеда, в) измерениями прямоугольного параллелепипеда, г) диагоналями основания прямоугольного параллелепипеда, д) смежными ребрами прямоугольного параллелепипеда.

13. Решите задачу:
Через вершины A и B прямоугольника $ABCD$ проведены параллельные прямые AA_1 и BB_1, не лежащие в плоскости прямоугольника. Известно, что $AA_1 \perp AB$, $AA_1 \perp AD$. Найдите B_1B, если $B_1D = 25$ см, $AB = 12$ см, $AD = 16$ см.

Практическая работа №62:
Определение перпендикуляра, наклонной. Теорема о трёх перпендикулярах

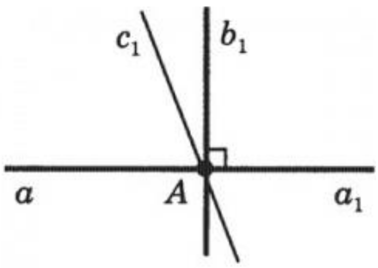
Цель: научиться на основании темы составлять тесты и кроссворды.
Теоретический материал:
Перпендикулярные прямые



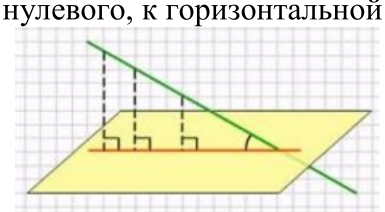
Определение. Две прямые называются перпендикулярными, если они пересекаются под прямым углом.

Перпендикулярность прямых обозначается знаком ⊥ Запись $a \perp b$ читается:
Прямая a перпендикулярна прямой b.

Теорема. Через каждую точку прямой можно провести перпендикулярную ей прямую, и только одну.

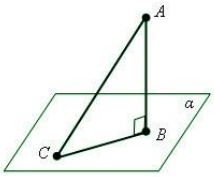


Наклонная прямая — это плоская поверхность, установленная под углом, отличным от прямого или нулевого, к горизонтальной поверхности.



Перпендикуляром, опущенным из данной точки данную плоскость, называется отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащий на прямой, перпендикулярной плоскости. Конец этого отрезка, лежащий в плоскости, называется основанием перпендикуляра.

Наклонной, проведенной из данной точки к данной плоскости, называется любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости, не являющийся перпендикуляром к плоскости. Конец отрезка, лежащий в плоскости, называется основанием наклонной. Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра наклонной, проведенных из одной и той же точки, называется проекцией наклонной.



AB – перпендикуляр к плоскости α.
AC – наклонная, CB – проекция наклонной AC на плоскость α.
C – основание наклонной, B - основание перпендикуляра.

Задания
Задача №1 *(3 балла).*

1. Как называется линия, соединяющая основания перпендикуляра и наклонной?

а) отрезок;
б) угол;
в) проекция;
г) расстояние.

2. Прямая проведенная в плоскости и перпендикулярная проекции наклонной на эту плоскость, перпендикулярна и...

а) самой себе;
б) самой наклонной;
в) самой проекции;
г) самому перпендикуляру.

3. Расстояние от точки до прямой равно длине...

а) наклонной;
б) медианы;
в) проекции; г)перпендикуляра

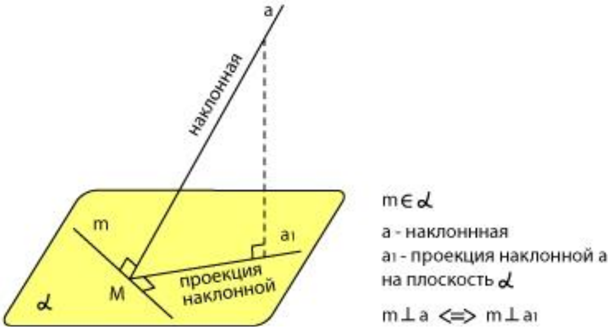
4. Из двух наклонных, исходящих из одной точки, не лежащей на данной плоскости, больше та, у которой...

а)перпендикуляр больше;
б) проекция меньше;
в) проекция больше;
г) перпендикуляр меньше.

5. Точка А не лежит в плоскости, а точка Е - принадлежит этой плоскости. АЕ = 13, проекция этого отрезка на плоскость равна 5. Каково расстояние от точки А до данной плоскости?

а) 144;
б) 8;
в) 18;
г) 12.

Прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной тогда и только тогда, когда она перпендикулярна проекции этой наклонной на данную плоскость.



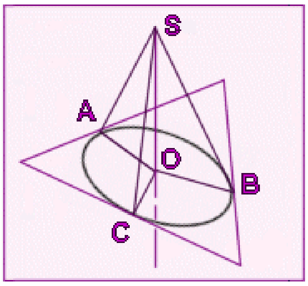
На рисунке показаны все три перпендикуляра.

Если прямая m, лежащая в плоскости, перпендикулярна проекции наклонной, то она перпендикулярна и самой наклонной.

Слова «тогда и только тогда» в формулировке теоремы означают, что прямая m перпендикулярна одновременно и наклонной, и ее проекции. Если m перпендикулярна наклонной, значит, перпендикулярна и ее проекции, и наоборот.

Пример решения задачи:

Через центр вписанной в треугольник окружности проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника. Докажите, что каждая точка этой прямой равноудалена от сторон треугольника.



Решение: Пусть **A**, **B**, **C** - точки касания сторон треугольника с окружностью, **O** - центр окружности и **S** - точка на перпендикуляре. Так как радиус **OA** перпендикулярен стороне треугольника, то по **теореме о** трех перпендикулярах отрезок **SA** есть перпендикуляр к этой стороне, а его длина - расстояние от точки **S** до стороны треугольника. по теореме Пифагора $SA^2=OA^2+SO^2=r^2+SO^2$, где **r** - радиус вписанной окружности. Аналогично получаем $SB^2=r^2+SO^2$ и $SC^2=r^2+SO^2$, т.е. все расстояния от точки **S** до сторон треугольника равны. Ч.т.д.

Задания:

Задача №1: Докажите, что через любую точку прямой в пространстве можно провести перпендикулярную ей прямую. *(1 балл)*

Задача №2: Докажите, что через любую точку А можно провести прямую, перпендикулярную данной плоскости. *(1 балл)*

Задача №3: Докажите, что если прямая параллельна плоскости, то все ее точки находятся на одинаковом расстоянии от плоскости. *(1 балл)*

Задача №4: Даны прямая и плоскость. Проведите через прямую а плоскость, перпендикулярную плоскости. *(1 балл)*

Задача № 5. Через центр вписанной в треугольник окружности проведена прямая, каждая точка этой прямой равноудалена от сторон треугольника. Докажите, что данная прямая перпендикулярна плоскости треугольника. *(1 балл)*

Практическая работа №63:

Понятие двугранного угла. Признак перпендикулярности плоскостей

Цель: Знать определения двугранного угла. Понятие линейного угла, определение градусной меры двугранного угла, уметь находить двугранные углы.

Теоретическая часть:

Двугранный угол — это часть пространства, заключённая между двумя полуплоскостями, имеющими одну общую границу.

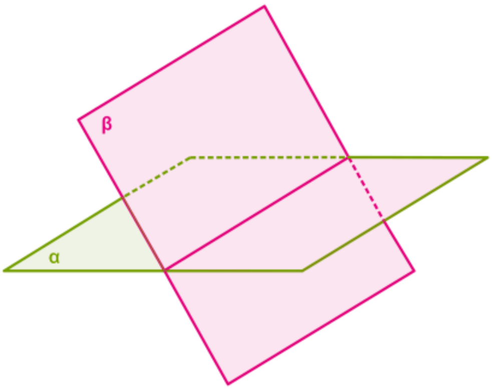


Рис. 2. Две пересекающиеся плоскости.

Если в пространстве пересекаются две плоскости, получаются четыре двугранных угла (аналогично как при пересечении двух прямых получаются четыре угла). Рассмотрим один из них.

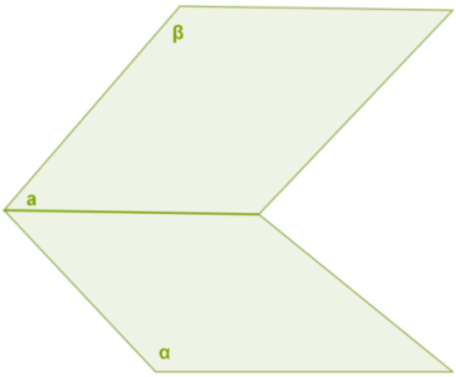


Рис. 3. Двугранный угол.

Полуплоскости α и β, образующие двугранный угол, называются его гранями. Общая прямая a этих граней называется **ребром** двугранного угла.

Выберем на ребре a двугранного угла произвольную точку C и проведём две пересекающиеся прямые AC⊥a и BC⊥a, а через эти прямые — плоскость γ перпендикулярно ребру a.

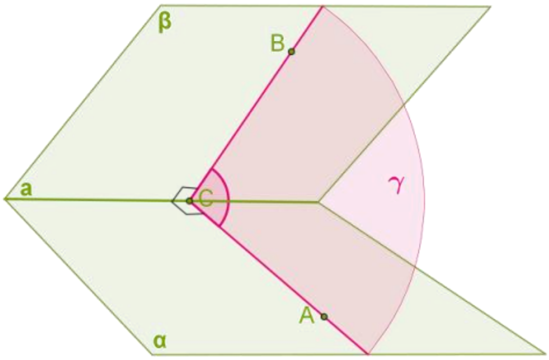


Рис. 4. Линейный угол двугранного угла.

Линии пересечения AC и BC полуплоскостей α и β с плоскостью γ образуют некоторый угол ∠ACB. Этот угол называется **линейным углом** двугранного угла. Величина линейного угла не зависит от выбора точки C на ребре a.

Величина двугранного угла 0° <∠ACB <180°.
Если плоскости параллельны, то угол между ними равен 0° по определению.
Если при пересечении плоскостей один из двугранных углов составляет 90°, то три остальных угла — тоже 90°. Эти плоскости называют перпендикулярными.

Следующие теоремы, которые здесь приведём без доказательств, могут пригодиться при решении задач.
1. Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

2. Плоскость, перпендикулярная прямой, по которой пересекаются две плоскости, перпендикулярна каждой из этих плоскостей.

3. Если две плоскости перпендикулярны, и в одной из них прямая проведена перпендикулярно линии пересечения плоскостей, то эта прямая перпендикулярна второй плоскости.

Многогранные углы

Объясним понятие многогранных углов.
Представим несколько лучей в пространстве с общим началом. Их можно представить тоже как часть линий пересечения плоскостей — трёх, четырёх или больше — и назвать рёбрами многогранного угла.

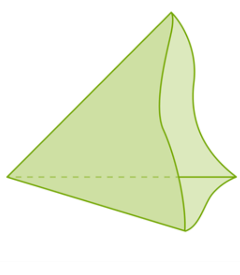


Рис. 5. Трёхгранный угол.

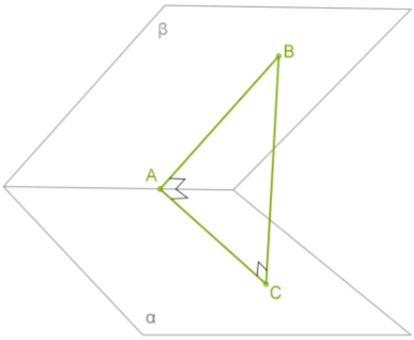
Каждые два луча образуют угол, который называют **плоским углом** многогранного угла.

Каждый плоский угол трёхгранного угла меньше суммы двух других плоских углов.

Сумма плоских углов многогранного угла меньше 360°.

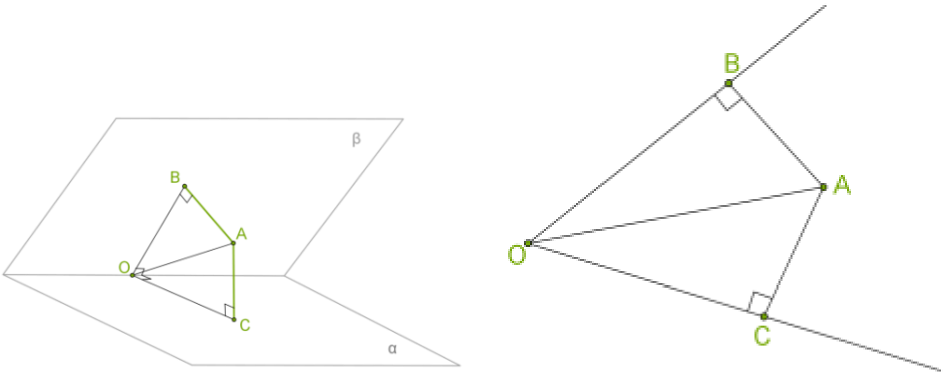
1 вариант

Двугранный угол, расстояние от точки до грани

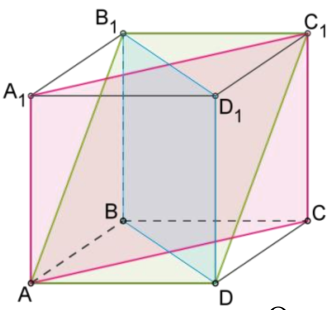


1. Двугранный угол равен 60°. На одной грани двугранного угла дана точка B, расстояние от которой до ребра равно 4 см. Чему равно расстояние от точки B до второй грани двугранного угла?

2. Двугранный угол равен 120° градусов. Внутри его дана точка A, которая находится на расстоянии 18 см от обеих граней угла. Чему равно расстояние от точки A до ребра двугранного угла?



3.



Дан куб с некоторыми плоскостями сечений.

1. Определи величину угла между плоскостями: $(A_1B_1C_1)$ и (ABC) —

1. 0
2. 90
3. 45
4. невозможно определить

2. Определи величину двугранного угла между плоскостями: (ACC_1) и (BDD_1) —

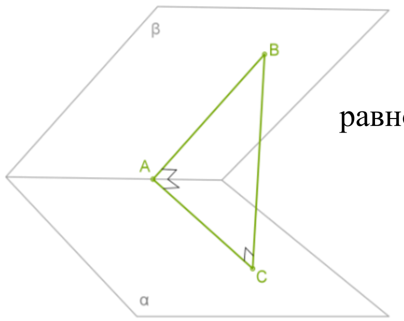
1. 0

2. 90
3. 45
4. невозможно определить

3. Определи величину двугранного угла между плоскостями: (АСС1) и (CDD1) —

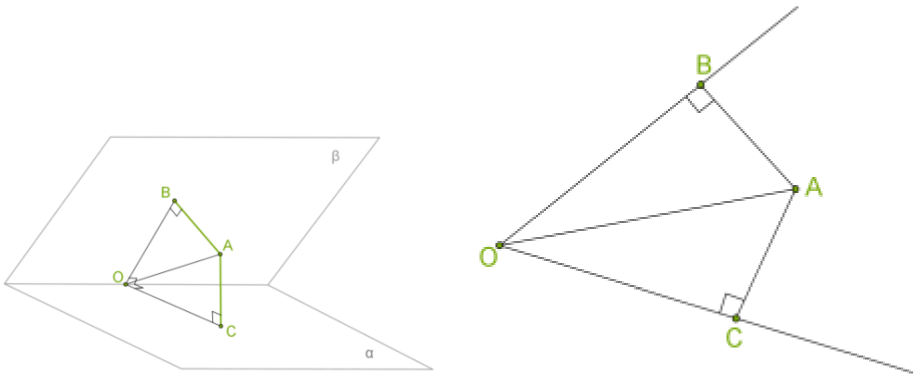
2 вариант

Двугранный угол, расстояние от точки до грани

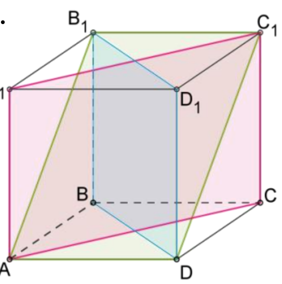


Двугранный угол равен 60°. На одной грани двугранного угла дана точка В, расстояние от которой до ребра равно 14 см. Чему равно расстояние от точки В до второй грани двугранного угла?

2. Двугранный угол равен $60°$ градусов. Внутри его дана точка A, которая находится на расстоянии 24 см от обеих граней угла. Чему равно расстояние от точки A до ребра двугранного угла?



3.



Дан куб с некоторыми плоскостями сечений.

1. Определи величину угла между плоскостями: (A1B1C1) и (ABC) —

1. 0
2. 90
3. 45
4. невозможно определить

2. Определи величину двугранного угла между плоскостями: (АСС1) и (BDD1) —

1. 0
2. 90
3. 45
4. невозможно определить

3. Определи величину двугранного угла между плоскостями: (BDD1) и (ADD1) —

1. 0
2. 90
3. 45
4. невозможно определить

Практическая работа №64:

Определение и физический смысл вектора в пространстве

Цель: закрепить умения и навыки нахождения координат вектора, длины вектора, угла между векторами

Для данных пар векторов выполните действия:

1) найдите координаты вектора $\vec{a}+\vec{b}$;
2) найдите координаты вектора $\overrightarrow{2a}-3\vec{b}$;
3) найдите длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
4) найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
5) найдите $Cos\alpha$ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

1 вариант	**2 вариант**	**3 вариант**
а) $\vec{a}(1;1;2)$ и $\vec{b}(5;4;3)$ б) $\vec{a}(1;0;-7)$ и $\vec{b}(4;4;7)$ в) $\vec{a}(7;0;1)$ и $\vec{b}(7;-6;6)$	а) $\vec{a}(1;0;2)$ и $\vec{b}(7;5;4)$ б) $\vec{a}(3;4;0)$ и $\vec{b}(7;1;0)$ в) $\vec{a}(2;7;-5)$ и $\vec{b}(5;7;3)$	а) $\vec{a}(5;7;2)$ и $\vec{b}(7;2;-5)$ б) $\vec{a}(-2;4;5)$ и $\vec{b}(5;4;7)$ в) $\vec{a}(5;5;2)$ и $\vec{b}(7;4;3)$
4 вариант	**5 вариант**	**6 вариант**
а) $\vec{a}(1;0;-1)$ и $\vec{b}(1;1;4)$ б) $\vec{a}(-7;5;0)$ и $\vec{b}(6;0;1)$ в) $\vec{a}(2;7;1)$ и $\vec{b}(5;4;3)$	а) $\vec{a}(-2;4;5)$ и $\vec{b}(7;5;4)$ б) $\vec{a}(-3;2;5)$ и $\vec{b}(2;5;3)$ в) $\vec{a}(1;6;-5)$ и $\vec{b}(6;1;3)$	а) $\vec{a}(-3;-4;5)$ и $\vec{b}(4;3;0)$ б) $\vec{a}(3;2;0)$ и $\vec{b}(0;5;1)$ в) $\vec{a}(1;3;-4)$ и $\vec{b}(5;7;2)$
7 вариант	**8 вариант**	**9 вариант**
а) $\vec{a}(-3;1;4)$ и $\vec{b}(1;4;6)$ б) $\vec{a}(-2;5;4)$ и $\vec{b}(5;7;4)$ в) $\vec{a}(-3;5;4)$ и $\vec{b}(7;0;1)$	а) $\vec{a}(1;1;0)$ и $\vec{b}(1;2;2)$ б) $\vec{a}(2;7;5)$ и $\vec{b}(-5;2;-7)$ в) $\vec{a}(3;1;2)$ и $\vec{b}(5;4;1)$	а) $\vec{a}(1;-1;2)$ и $\vec{b}(7;-2;1)$ б) $\vec{a}(-3;4;-5)$ и $\vec{b}(5;1;7)$ в) $\vec{a}(5;7;2)$и $\vec{b}(-7;4;3)$
10 вариант	**11 вариант**	**12 вариант**
а) $\vec{a}(5;-2;1)$ и $\vec{b}(4;0;3)$ б) $\vec{a}(-7;2;3)$ и $\vec{b}(2;2;0)$ в) $\vec{a}(8;0;1)$ и $\vec{b}(0;4;-2)$	а) $\vec{a}(5;-1;2)$ и $\vec{b}(6;-2;5)$ б) $\vec{a}(-5;4;3)$ и $\vec{b}(2;4;4)$ в) $\vec{a}(5;0;4)$ и $\vec{b}(3;4;-3)$	а) $\vec{a}(4;1;2)$ и $\vec{b}(-4;0;-5)$ б) $\vec{a}(-3;4;0)$ и $\vec{b}(5;-1;7)$ в) $\vec{a}(5;0;2)$ и $\vec{b}(6;4;-3)$
13 вариант	**14 вариант**	**15 вариант**
а) $\vec{a}(6;-1;3)$ и	а) $\vec{a}(-2;-1;1)$ и	а) $\vec{a}(5;-4;2)$ и $\vec{b}(2;-3;5)$

$\vec{b}(0;-2;5)$ б) $\vec{a}(-5;0;3)$ и $\vec{b}(2;7;4)$ в) $\vec{a}(5;-1;4)$ и $\vec{b}(0;3;-3)$	$\vec{b}(6;2;-5)$ б) $\vec{a}(-3;4;-3)$ и $\vec{b}(4;1;4)$ в) $\vec{a}(-3;0;7)$ и $\vec{b}(5;-4;2)$	б) $\vec{a}(-4;4;-3)$ и $\vec{b}(1;-1;4)$ в) $\vec{a}(5;0;4)$ и $\vec{b}(2;4;-2)$
16 вариант	**17 вариант**	**18 вариант**
а) $\vec{a}(5;-1;2)$ и $\vec{b}(0;-7;5)$ б) $\vec{a}(-2;1;3)$ и $\vec{b}(7;1;1)$ в) $\vec{a}(-2;0;4)$ и $\vec{b}(3;2;-5)$	а) $\vec{a}(2;-1;9)$ и $\vec{b}(6;-2;1)$ б) $\vec{a}(-5;4;0)$ и $\vec{b}(-2;3;7)$ в) $\vec{a}(7;0;1)$ и $\vec{b}(2;4;-2)$	а) $\vec{a}(1;-1;2)$ и $\vec{b}(6;-2;4)$ б) $\vec{a}(-5;0;3)$ и $\vec{b}(2;-1;4)$ в) $\vec{a}(2;0;4)$ и $\vec{b}(5;-4;3)$
19 вариант	**20 вариант**	**21 вариант**
а) $\vec{a}(4;1;-2)$ и $\vec{b}(-3;2;5)$ б) $\vec{a}(-1;0;3)$ и $\vec{b}(2;7;4)$ в) $\vec{a}(2;0;-4)$ и $\vec{b}(1;-1;3)$	а) $\vec{a}(5;-2;0)$ и $\vec{b}(1;-2;4)$ б) $\vec{a}(-3;5;3)$ и $\vec{b}(2;0;-4)$ в) $\vec{a}(3;0;-4)$ и $\vec{b}(4;-4;1)$	а) $\vec{a}(7;-1;2)$ и $\vec{b}(2;2;-5)$ б) $\vec{a}(-3;1;3)$ и $\vec{b}(2;6;0)$ в) $\vec{a}(8;0;1)$ и $\vec{b}(3;-4;1)$
22 вариант	**23 вариант**	**24 вариант**
а) $\vec{a}(2;-1;2)$ и $\vec{b}(5;-2;0)$ б) $\vec{a}(-1;1;3)$ и $\vec{b}(2;-4;4)$ в) $\vec{a}(2;0;-4)$ и $\vec{b}(7;2;-3)$	а) $\vec{a}(5;-1;2)$ и $\vec{b}(1;-3;5)$ б) $\vec{a}(-4;5;3)$ и $\vec{b}(6;0;4)$ в) $\vec{a}(4;0;-3)$ и $\vec{b}(-2;-3;1)$	а) $\vec{a}(9;-1;2)$ и $\vec{b}(1;-2;4)$ б) $\vec{a}(-6;1;3)$ и $\vec{b}(2;7;3)$ в) $\vec{a}(4;-1;3)$ и $\vec{b}(3;4;-3)$
25 вариант	**26 вариант**	**27 вариант**
а) $\vec{a}(4;-1;1)$ и $\vec{b}(2;-1;5)$ б) $\vec{a}(-4;1;3)$ и $\vec{b}(2;3;4)$ в) $\vec{a}(7;0;-1)$ и $\vec{b}(3;-4;3)$	а) $\vec{a}(5;1;-5)$ и $\vec{b}(-1;2;1)$ б) $\vec{a}(5;4;-3)$ и $\vec{b}(2;0;4)$ в) $\vec{a}(1;0;4)$ и $\vec{b}(3;-4;4)$	а) $\vec{a}(5;-1;3)$ и $\vec{b}(2;-1;5)$ б) $\vec{a}(-5;1;-3)$ и $\vec{b}(2;7;0)$ в) $\vec{a}(-4;0;4)$ и $\vec{b}(-3;1;3)$

Практическая работа №67:

Декартовы координаты в пространстве. Координаты вектора, расстояние между точками, координаты середины отрезка

Цель: научиться находить координаты середины отрезка; координаты вектора по координатам начала и конца; выполнять действия над векторами, заданными своими координатами;

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

1.Повторить материал в учебнике.

2. Ответить на контрольные вопросы:

-Связь координат вектора с координатами начала и конца.

-Вычисление длины вектора.

-Формула расстояния между двумя точками.

-Скалярное произведение векторов.

-Формула для нахождения координат середины отрезка.

- Условие коллинеарности двух векторов

Содержание практической работы

I вариант

1. Точка А – середина отрезка MN.
Найти координаты точки А и длину отрезка MN, если N (5; 2; -3);
M (3; -2; 1)
(1 балл)

2. Точки А (-2; -4; 1) и В (-5; -6; -1) и вершины параллелограмма ABCD, точка О (1; 3; 2) – точка пересечения диагоналей.
Найти координаты вершин С и D.
(2 балла)

3.Даны точки А (-2; 1; 3), В(3; -2; -1),
С (-3; 4; 2).
Найти:

1) Координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$
(0,5 балла)
2) Модули векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$
(0,5 балла)
3) Координаты векторов $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$
(1 балл)

II вариант

1. Точка Р – середина отрезка АВ.
Найти координаты точки А и длину отрезка АВ, если В (-6; 5; -3);
M (3; -2; 1)
(1 балл)

2. Точки А (2; -4; 1), В (-6; 2; 3) и D (-4; 0; -1) вершины параллелограмма ABCD, точка О (1; 3; 2) – точка пересечения диагоналей.
Найти координаты вершин С и D.
(2 балла)

3.Даны точки А (-2; 1; 3), В(3; -2; -1),
С (-3; 4; 2).
Найти:

1) Координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$
(0,5 балла)
2) Модули векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$
(0,5 балла)
3) Координаты векторов $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$

(1 балл)

4.Даны векторы

$\overrightarrow{\alpha}\ (-2;\ 8;-4);\ \vec{в}(1;\ 4-4;z)$.*При каком значениии z вектора* α *и* $\vec{в}$ *коллинеарны*?

(2 балла)

5. Вычислить скалярное произведение векторов $\left(2\vec{\alpha}+\vec{в}\right)\cdot\overrightarrow{\alpha},$ *если* $\vec{\alpha}(1;0;3),\ \vec{в}(2;-1;1)$

(3балла)

4.Даны векторы

$\overrightarrow{m}\ (-2;\ 8;-4);\ \overrightarrow{n}\ (1;\ 4-4;z)$.*При каком значениии z вектора m и n коллинеарны*?

(2 балла)

5. Вычислить скалярное произведение векторов $\left(\vec{\alpha}-2\vec{в}\right)\cdot\overrightarrow{в},$ *если* $\vec{\alpha}(1;0;4),\ \vec{в}(0;1;2)$

(3балла)

Практическая работа №65:

Сложение и умножение вектора на число

Цель:
сформировать у студентов умение находить координаты вектора;
производить действия над векторами (сложение, вычитание, умножение вектора на число), вычислять скалярное произведение; вычислять угол между векторами; находить проекцию вектора на ось.

При выполнении практической работы студент должен знать:

- определения: вектора, модуль вектора, равные вектора;
- правила работы с векторами;
- условия перпендикулярности и коллинеарности векторов;
- скалярного произведения векторов.

Студент должен уметь:

- находить координаты вектора
- вычислять скалярное произведение;
- находить угол между векторами;
- находить проекцию вектора на ось.

Порядок выполнения работы:

1.Изучить теоретический материал по теме «Вектора в пространстве».
2.Рассмотреть примеры решения типовых заданий.
3. Ответить на контрольные вопросы.
4. Выполнить самостоятельную работу.
5. Сдать отчет по проделанной работе.

Теоретическая часть :

Пусть в трехмерном пространстве заданы векторы $\bar{a}\{x_1;y_1;z_1\},\bar{b}\{x_2;y_2;z_2\},\bar{c}\{x_3;y_3;z_3\}$ своими координатами.

1). *Сложение* двух векторов производится поэлементно, то есть если $\bar{c}=\bar{a}+\bar{b}$, то в координатной форме записывается:

$$c\{x_3;y_3;z_3\}=\{x_1;y_1;z_1\}+\{x_2;y_2;z_2\}=\{x_1+x_2;y_1+y_2;z_1+z_2\}$$

2) Умножение вектора на число.

В случае n-мерного пространства произведение вектора $a = \{a_1 ; a_2; \dots ; a_n\}$ и числа k можно найти воспользовавшись следующей формулой:

$k \cdot a = \{k \cdot a_1; k \cdot a_2; \dots ; k \cdot a_n\}$

Пример 1. Найти произведение вектора $\boxed{a} = \{1; 2\}$ на 3.

Решение: $3 \cdot \boxed{a} = \{3 \cdot 1; 3 \cdot 2\} = \{3; 6\}$.

3). Координаты вектора.

Вектор AB заданный координатами точек $A(A_x ; A_y ; A_z)$ и $B(B_x ; B_y ; B_z)$ можно найти воспользовавшись следующей формулой

$AB = \{B_x - A_x ; B_y - A_y ; B_z - A_z\}$

Пример 2. Найти координаты вектора AB, если A(1; 4; 5), B(3; 1; 1).

Решение: AB = {3 - 1; 1 - 4; 1 - 5} = {2; -3; -4}.

4)Длина вектора.

Если даны две точки пространства $A(x_1;y_1;z_1)$ и $B(x_2;y_2;z_2)$, то **длину** отрезка AB можно вычислить по формуле $|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

Пример 3

Даны точки $A(-3;5)$ и $B(1;-3)$. Найти длину отрезка AB.

Решение: по соответствующей формуле:

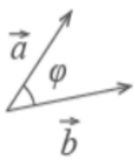
$$|AB|=\sqrt{(1-(-3))^2+(-3-5)^2}=\sqrt{4^2+(-8)^2}=\sqrt{16+64}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$$

Ответ: $|AB|=4\sqrt{5}$ ед. $\approx 8{,}94$ ед.

5. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением векторов называется произведение длин векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a}\bullet\vec{b} = |\vec{a}|\bullet|\vec{b}|\bullet\cos\varphi$$



6. Из формулы для скалярного произведения можно найти **угол между векторами:**

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{|\vec{a}|\bullet|\vec{b}|} = \frac{x_a\bullet x_b+y_a\bullet y_b}{\sqrt{x_a^2+y_a^2}\ \bullet\ \sqrt{x_b^2+y_b^2}}$$

b

6. Из формулы для скалярного произведения можно найти **угол между векторами:**

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{|\vec{a}|\bullet|\vec{b}|} = \frac{x_a\bullet x_b + y_a\bullet y_b}{\sqrt{x_a^2+y_a^2}\ \bullet\ \sqrt{x_b^2+y_b^2}}$$

Пример 4. Найти угол между векторами a = {3; 4; 0} и b = {4; 4; 2}.

Решение: Найдем скалярное произведение векторов:

$a\cdot b = 3\cdot 4 + 4\cdot 4 + 0\cdot 2 = 12 + 16 + 0 = 28.$

Найдем модули векторов:

$|a| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

$|b| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 16 + 4} = \sqrt{36} = 6$

Найдем угол между векторами:

$$\cos\alpha = \frac{a\cdot b}{|a|\cdot|b|} = \frac{28}{5\cdot 6} = \frac{14}{15}$$

Практическая часть:

Вариант 1

№ п/п	Название операции	Формулы
1	**Найти сумму векторов**	$\vec{a}\{1;-2;3\}$, $\vec{b}\{4;0;-1\}$ $\vec{a}+\vec{b}\{x_1+x_2\ ;\ y_1+y_2\ ;\ z_1+z_2\}$
2	**Найти разность векторов**	$\vec{a}\{4;1;-3\}$, $\vec{b}\{0;-5;2\}$ $\vec{a}-\vec{b}\{x_1-x_2\ ;\ y_1-y_2\ ;\ z_1-z_2\}$
3	**Найти произведение вектора на число**	$\vec{a}\{-1;3;1\}$, δ – число $\delta=-3$ $\delta\vec{a}\{\delta\cdot x;\ \delta y\ ;\delta z\}$
4	**Вычислить координаты середины отрезка**	**Точка А**$(1;2;-3)$**. Точка В (-3;4;-1) .Точка С-**

		середина отрезка АВ. С(x_c $y_c;z_c$) $x_c=\frac{x_1+x_2}{2}$ $y_c=\frac{y_1+y_2}{2}$; $z_c=\frac{z_1+z_2}{2}$.
5	**Найти координаты вектора**	**Точка А (5;0;−3). ТочкаВ (-1;4;-7) Находим координаты вектора $\overrightarrow{AB}$. Из координат конца вычислить координаты начала вектора** $\overrightarrow{AB}\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}$
6	**Найти длину вектора**	$\vec{a}\{3,-2,0\}$ $\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
7	**Вычислить скалярное произведение векторов**	$\vec{a}\{-2;3;7\}$, $\vec{b}\{-9;0;2\}$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2$
8	**Найти косинус угла между векторами**	$\vec{a}\{2;0;1\}$, $\vec{b}\{-3;1;2\}$ $\cos\alpha=\frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$
9	**При каких значениях m и n векторы коллинеарны?**	$\vec{a}\{m;3;1\}$, $\vec{b}\{1;n;2\}$ $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}=k$
10	**Проверьте перпендикулярность векторов**	$\vec{a}\{-4;0;1\}$, $\vec{b}\{2;7;8\}$ $x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2=0$ - **условие перпендикулярности векторов**

Вариант 2

№ п/п	**Название операции**	**Формулы**
1	**Найти сумму векторов**	$\vec{a}\{2;-3;4\}$, $\vec{b}\{-1;2;0\}$ $\vec{a}+\vec{b}\{x_1+x_2;\ y_1+y_2;\ z_1+z_2\}$
2	**Найти разность векторов**	$\vec{a}\{4;-5;7\}$, $\vec{b}\{3;-1;2\}$ $\vec{a}-\vec{b}\{x_1-x_2;\ y_1-y_2;\ z_1-z_2\}$
3	**Найти произведение вектора на число**	$\vec{a}\{-2;4;0\}$, δ – число $\delta=-4$ $\delta\vec{a}\{\delta\cdot x;\ \delta y;\delta z\}$
4	**Вычислить координаты середины отрезка**	**Точка А (−3:1;2) ТочкаВ (2;-3;1) Точка С-середина отрезка АВ. С(**x_c,y_c,z_c**)** $x_c=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y_c=\frac{y_1+y_2}{2}$, $z_c=\frac{z_1+z_2}{2}$.

5	**Найти координаты вектора**	**Точка А(6; −3; 4). ТочкаВ (1;-4;7) .** **Находим координаты вектора $\overrightarrow{AB}$. Из координат конца вычислить координаты начала вектора** $\overrightarrow{AB}\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}$
6	**Найти длину вектора**	$\vec{a}\{0,2,-2\}$ $\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
7	**Вычислить скалярное произведение векторов**	$\vec{a}\{-3;2;9\}$, $\vec{b}\{-7;0;3\}$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2$
8	**Найти косинус угла между векторами**	$\vec{a}\{4;1;0\}$, $\vec{b}\{-5;3;1\}$ $\cos\alpha=\dfrac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$
9	**При каких значениях m и n векторы коллинеарны?**	$\vec{a}\{m;5;3\}$, $\vec{b}\{2;n;4\}$ $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}=k$
10	**Проверьте перпендикулярность векторов**	$\vec{a}\{0;-3;2\}$, $\vec{b}\{9;4;6\}$ $x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2=0$ - **условие перпендикулярности векторов**

Критерий оценки: «5» - 9-10 заданий; «4» -7-8 заданий; «3» -5-6 заданий

Практическая работа №66:
Разложение вектора. Понятие компланарности

Цель: уметь применять основные определения и теоремы по теме «Разложение вектора по трем некомпланарным векторам» при обосновании этапов решения задач; уметь выполнять чертежи по условию задачи, понимать чертежи, находить на чертежах векторы, уметь раскладывать вектор по данным векторам, используя правило параллелепипеда, параллелограмма, треугольника, знать определение коллинеарных и компланарных векторов.

Оборудование: тетрадь для практических работ, ручка, простой карандаш, линейка, методические рекомендации по выполнению работы.

Методические рекомендации по выполнению практической работы:

Задание №1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром m. Точка К – середина ребра B_1C_1. Разложить вектор $\overrightarrow{AK}$ по векторам $\vec{a}=\overrightarrow{AB}, \vec{b}=\overrightarrow{AD}, \vec{c}=\overrightarrow{AA_1}$.

Решение: построим заданный куб (рис. 1).

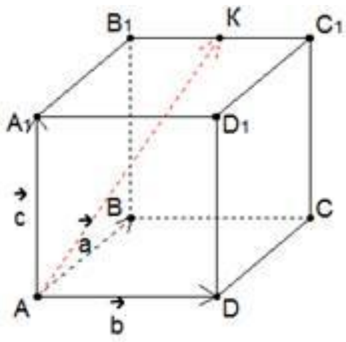


Рис. 1.

Векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ задается плоскость квадрата $ABCD$. Третий вектор $\vec{c}$ не лежит в этой плоскости, отсюда заключаем, что три заданных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ некомпланарны, и мы можем выразить через них искомый вектор $\overrightarrow{AK}$. Найдем вектор $\overrightarrow{AK}$ по правилу многоугольника. $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1K}$. Вектор $\overrightarrow{AA_1}$ мы по условию обозначили как вектор $\vec{c}$. Вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ согласно свойствам куба равен вектору $\overrightarrow{AB}$, обозначенному за вектор $\vec{a}$.

Вектор $\overrightarrow{B_1K}$ составляет половину вектора $\overrightarrow{B_1C_1}$, так как точка К – середина ребра B_1C_1 по условию: $\overrightarrow{B_1K} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B_1C_1}$. Вектор $\overrightarrow{B_1C_1}$, согласно свойствам куба, равен вектору $\overrightarrow{AD}$, обозначенному как вектор $\vec{b}$. Имеем: $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1K} = \vec{c} + \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

Так, заданный вектор выражен через три некомпланарных вектора. Осталось найти его длину.

Задание №2. Задан треугольник ABC. Точка М – точка пересечения медиан. Точка О – произвольная точка пространства. Разложить вектор $\overrightarrow{OM}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$. (рис. 1)

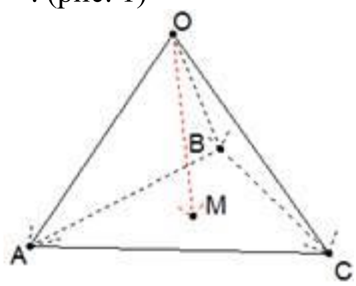


Рис. 2.

Согласно правилу треугольника $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \vec{a} + \overrightarrow{AM}$.

Продлим отрезок AM до пересечения со стороной BC треугольника (рисунок 3), получим точку A_1 – середину этой стороны (точка М по условию точка пересечения медиан треугольника). Кроме того, вспомним свойство медиан треугольника: медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая рассекает их в отношении 2:1, считая от вершины. Так, имеем: $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$

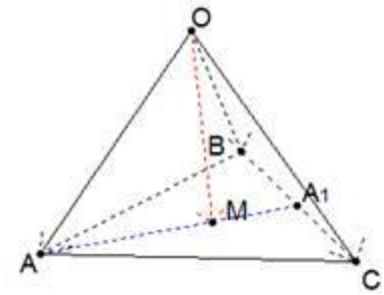


Рис. 3. Дополнительное построение к задаче 2

Снова применим правило треугольника: $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1})$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$\overrightarrow{BA_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b})$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\left(\vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b})\right) = \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{OM} = \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

Задания для самостоятельной работы:

Вариант №1

Задание №1. Дан $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед. Точки К и Т – середины ребер ВС и D_1C_1 соответственно. Разложите векторы: а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AK}$; в) $\overrightarrow{CT}$; г) $\overrightarrow{CA_1}$; д) $\overrightarrow{DK}$; е) $\overrightarrow{BT}$; ж) $\overrightarrow{A_1K}$
по векторам $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CC_1}$.

Задание №2. Дан ABCD – тетраэдр. Точка М – точка пересечения медиан треугольника ABC, причем $\overrightarrow{DA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{c}$. Разложите векторы:
а) $\overrightarrow{DM}$; б) $\overrightarrow{AB}$; в) $\overrightarrow{AM}$
по векторам: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Вариант №2

Задание №1. Дан $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед. Причем АК:КВ=3:2, A_1T: TD_1=1:4. Разложите векторы: а) $\overrightarrow{AK}$; б) $\overrightarrow{AT}$; в) $\overrightarrow{AC}$; г) $\overrightarrow{DT}$; д) $\overrightarrow{DK}$; е) $\overrightarrow{AC_1}$; ж) $\overrightarrow{KT}$
по векторам $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1}$.

Задание №2. Дан ABCD – тетраэдр. Точка Т – середина ребра СВ, Н - точка пересечения медиан треугольника АВС. Разложите векторы:
а) $\overrightarrow{DT}$; б) $\overrightarrow{AT}$; в) $\overrightarrow{CH}$
по векторам: $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}$.

Контрольные вопросы (ответьте письменно)**:**

1. Дайте определение вектора.
2. Дайте определение нулевого вектора.
3. Дайте определение длины вектора.
4. Дайте определение коллинеарных векторов.
5. Сформулируйте правило треугольника для сложения векторов.
6. Сформулируйте правило параллелограмма для сложения векторов.
7. Дайте определение разности векторов.
8. Дайте определение умножении я вектора на число.

9. Дайте определение компланарных векторов.
10. Сформулируйте признак компланарности трех векторов.
11. Сформулируйте правило параллелепипеда.
12. Сформулируйте теорему о разложении вектора по трем некомпланарным векторам.

Практическая работа №67:
Декартовы координаты в пространстве. Координаты вектора, расстояние между точками, координаты середины отрезка

Цель: Закрепить понятие декартовы координаты в пространстве, отработать навыки работы с формулами расстояния между точками, координатами середины отрезка

Теоретическая часть:

Координаты на плоскости и в пространстве можно вводить бесконечным числом различных способов.

Решая геометрическую, физическую, химическую задачу можно использовать различные координатные системы: прямоугольную, полярную, цилиндрическую, сферическую. (Показ моделей кристаллической решётки поваренной соли)

В общеобразовательном курсе изучается прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве. Иначе её называют Декартовой системой координат по имени французского ученого философа Рене Декарта (1596 – 1650) впервые введшего координаты в геометрию.

Рене Декарт родился в 1596 г. в городе Лаэ на юге Франции, в дворянской семье. Отец хотел сделать из Рене офицера. Для этого в 1613 г. он отправил Рене в Париж. Много лет пришлось Декарту пробыть в армии, участвовать в военных походах в Голландии, Германии, Венгрии, Чехии, Италии, в осаде крепости гугенотов Ла-Рошали. Но Рене интересовала философия, физика и математика. Вскоре по приезде в Париж он познакомился с учеником Виета, видным математиком того времени — Мерсеном, а затем и с другими математиками Франции. Будучи в армии, Декарт все свое свободное время отдавал занятиям математикой. Он изучил алгебру немецких, математику французских и греческих ученых.

После взятия Ла-Рошали в 1628 г. Декарт уходит из армии. Он ведет уединенный образ жизни с тем, чтобы реализовать намеченные обширные планы научных работ.

Философские взгляды Декарта не соответствовали требованиям католической церкви. Поэтому он переселился в Голландию, где прожил 20 лет, с 1629 по 1649 г., но из-за гонений протестантской церкви в 1649 г. переехал в Стокгольм. Но суровый северный климат Швеции оказался для Декарта губительным, и он умер от простуды в 1650 г.

Декарт был крупнейшим философом и математиком своего времени. В основе его философии лежал материализм. Самым известным трудом Декарта является его “Геометрия”. Декарт ввел систему координат, которой пользуются все и в настоящее время. Он установил соответствие между числами и отрезками прямой и таким образом ввел алгебраический метод в геометрию. Эти открытия Декарта дали огромный толчок развитию как геометрии, так и другим разделам математики, оптики. Появилась возможность изображать зависимость величин графически на координатной плоскости, числа - отрезками и выполнять арифметические действия над отрезками и другими геометрическими величинами, а также различными функциями. Это был совершенно новый метод, отличавшийся красотой, изяществом и простотой.

Сегодня на уроке мы продолжим изучение декартовой системы координат, и покажем, что координаты в пространстве вводятся также просто, как и координаты на плоскости.

В своё время Рене Декарт сказал: “… потомки будут благодарны мне не только за то, что я сказал, но и за то, что я не сказал и тем самым дал им возможность и удовольствие додуматься до этого самостоятельно”. Я предоставлю вам возможность и удовольствие разобраться с декартовой системой координат самостоятельно.

Определение 1. Если через точку пространства проведены 3 попарно перпендикулярные прямые, на каждой из них выбрано направление и выбрана единица измерения отрезков, то говорят, что задана прямоугольная система координат в пространстве.

Определение 2. Прямые с выбранными на них направлениями называются осями координат, а их общая точка – началом координат. Она обозначается буквой О. Оси координат обозначаются так: Ох, Оу. Их называют: ось абсцисс, ось ординат, ось аппликат. Вся система обозначается Oxyz.

Определение 3. Три плоскости, проходящие соответственно через оси координат Ох и Оу, Оу и Oz, Oz и Ох - координатные плоскости. Их обозначают Оху, Oyz, Ozx.

Точка О разделяет каждую из осей координат на 2 луча, один из них – положительная полуось, другой – отрицательная полуось.

Определение 4. В прямоугольной системе координат каждой точке М пространства сопоставляется тройка чисел, которые называются её координатами.

Проведем через точку М три плоскости, перепендикулярные к осям координат, и обозначим через М1, М2 и М3, точки пересечения этих плоскостей соответственно с осями абсцисс, ординат и аппликат. М1 – абсцисса, М2 – ордината, М3 – аппликата точки М. Координаты точки М записываются: М (х; у; z), х – абсцисса, у – ордината.

Практическая работа

1. Сформулируйте отличие декартовой системы координат на плоскости и в пространстве
2. Назовите оси координат на плоскости? Назовите оси координат в пространстве? Название, какой оси мы не изучали? (Знакомство с новым словом “аппликата”)
4. Какие плоскости рассматриваются в планиметрии (в пространстве)?
5. Назовите координату начала координат на плоскости (в пространстве)?
6. Какие еще компоненты должна иметь система координат на плоскости и в пространстве?
7. Как задается координата точки на плоскости и в пространстве?

На плоскости	В пространстве
2 оси, ОУ- ось ординат, ОХ- ось абсцисс	3 оси, ОХ - ось абсцисс, ОУ – ось ординат, OZ - ось аппликат.
ОХ перпендикулярна ОУ	ОХ перпендикулярна ОУ, ОХ перпендикулярна OZ , ОУ перпендикулярна OZ.
(О;О)	(О;О;О)
Направление, единичный отрезок	Направление, единичный отрезок
Расстояние между точками. $d = \sqrt{(x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2}$	Расстояние между точками. d = v (x2 - x1)? + (y2 - y1)? + (z2 – z1)?

Координаты середины отрезка. $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$	Координаты середины отрезка $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$; $z = \dfrac{z_1 - z_2}{2}$

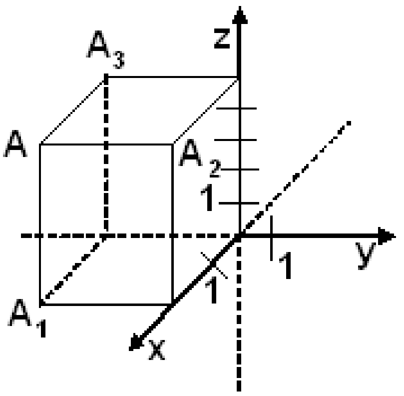
1. Какая из точек А(0,3,6), В(-1,5,0), С(-2,0,-7), К(0,0,6) лежит в плоскости Оху?
2. Какая из точек А(0,3,6), В(-1,0,0), С(-2,0,-7), К(0,0,6) лежит в плоскости Оуz?
3. Какая из точек А(0,3,6), В(-1,0,0), С(-2,0,-7), К(0,0,6) лежит на оси z?
4. Построить точку с заданными координатами А (2; - 3).
5. Построить точку с заданными координатами А (1; 2; 3).
6. Найти длину отрезка:

А (1;2;3;) и В (-1; 0; 5)
А (1;2;3) и В (х; 2 ;-3)

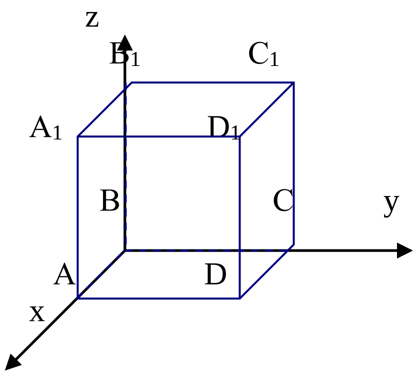
7. Найдите координаты точки М - середины отрезка

А(2;3;2), В (0;2;4) и С (4;1;0)
АС, АВ

А1(2;-3;0),А2(2;0;5),А3(0;-3;5).



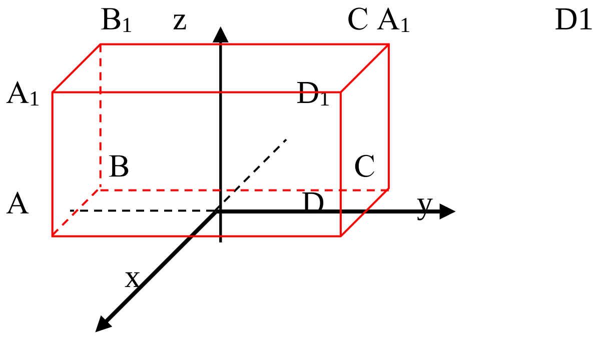
8. Дан куб с ребром, равным 4. Определите координаты его вершин.



Ответы:

A (4;0;0)	A_1 (4;0;4)
B (0;0;0)	B_1 (0;0;4)
C (0;4;0)	C_1 (0;4;4)
D (4;4;0)	D_1 (4;4;4)

9. Дан прямоугольный параллелепипед, измерения которого равны 6;4;4. Определите координаты его вершин.



Ответы:

A (2;-3;0)	A_1 (2;-3;4)
B (-2;-3;0)	B_1 (-2;-3;0)
C (-2;3;0)	C_1 (-2;3;4)
D (2;3;0)	D_1 (2;3;4)

	На плоскости	В пространстве
Чертеж		
Оси координат		
Плоскости		
Начало координат		
Дополнительные критерии		
Координаты точки		
Расстояние между точками.		
Координаты середины отрезка.		

Практическая работа №68: Угол между векторами. Скалярное произведение

научиться находить координаты вектора, скалярное произведение векторов, угол между векторами.

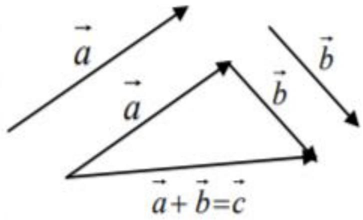
Вектором называется направленный отрезок прямой.

Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначается $\vec{AB}$. Для обозначения векторов употребляются также строчные латинские буквы: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}$....

Два вектора называются ***коллинеарными***, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Коллинеарные векторы, направленные в одну сторону, называются ***сонаправленными***. Коллинеарные векторы, направленные в противоположные стороны, - ***противоположно направленными***.

Два вектора называются ***равными***, если они сонаправлены и равны по модулю.

Сложение векторов. Для того чтобы построить сумму двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, нужно выбрать произвольную точку А и отложить от неё вектор $\vec{AB} = \vec{a}$, а затем от точки В отложить вектор $\vec{BC} = \vec{b}$. Тогда вектор $\vec{AC}$ является искомой суммой: $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.



Координаты вектора $\vec{AB}$ с началом в точке $A(x_1;y_1;z_1)$ и концом в точке $B\ (x_2;y_2;z_2)$ равны $(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$.

Длина вектора $\vec{AB}$ вычисляется по формуле:

$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

Суммой векторов $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ и $\vec{b}(b_1;b_2;b_3)$ называется вектор $\vec{c}$ с координатами $(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$.

Произведением вектора $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ на число λ называется вектор $\lambda\vec{a}(\lambda a_1;\lambda a_2;\lambda a_3)$.

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется произведение длин этих векторов на косинус угла между ними. Если хотя бы один из векторов нулевой, то их скалярное произведение равно нулю.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi,$$

где φ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Свойства скалярного произведения векторов:

- переместительное свойство: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;
- сочетательное свойство: $(k\,\vec{a})\cdot\vec{b}=k(\vec{b}\cdot\vec{a})$;
- распределительное свойство: $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.

Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений одноименных координат этих векторов:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

Формула для вычисления угла между векторами:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

Эта же формула в координатах:

$$\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

Практическая часть

Вариант 1

1. Дан $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед. Найти $\vec{AB}+\vec{AD}+\vec{AA_1}+\vec{CD}$.

2. Найти координаты вектора $0{,}3\vec{a}-0{,}6\vec{b}+0{,}2\vec{c}-5\vec{d}$, если $\vec{a}(-1;2;4)$, $\vec{b}(0;5;3)$, $\vec{c}(3;3;3)$, $\vec{d}(1;1;4)$.

3. Даны точки $A(1;\ 3;\ 0)$, $B(2;\ 3;\ -1)$ и $C(1;\ 2;\ -1)$. Вычислите угол между векторами $\vec{CA}$ и $\vec{CB}$.

4. Известно, что $\vec{a}\,\hat{}\,\vec{c}=\vec{b}\,\hat{}\,\vec{c}=30^\circ$, $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=|\vec{c}|=3$. Вычислите $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}$.

Вариант 2

1. Дана $ABCA_1B_1C_1$ – призма. Найти $\vec{AB}-\vec{AC_1}-\vec{BB_1}$.

2. Найти координаты вектора $0{,}5\vec{a}+0{,}1\vec{b}+0{,}3\vec{c}-6\vec{d}$, если $\vec{a}(5;-1;-1)$, $\vec{b}(-1;1;1)$, $\vec{c}(0;2;-2)$, $\vec{d}(-3;2;0)$.

3. Даны точки $A(5;\ 0;\ 0)$, $B(1;\ 1;\ 1)$ и $C(3;\ -1;\ 2)$. Вычислите угол между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$.

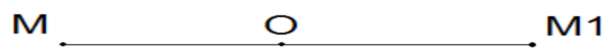
4. Известно, что $\vec{a}\,\hat{}\,\vec{c}=\vec{b}\,\hat{}\,\vec{c}=45^\circ$, $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=|\vec{c}|=6$. Вычислите $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}$.

Практическая работа №69:
Отображения пространства на себя. Виды движения

Цель работы: сформировать умения решать задачи на движение

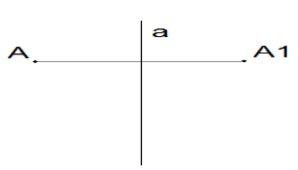
Теоретические сведения к практической работе:
При решении задач на движение пространства, надо знать виды движения. Это центральная симметрия, осевая симметрия, зеркальная симметрия и параллельный перенос.

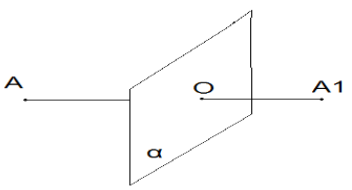
Центральная симметрия: Точки M и M_1 называются симметричными относительно т O (центр симметрии), если O – середина отрезка MM_1. Точка O считается симметричной самой себе.



т. M и т.M_1 симметричны относительно т.O.
т. O – центр симметрии
т.O – середина отрезка MM_1
т.O отображается сама на себя

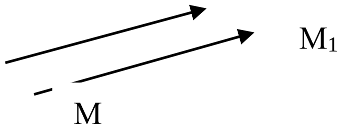
Осевая симметрия: Точки A и A_1 называются симметричными относительно прямой *a* (ось симметрии), если прямая *a* проходит через середину отрезка AA_1 и перпендикулярна к этому отрезку. Каждая точка прямой *a* считается симметричной самой себе.





<u>Зеркальная симметрия:</u> Точки AA_1 называются симметричными относительно плоскости α(плоскость симметрии), если плоскость α проходит через середину отрезка AA_1 и перпендикулярна к этому отрезку. Каждая точка плоскости считается симметричной самой себе.

Параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{p}$ называется отображение пространства на себя, при котором любая точка М переходит в точку M_1, что $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{p}$



Задания для самостоятельного решения

1 вариант.

1. При зеркальной симметрии прямая a отображается на прямую a_1. Докажите, что прямые a и a_1 лежат в одной плоскости (прямые a и a_1 параллельны).
2. При зеркальной симметрии относительно плоскости α плоскость β отображается на плоскость β_1. Докажите, что если $\beta \parallel \alpha$, то $\beta_1 \parallel \alpha$.
3. Докажите, что при параллельном переносе на вектор p, где $p \neq 0$, прямая , не параллельная вектору p и не содержащая этот вектор, отображается на параллельную ей прямую.

2 вариант.

1. При зеркальной симметрии прямая a отображается на прямую a_1. Докажите, что прямые a и a_1 лежат в одной плоскости (прямые a и a_1 пересекаются).
2. При зеркальной симметрии относительно плоскости α плоскость β отображается на плоскость β_1. Докажите, что если β перпендикулярна α , то β_1 совпадает с β.
3. Докажите, что при параллельном переносе на вектор p, где $p \neq 0$, прямая , параллельная вектору p или содержащая этот вектор, отображается на себя.

Контрольные вопросы:

1. Что такое центральная симметрия?
2. Что такое осевая симметрия?
3. Что такое зеркальная симметрия?

Практическая работа №70: Координатная плоскость. Вычисление расстояний и площадей на плоскости. Количественные расчёты

В разработке

Практическая работа №71: Понятие многогранника. Вершины, рёбра, грани многогранника. Развёртка.

Цель:

Теоретическая часть

Правильная призма.

Задание 1: Записать в тетрадь понятия многогранника, вершины, ребра, грани; правильного многогранника.

Многогранник - геометрическое тело, ограниченное со всех сторон плоскими многоугольниками, называемыми ***гранями***. Стороны граней называются ***ребрами***

Выпуклый многогранник называется ***правильным***, если все его грани — правильные одинаковые многоугольники и все многогранные углы при вершинах равны. Существует 5 видов правильных многогранников: тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр.

Задание 2: Записать в тетрадь теорему Эйлера

Теорема Эйлера о соотношении между числом вершин, ребер и граней выпуклого многогранника, доказательство которой Эйлер опубликовал в 1758 г.

Вершины + Грани - Рёбра = 2.

Многогранник	**Вершины**	**Грани**	**Рёбра**	**Оси симметрии**	**Плоскости симметрии**
Тетраэдр	4	4	6	3	6
Куб	8	6	12	9	9
Октаэдр	6	8	12	9	7
Додекаэдр	20	12	30	15	15
Икосаэдр	12	20	30	15	15

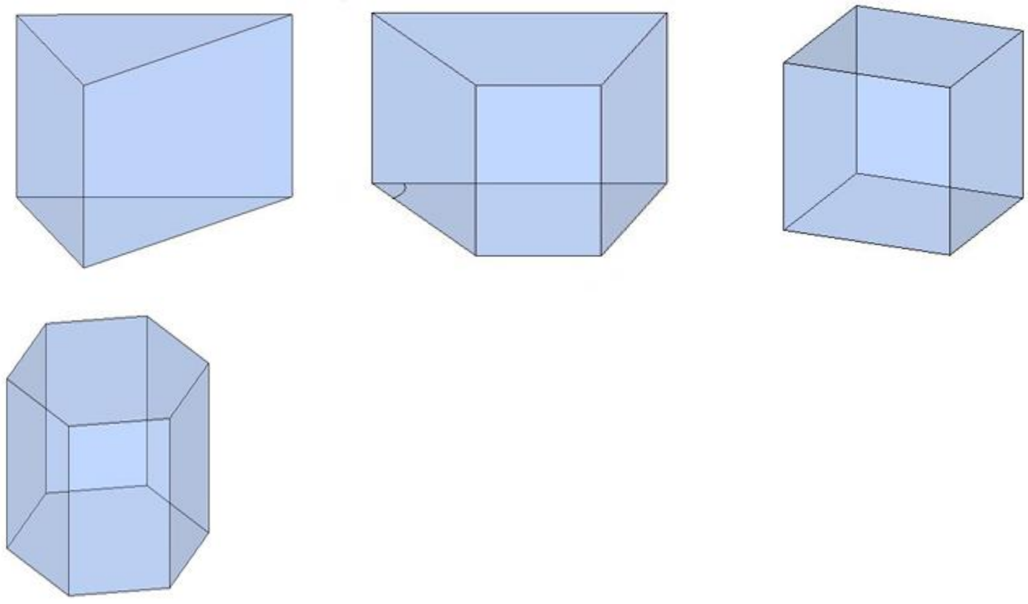
Задание 3. Изобразите тетраэдр, куб, октаэдр и укажите грани, ребра и вершины.

Задание 2: Записать в тетрадь ***понятие призм, ее элементов***

Призма — это многогранник, две грани которого являются равными многоугольниками, находящимися в параллельных плоскостях, а остальные грани — параллелограммами.

Грани, которые находятся в параллельных плоскостях, называются **основаниями** призмы, а остальные грани — **боковыми гранями** призмы

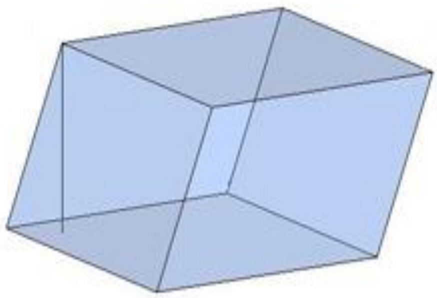
В зависимости от основания призмы бывают:



Треугольная Четырёхугольные Шестиугольная

Призма с боковыми рёбрами, перпендикулярными её основаниям, называется **прямой призмой**, как в предыдущих рисунках.

Прямая призма называется **правильной**, если её основания — правильные многоугольники.



Призма, боковые рёбра которой не перпендикулярны основаниям, называется **наклонной призмой**.

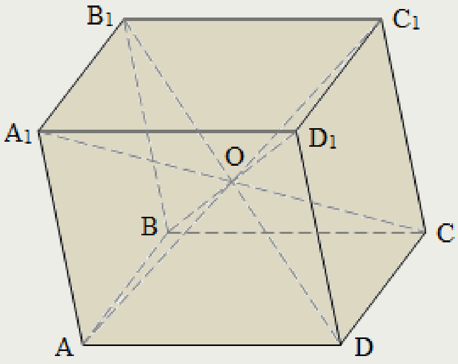
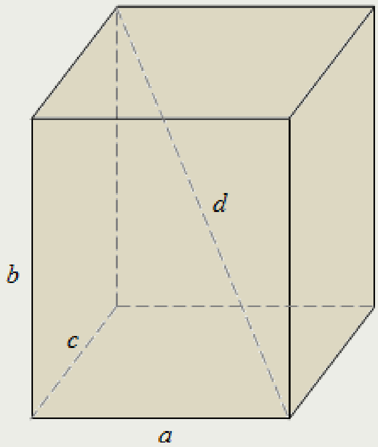
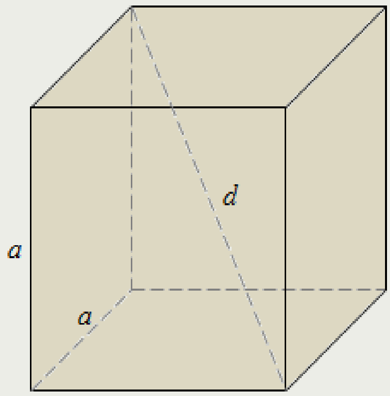
Расстояние между основаниями призмы называется **высотой** призмы.

- Высота прямой призмы совпадает с боковым ребром.
- Высота наклонной призмы — это перпендикуляр, проведенный между основаниями призмы. Часто перпендикуляр проводят с одной из вершин верхнего основания.
- Без дополнительных условий невозможно определить, в какую точку проектируется высота наклонной призмы.

Параллелепипед. Куб. Пирамида. Правильная пирамида. Усеченная пирамида. Тетраэдр.

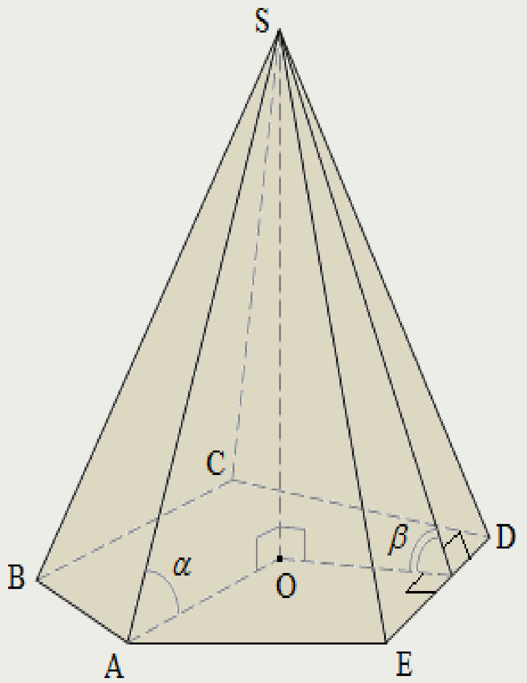
Задание 1: Записать в тетрадь определения

1. Параллелепипед. Куб.

Параллелепипед	
	Призма, в основании которой лежит параллелограмм, называется параллелепипедом. У параллелепипеда все грани – параллелограммы. Грани параллелепипеда, не имеющие общих вершин, называются противолежащими. У параллелепипеда противолежащие грани параллельны и равны. Диагональю параллелепипеда, как и многогранника вообще, называется отрезок, соединяющий вершины параллелепипеда, не лежащие в одной его грани. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам. Точка пересечения диагоналей параллелепипеда является его центром симметрии.
	Прямоугольным параллелепипедом называется такой прямой параллелепипед, в основании которого лежит прямоугольник. Все грани прямоугольного параллелепипеда являются прямоугольниками. Длины рёбер прямоугольного параллелепипеда, выходящих из одной вершины, называются его измерениями или линейными размерами. У прямоугольного параллелепипеда три измерения. В прямоугольном параллелепипеде квадрат любой диагонали равен сумме квадратов трёх его измерений: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$. В прямоугольном параллелепипеде верно:
	Прямоугольный параллелепипед, у которого все три измерения равны, называется кубом. Диагональ куба в квадратный корень из трёх раз больше его стороны: $d = a\sqrt{3}$. В кубе верно: ✓ для площади полной поверхности: $S_п = 6 \cdot a^2$, $S_п = 2 \cdot d^2$,

2. Пирамида. Правильная пирамида. Усеченная пирамида.

Пирамида



Пирамидой (например, SABCDE) называется многогранник, который состоит из плоского многоугольника (пятиугольник ABCDE) – основания пирамиды, точки (S), не лежащей в плоскости основания,– вершины пирамиды и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с точками основания.

Отрезки (SA, SB, SC, SD, SE), соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания, называются боковыми ребрами.

Поверхность пирамиды состоит из основания (пятиугольник ABCDE) и боковых граней. Каждая боковая грань – треугольник. Одной из его вершин является вершина пирамиды, а противолежащей стороной – сторона основания пирамиды:

ΔSAB, ΔSBC, ΔSCD, ΔSDE, ΔSEA – боковые грани.

Боковой поверхностью пирамиды называется сумма площадей ее боковых граней.

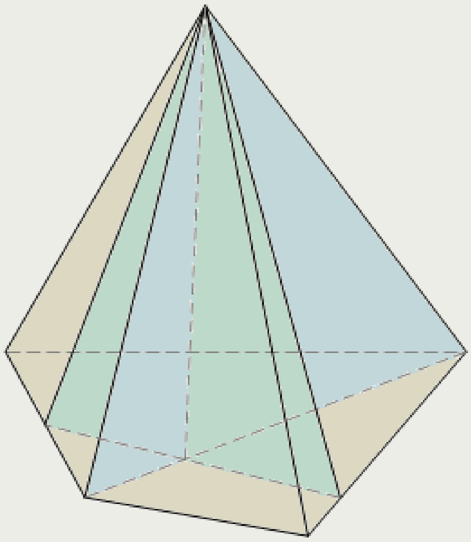
Высотой пирамиды (SO) называется перпендикуляр, проведённый из вершины пирамиды к плоскости основания.

Пирамида называется n-угольной, если ее основанием является n-угольник. Треугольная пирамида называется также тетраэдром.

α – угол наклона бокового ребра SA пирамиды к плоскости её основания;

β – угол наклона боковой грани (SED) пирамиды к плоскости её основания.

Основание высоты пирамиды является центром окружности, описанной около основания пирамиды, тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:



- все боковые ребра равны;
- боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы;
- боковые ребра образуют равные углы с высотой пирамиды.

Основание высоты пирамиды является центром окружности, вписанной в основание пирамиды, тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:

- боковые грани наклонены к плоскости основания под одним углом;
- высоты боковых граней равны;
- боковые грани образуют равные углы с высотой пирамиды.

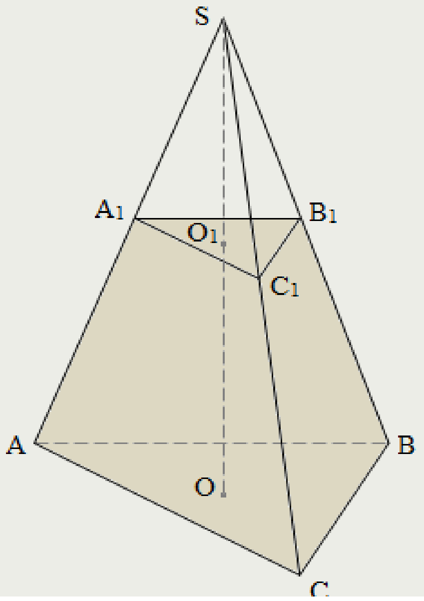
Объём пирамиды равен трети произведения площади основания на высоту пирамиды:

$$V = 1/3\cdot S_{осн}h.$$

Площадь полной поверхности любой пирамиды равна сумме площадей боковой поверхности и основания:

$$S_п = S_б + S_{осн}.$$

Сечения пирамиды плоскостями, проходящими через ее вершину, представляют собой треугольники. В частности, треугольниками являются диагональные сечения. Это сечения плоскостями, проходящими через два несоседних боковых ребра пирамиды.



Плоскость, которая пересекает пирамиду и параллельна её основанию, делит её на две части:

пирамиду, подобную данной ($SA_1B_1C_1$) и

многогранник, называемый усеченной пирамидой ($ABCA_1B_1C_1$).

Грани усеченной пирамиды, лежащие в параллельных плоскостях (ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$), называются основаниями, остальные грани (AA_1B_1B, AA_1C_1C, BB_1C_1C) называются боковыми гранями.

Основания усеченной пирамиды представляют собой подобные многоугольники, боковые грани – трапеции.

Высота усеченной пирамиды (OO_1) – это расстояние между плоскостями её оснований.

Если S_1 и S_2 – площади оснований усечённой пирамиды и h – её высота, то для объёма усеченной пирамиды верно:

$$V = \frac{1}{3}h\left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2\right).$$

3. Тетраэдр

Определение. Тетраэдр – это многогранник, состоящий из плоскости треугольника и точки не лежащий в этой плоскости, трех отрезков соединяющих эту точку с вершинами основания треугольника.

Говорят, что рёбра AD и BC, AB и CD, и т.д.- противоположные.

Считается $\triangle$ ABC - основание, остальные грани - боковые.

Изображается тетраэдр обычно так (рис. 1).

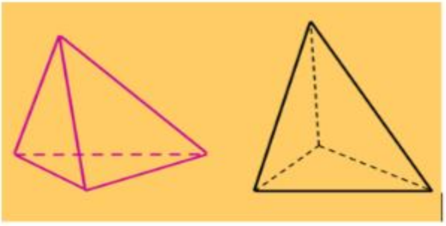


Рисунок 1 – изображение тетраэдра.

Математика, в частности геометрия, является мощнейшим инструментом в познании мира. Различные геометрические формы находят свое практическое приспособление в различных областях знания: архитектуре, скульптуре, живописи. И тетраэдр тому доказательство. Так же мы можем наблюдать тетраэдр в повседневной жизни (рис. 2).

Форма пакета молока 	Архитектурные решения 	Солнечные панели 

Рисунок 2 - тетраэдр в повседневной жизни

Практическая часть:
Построение геометрических тел

1. Построить правильную треугольную пирамиду с апофемой.
2. Построить пятиугольную пирамиду с высотой.
3. Построить треугольную призму с высотой.
4. Построить правильный параллелепипед (2 чертежа).

Симметрии в кубе, в параллелепипеде, в призме и пирамиде.

Сечения куба, призмы и пирамиды.

Симметрия – это закономерная повторяемость элементов (или частей) фигуры или какого-либо тела, при которой фигура совмещается сама с собой при некоторых преобразованиях (вращение вокруг оси, отражение в плоскости).

Понятие симметрии включает в себя такие понятия, как: ось симметрии, центр симметрии и плоскость симметрии.

1) Ось симметрии - воображаемая ось, при повороте вокруг которой на некоторый угол, фигура совмещается сама с собой в пространстве (α)
2) Центр симметрии - это точка внутри многогранника, в которой пересекаются и делятся пополам прямые, соединяющие одинаковые элементы многогранника (грани, рёбра, углы) (C).
3) Плоскость симметрии делит многогранник на 2 зеркально равные части (P).

Симметрия в кубе.
Кубу свойственны все виды симметрии.
а) Центр симметрии (центр куба) - точка пресечения диагоналей куба.
б) Плоскости симметрии (9):
1) 3 плоскости симметрии, проходящие через середины параллельных ребер;
2) 6 плоскостей симметрии, проходящие через противолежащие ребра.
в) Оси симметрии (13):
1) 3 оси, проходящие через центры противолежащих граней;
2) 4 оси симметрии, проходящие через противолежащие вершины;
3) 6 осей, проходящие через середины противолежащих рёбер.

Симметрия в параллелепипеде.
а) Центр симметрии - точка пересечения диагоналей прямоугольного параллелепипеда.
б) Плоскость симметрии. 3 плоскости симметрии, проходящие через середины параллельных рёбер.
в) Оси симметрии. 3 оси симметрии, проходящие через точки пересечения диагоналей противолежащих граней

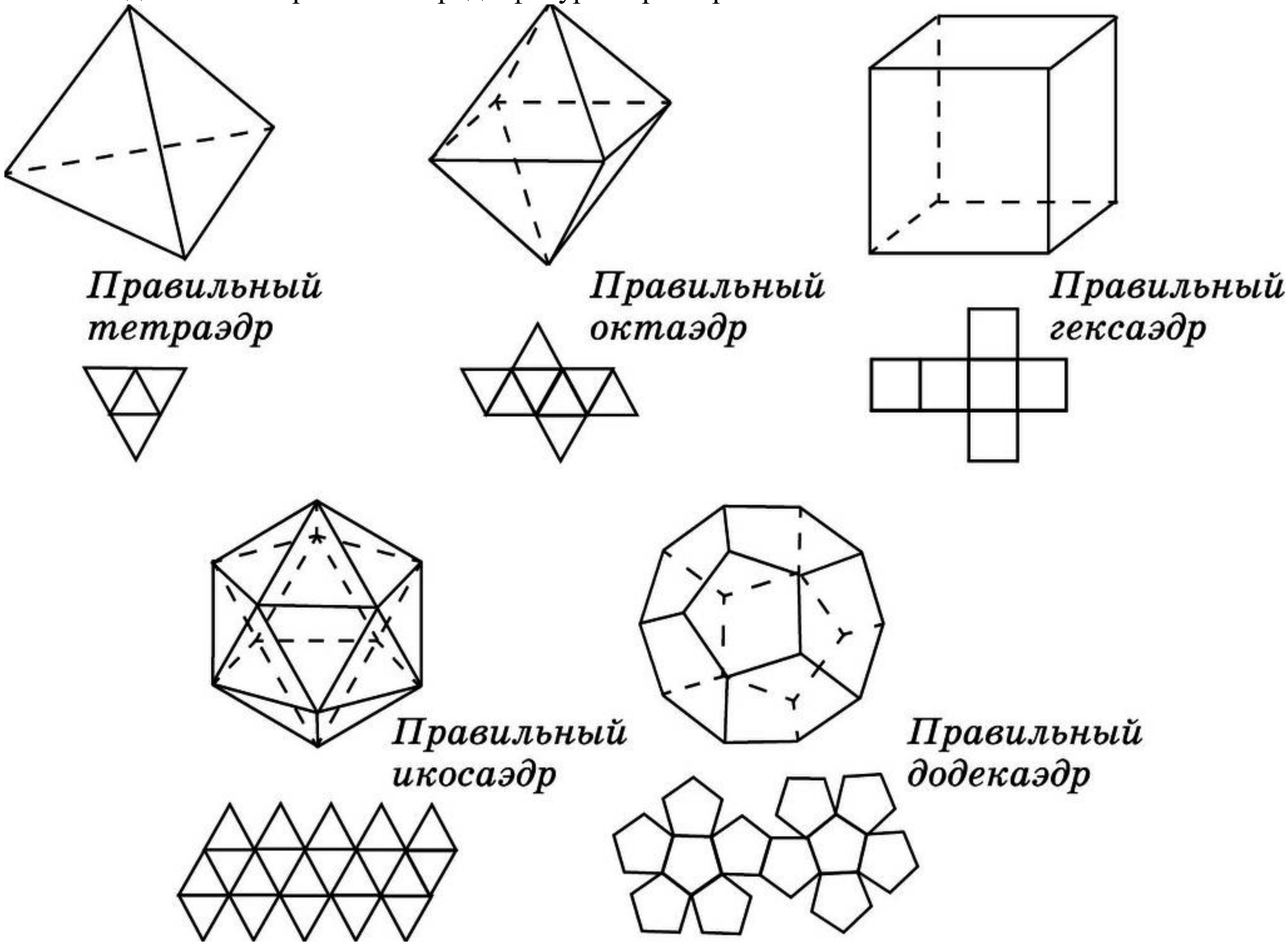
Симметрия в призме.
1) Симметрия прямой призмы. Одна плоскость симметрии, проходящая через середины боковых рёбер.
2) Симметрия правильной призмы.
а) Центр симметрии. При чётном числе сторон основания центр симметрии - это точка пересечения диагоналей правильной призмы.
б) Плоскости симметрии:
1) плоскость, проходящая через середины боковых рёбер;
2) при чётном числе сторон основания - плоскости, проходящие через противолежащие рёбра.
в) Ось симметрии:
а) при чётном числе сторон основания - ось симметрии проходит через центры оснований;
б) оси симметрии, проходящие через точки пресечения диагоналей противолежащих боковых граней.
Симметрия в пирамиде.
а) Плоскости симметрии: при четном числе сторон основания —
1) плоскости, проходящие через противолежащие боковые ребра,
2) плоскости, проходящие через медианы, проведенные к основанию противолежащих боковых граней.
б) Ось симметрии: при четном числе сторон основания — ось симметрии проходит через вершину правильной пирамиды и центр основания.

Построение сечений куба, призмы и пирамиды.

1. В тетраэдре SABC проведите сечения через середину ребра AB параллельно ребрам:
   1) AC и AS;
   2) BC и CS.
2. Постройте сечение куба плоскость так, чтобы оно было:
   1) Ромбом;
   2) Правильным шестиугольником.
3. В правильной треугольной призме построить сечение, проходящее через ребро верхнего основания и середину скрещивающегося с ним бокового ребра.

Представление о правильных многогранниках: тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр.

Задание: Начертить в тетради фигуры и развертки



Практическая работа №72: Призма. Прямая и наклонная призма. Правильная призма. Параллелепипед. Куб. Свойства параллелепипеда.

Цель работы:

1) Повторить и закрепить виды призм и их свойства.
2) Выработать умения делать к задачам грамотные чертежи.
3) Выработать умения и навыки при решении геометрических задач по теме «Призма».

Оборудование: карта индивидуального задания, микрокалькулятор.

Для выполнения практической работы используйте следующие сведения:

- Если боковые рѐбра призмы перпендикулярны основаниям, то призма называется прямой, в противном случае наклонной.

• Прямая призма, в основании которой лежит правильный многоугольник, называется правильной.

• Перпендикуляр, опущенный из любой точки верхнего основания на плоскость нижнего основания, называется высотой призмы. У прямой и правильной призмы высота равна боковому ребру.

• Диагональю призмы называется любой отрезок, соединяющий две не лежащие в одной грани вершины призмы.

• Диагональное сечение - это сечение, которое проходит через одну из диагоналей основания и боковое ребро.

Параллелепипед. Наиболее часто встречающимся видом призмы является параллелепипед. Опр. Параллелепипедом называется призма, в основании которой лежит параллелограмм.

• Все грани параллелепипеда - параллелограммы.

• Параллелепипед, боковые рѐбра которого перпендикулярны к плоскостям оснований, называется прямым. (Основание прямого параллелепипеда – параллелограмм, а боковые грани – прямоугольники).

• Прямой параллелепипед, в основании которого лежит прямоугольник, называется прямо- угольным параллелепипедом. Все грани прямоугольного параллелепипеда - прямоугольники. Длины трѐх рѐбер прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, называются его измерениями (длиной, шириной, высотой).

Квадрат длины диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов 3-х его измерений: $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$.

Вариант 1

1. Сколько рёбер у шестиугольной призмы?
2. Какое наименьшее число граней может иметь призма?
3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Каково расположение прямых B_1D_1 и AC ?
4. Перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется…
5. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна 12 см. Диагональ призмы образует с плоскостью основания угол 45^o. Найдите боковое ребро призмы.
6. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 7 см и 24 см, а диагональ параллелепипеда - $5\sqrt{29}$ см. Найти площадь диагонального сечения параллелепипеда.
7. В прямом параллелепипеде с высотой 15 м стороны основания ABCD равны 2 м и 4 м, диагональ AC равна 5 м Найдите площадь диагонального сечения параллелепипеда, проходящего через вершины B и D.

Вариант 2

1. Сколько граней у шестиугольной призмы?
2. Какое наименьшее число рёбер может иметь призма?
3. Три ребра параллелепипеда равны 6 м, 8 м и 10 м. Найдите сумму длин всех его рёбер.
4. Прямая призма называется правильной, если ее основания…
5. Найдите длину диагонали прямоугольного параллелепипеда, измерения которого равны 2 см, 3 см и 4 см.
6. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 3 см и 5 см, а одна из диагоналей – 4 см. Меньшая диагональ параллелепипеда с плоскостью основания составляет угол в 60^0. Определить диагонали параллелепипеда.
7. В прямом параллелепипеде боковое ребро 1 м, стороны основания 23 дм и 11 дм, а диагонали основания относятся как 2:3. Найдите площади диагональных сечений.

Практическая работа №73: Элементы пирамиды. Виды пирамид. Решение задач

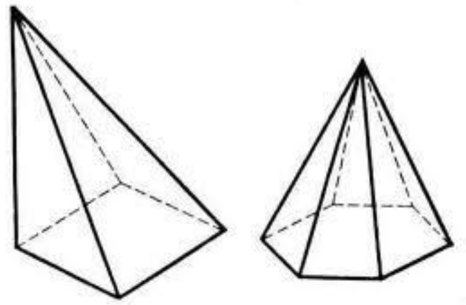
Цель : закрепление понятий: пирамида, объем, площадь боковой и полной поверхности пирамиды.
Оборудование: модели пирамид , таблица с формулами $S_{б.п.}$, $S_{п.п.}$, V, линейки, карандаши, калькулятор, карточки вопрос - ответ (из истории пирамид), плакат с изображением египетских пирамид, диск «Энциклопедия», тесты приложение
Продолжительность: 2 часа
Порядок выполнения работы :

1. Ознакомиться с указаниями к выполнению практической работы
2. Сделать краткий конспект теоретического материала в рабочих тетрадях (основные понятия, определения, формулы, примеры)
3.Изучить условие заданий для практической работы.
4. Оформить отчет о работе.

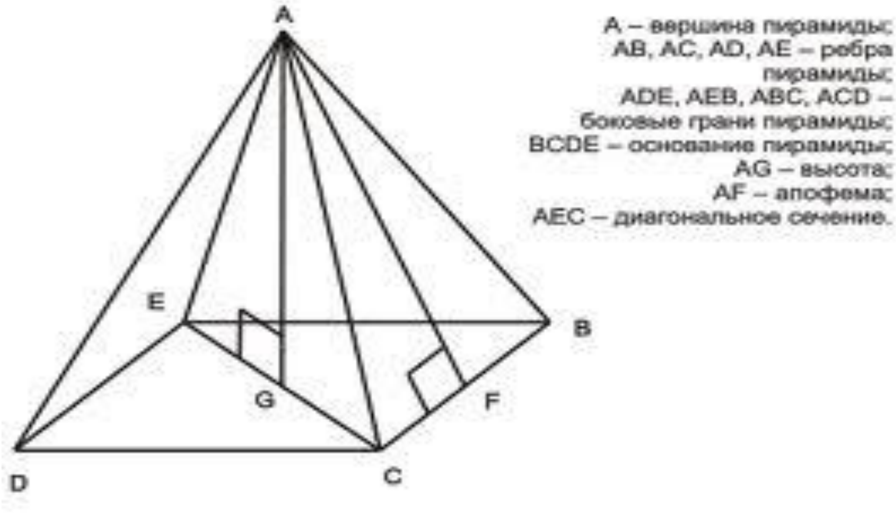
Теоретический материал

Пирами́да — многогранник, основание которого — многоугольник, а остальные грани — треугольники, имеющие общую вершину. По числу углов основания различают пирамиды треугольные, четырёхугольные и т. д.

наклонная прямая



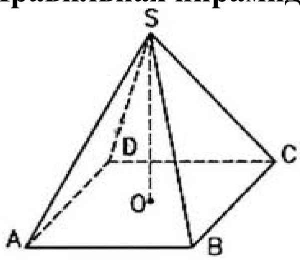
Элементы пирамиды



апофема — высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины [ℓ];
боковые грани — треугольники, сходящиеся в вершине пирамиды;
боковые ребра — общие стороны боковых граней;
вершина пирамиды — точка, соединяющая боковые рёбра и не лежащая в плоскости основания;

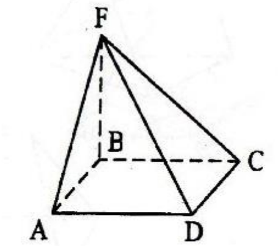
высота — отрезок перпендикуляра, проведённого через вершину пирамиды к плоскости её основания (концами этого отрезка являются вершина пирамиды и основание перпендикуляра) (H);
диагональное сечение пирамиды — сечение пирамиды, проходящее через вершину и диагональ основания;
основание — многоугольник, которому не принадлежит вершина пирамиды.

Правильная пирамида



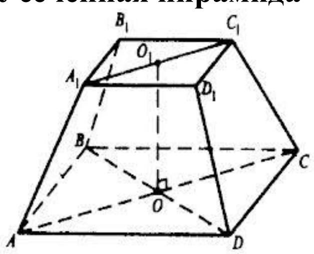
Пирамида называется правильной, если основанием её является правильный многоугольник, а вершина проецируется в центр основания. Тогда она обладает такими свойствами: боковые ребра правильной пирамиды равны; в правильной пирамиде все боковые грани — равные равнобедренные треугольники; в любую правильную пирамиду можно как вписать, так и описать около неё сферу;

Прямоугольная пирамида



Пирамида называется прямоугольной, если одно из боковых рёбер пирамиды перпендикулярно основанию. В данном случае, это ребро и является высотой пирамиды.

Усечённая пирамида



Усечённой пирамидой называется многогранник, заключённый между основанием пирамиды и секущей плоскостью, параллельной её основанию.

Боковая поверхность — это сумма площадей боковых граней.

Для нахождения боковой поверхности в правильной пирамиде можно использовать формулу:

$S_{б.п.}= 1/2•P•ℓ$

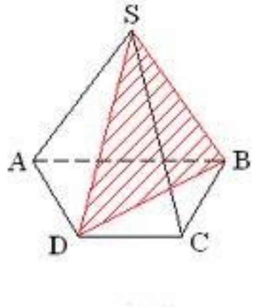
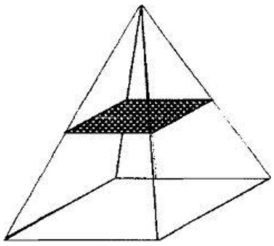
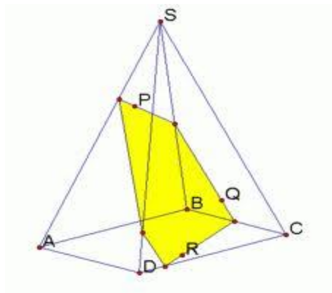
Полная поверхность — это сумма площади боковой поверхности и площади основания.

Для нахождения полной поверхности в правильной пирамиде можно использовать формулу:

$S_{п.п.} = 1/2•P•ℓ+S_{осн.}$

Объем пирамиды (любой) может быть вычислен по формуле : $V = 1/3•S_{осн.}•H$

Сечения пирамиды:

		
диагональное сечение	сечение плоскостью, параллельной основанию	сечение плоскостью проходящей под углом к основанию

2. Историческая справка:

Беседа «А знаете ли вы?» (можно использовать диск «Энциклопедия», восьмое чудо света, или «Энциклопедию для детей» Москва 1998г., видео «Секреты Египетских пирамид»)

Вопросы: 1. В каком месте земного шара находятся эти пирамиды?

Ответ: Египет-государство в Северо-Восточной Африке. 98% территории – это пустые районы, 3% - дельта и долина реки Нил. Население 60,9 млн. человек; 98%-египтяне; официальный язык-арабский.

2. Для чего строили пирамиды?

Ответ: Пирамиды строили для того, чтобы охранять тела умерших фараонов и их сокровища.

3.Почему правителя называли «фараон»?

Ответ: Египтяне считали, что их правитель происходит от бога Солнца, и для обычного человека считалось неуважительным называть его по имени. Они называли его «фараон», что значило «большой дом».

4. Какая пирамида самая высокая?

Ответ: Пирамида, построенная для фараона Хуфу, ее высота первоначально достигала 143м. Ее стороны основания точно ориентированы на север, юг, восток и запад.
Для постройки потребовалось 2млн.300 тыс. каменных блоков, каждый из которых весил 2тонны. На ее строительстве были заняты 100 000 людей в течении 20 лет.

5. Какая пирамида самая древняя?

Ответ: Пирамида Джосера является первой постройкой в мире из каменных блоков. Ее возраст 4600лет.

3. Практическая часть: выполняют практическую работу в парах: на каждую парту выдается модель пирамиды (треугольная, четырехугольная).

1.Задание к практической работе: по данным вам моделям найти площадь боковой, полной поверхности, объем пирамиды. Выполнить тесты.

Пример: Найти площадь боковой, полной поверхности, объем пирамиды.

Ход работы:

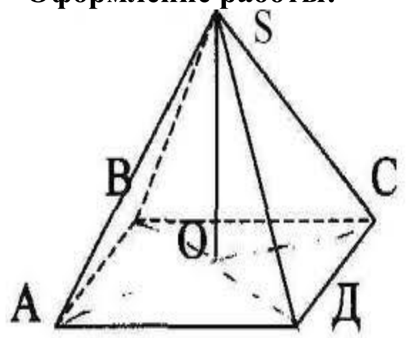
1.Для нахождения площади боковой поверхности пирамиды нужно измерить линейкой следующие элементы: апофему, стороны основания, высоту. Подставить значения в формулу для нахождения пощади (если пирамида правильная). Если пирамида наклонная, то боковую поверхность находим из суммы площадей граней.

2. Для нахождения площади полной поверхности пирамиды нужно найти площадь основания пирамиды (площадь треугольника, прямоугольника, ромба)

3.Площадь полной поверхности пирамиды находиться как сумма площадей боковой поверхности и основания.

4. Для нахождения объема нужно знать высоту пирамиды и площадь основания.

Оформление работы:



Дано: SABCД – пирамида, AB=3см, BC= 6см, пирамида неправильная, H=10см, ℓ_1=10,5см., ℓ_2=10,2см

Найти: $S_{б.п.}$; $S_{п.п.}$; V

Решение: т.к. пирамида неправильная, то $S_{б.п.}$ находят как сумму площадей ее боковых граней, т.е. площадей треугольников.

$S_1 = 1/2 \cdot \ell_1 \cdot AB = 1/2 \cdot 10{,}5 \cdot 3 = 15{,}75$(см^2) - это площадь одной грани, а их две одинаковых, т.е

$S_{1,2} = 15{,}75 \cdot 2 = 31{,}5$(см^2)

$S_3 = 1/2 \cdot \ell_2 \cdot BC = 1/2 \cdot 10{,}2 \cdot 6 = 30{,}6$ (см^2), $S_{3,4} = 2 \cdot 30{,}6 = 61{,}2$(см^2)

$S_{б.п.} = 31{,}5 + 61{,}2 = 92{,}7$(см^2)

$S_{осн.} = AB \cdot BC = 3 \cdot 6 = 18$(см^2), $S_{п.п.} = S_{б.п} + S_{осн.} = 92{,}7 + 18 = 110{,}7$ (см^2)

(если пирамида правильная, то пользуемся формулами)

$V = 1/3 \cdot S_{осн} \cdot H = 1/3 \cdot 18 \cdot 10 = 60$(см^3) – формула объема справедлива для любой пирамиды.

5. Выполняют тесты, состоящие из двух вопросов и двух задач.

Практическая часть

Вариант 1

1. Сколько ребер у шестиугольной пирамиды:
Ответ: а)6; б)12; в)18; г)24; д)8
2. Какое наименьшее число граней может иметь пирамида:
Ответ: а)5; б)12); в)10; г)6; д)4
3.Выберите верное утверждение:
а) Многогранник, составленный из n-треугольников, называется пирамидой;
б) пирамида называется правильной, если ее основание – правильный многоугольник;
в) высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется апофемой;
4. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 4см, а длина диагонали основания - $6\sqrt{2}$ см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.
Ответ: а)96см^2; б)156см^2; в)36см^2; г)60см^2; д)150см^2

Вариант 2

1. Сколько граней у шестиугольной пирамиды:
Ответ: а)6; б)7; в)8; г)10; д)12
2. Какое наименьшее число ребер может иметь пирамида:
Ответ: а)6; б)5; в)4; г)7; д)8
3.Выберите верное утверждение:
а) Высота пирамиды называется высотой грани;
б) площадь боковой поверхности пирамиды равна произведению периметра основания на высоту;
в) пирамида называется правильной, если ее основание – правильный многоугольник;
4. Высота правильной треугольной пирамиды равна 12см, сторона основания 15см. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

Практическая работа №74: Элементы цилиндра. Площадь поверхности

Цель: закрепить навыки решения практических задач на вычисление площади поверхности и объема цилиндра.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Определение: *Цилиндром* называется тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя кругами с границами L и L_1.

Основные элементы:

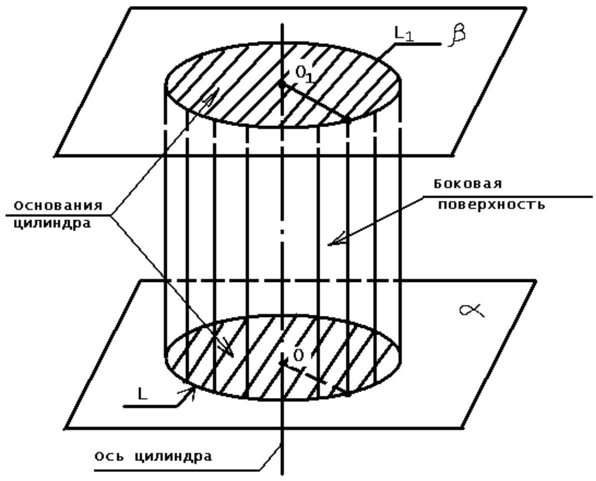


Рис. 1.

Основания цилиндра – равные круги, расположенные в параллельных плоскостях

Образующая цилиндра - это отрезок соединяющий точку окружности верхнего основания с соответственной точкой окружности нижнего основания. Все образующие параллельны оси вращения и имеют одинаковую длину, равную высоте цилиндра.

Боковая поверхность – образованная образующими цилиндра часть цилиндрической поверхности.

Ось цилиндра – это прямая, проходящая через центры основания цилиндра (ось цилиндра является осью вращения цилиндра).

Высота цилиндра – длина образующей.

Высота цилиндра - отрезок, соединяющий центры оснований.

Радиус цилиндра - отрезок, соединяющий центр сферы с любой её точкой.

Цилиндр может быть получен вращением прямоугольника вокруг одной из сторон.

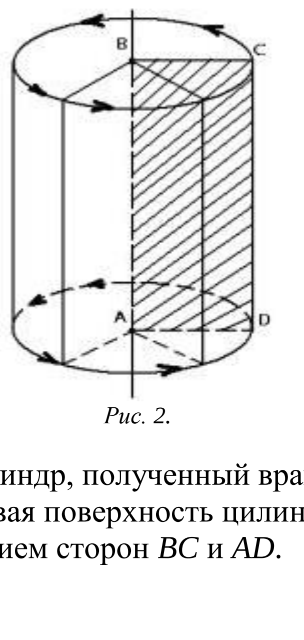


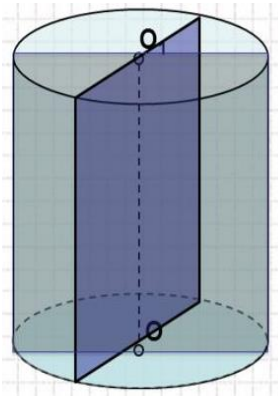
Рис. 2.

На рисунке 2 изображен цилиндр, полученный вращением прямоугольника *ABCD* вокруг стороны *AB*. При этом боковая поверхность цилиндра образуется вращением стороны *CD*, а основания - вращением сторон *BC* и *AD*.

Сечение цилиндра

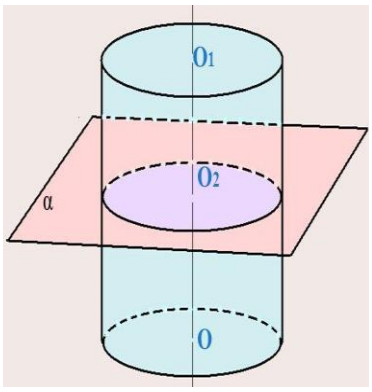
Осевое

Определение:
Если секущая плоскость проходит через ось цилиндра, то сечение представляет собой **прямоугольник**, две стороны которого – образующие, а две другие – диаметры оснований цилиндра.



Плоскостью α, перпендикулярной к оси

Определение:
Если секущая плоскость перпендикулярна к оси цилиндра, то сечение является **кругом**.



За площадь боковой поверхности цилиндра принимается площадь ее развертки.

Разверткой цилиндра называется перенос без искажения размеров всех его граней в одну плоскость. Развертка цилиндра представлена на рисунке 3.

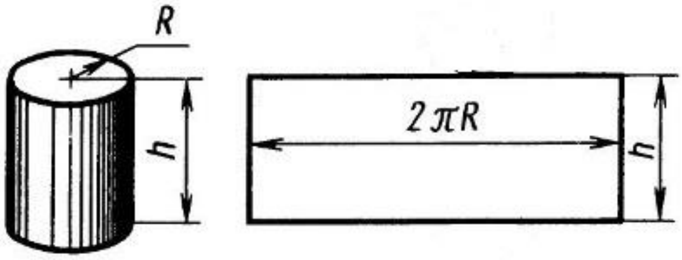


Рис. 3.

Теорема: ***Площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению длины окружности основания на высотку цилиндра.***

$$\boxed{\boldsymbol{S_{\text{бок.}} = 2\pi r h,}}$$

где $\boldsymbol{S_{бок.}}$ – площадь боковой поверхности цилиндра;
$\boldsymbol{r}$ – радиус основания цилиндра;
$\boldsymbol{h}$ – высота цилиндра;
$\boldsymbol{\pi}$ – постоянная, равная 3,14.

Определение: ***Площадью полной поверхности цилиндра называется сумма площадей боковой поверхности и двух оснований.***

Так как площадь каждого основания равна $\boldsymbol{\pi r^2}$, то для вычисления площади $\boldsymbol{S_{п.п.}}$ полной поверхности цилиндра получаем формулу.

$$\boldsymbol{S_{п.п.} = S_{бок.} + 2S_{осн.} = 2\pi rh + 2\pi r^2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{S_{п.п.} = 2\pi r(h + r)}}$$

Определение: ***Объем цилиндра равен произведения площади основания на высоту.***

$$\boldsymbol{V = S_{осн.} \cdot h}$$

$$\boxed{\boldsymbol{V = \pi r^2 h}}$$

Упражнения:

1. Радиус основания цилиндра равен 15 см, а высота равна 10 см. Найдите площадь полной поверхности и объем цилиндра.

2. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если радиус основания цилиндра равен 46 дм, а высота 50 дм.

3. Чему будет равен объем цилиндра, если радиус равен 4 дм, а высота 12 дм.

4. Радиус основания цилиндра равен 4 см, а высота равна $4\sqrt{5}$ см. Найдите длину диагонали осевого сечения цилиндра.

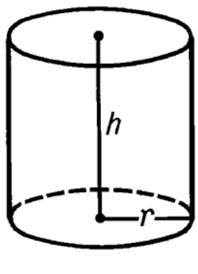
5. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 25 мм, а высота цилиндра равна 24 мм. Найдите радиус основания цилиндра.

6. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 15 см, а радиус основания цилиндра равен 6 см. Найдите высоту цилиндра.

ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ УПРАЖНЕНИЙ

1. Радиус основания цилиндра равен 5 см, а высота равна 7 см. Найдите площадь полной поверхности и объем цилиндра.

Дано:	*Решение:*
Цилиндр r =5 см h =7 см	$S_{п.п.} = 2\pi r(h + r)$ $S_{п.п.} = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot (7 + 5) = 120\pi\ см^2$ $V = \pi r^2 h$ $V = \pi \cdot 5^2 \cdot 7 = 175\pi\ см^3$
$S_{п.п.}$ –? V - ?	



Ответ: $S_{п.п} = 120\pi\ см^2;\ V = 175\pi\ см^3$

2. Радиус основания цилиндра равен 1,5 см, а высота равна 4 см. Найдите длину диагонали осевого сечения цилиндра.

Дано:

Цилиндр

$r =$1,5 см

$h =$4 см

$d -?$

Решение:

Рассмотрим ΔACD – прямоугольный.

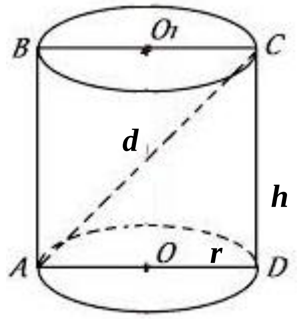
По теореме Пифагора: $AC^2 = CD^2 + AD^2$

$CD = h$, $AD = 2r$, $AC = d$

$d^2 = h^2 + (2r)^2$

$d = \sqrt{h^2 + 4r^2}$

$d = \sqrt{4^2 + 4 \cdot 1{,}5^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ см



Ответ: d = 5 см

3. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если радиус основания цилиндра равен 18 дм, а высота 26 дм.

Дано:

Цилиндр

$h =$26 дм

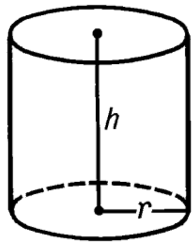
$r =$ 18 дм

$S_{бок.} -?$

Решение:

$S_{бок.} = 2\pi r h$

$S_{бок.} = 2\pi \cdot 18 \cdot 26 = 936$ дм^2



Ответ: $S_{бок.} = 936$ *дм*^{2}

4. Чему будет равен объем цилиндра, если радиус равен 12 дм, а высота 27 дм.

Дано:

Цилиндр

$h =$27 дм

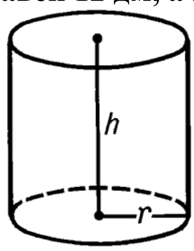
$r =$ 12 дм

$V -?$

Решение:

$V = \pi r^2 h$

$V = \pi \cdot 12^2 \cdot 27 = 3888\pi$ дм^3



Ответ: $V = 3888$ *дм*^{3}

5. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 15 мм, а высота цилиндра равна 12 мм. Найдите радиус основания цилиндра.

Дано:

Цилиндр

$d =$ 15 мм

$h =$12 мм

$r -$?

Решение:

Рассмотрим ΔACD – прямоугольный.

По теореме Пифагора: $AC^2 = CD^2 + AD^2$

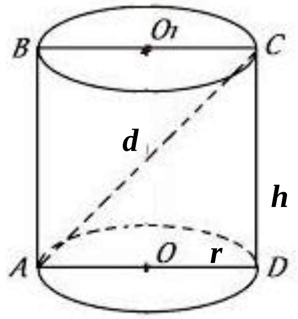
$CD = h$, $AD = 2r$, $AC = d$

$d^2 = h^2 + (2r)^2$

$2r = \sqrt{d^2 - h^2}$

$2r = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{225 - 144} = \sqrt{81} = 9$ мм

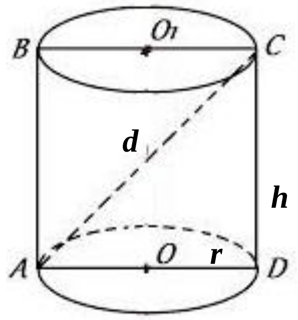
$r = \frac{9}{2} = 4{,}5$ мм



Ответ: $r = 4{,}5$ *мм*

6. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 10 см, а радиус основания цилиндра равен 3 см. Найдите высоту цилиндра.

Дано:	*Решение:*
Цилиндр $r=3$ см $d=10$ см	Рассмотрим ΔACD – прямоугольный. По теореме Пифагора: $AC^2=CD^2+AD^2$ $CD = h$, $AD = 2r$, $AC = d$ $d^2=h^2+(2r)^2$ $h=\sqrt{d^2-4r^2}$ $h=\sqrt{10^2-4\cdot3^2}=\sqrt{100-36}=\sqrt{64}=8$ см
$h-?$	

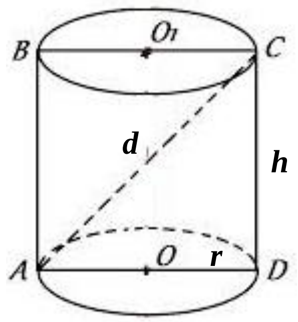


Ответ: $h = 8$ см

7. Осевое сечение цилиндра – квадрат, диагональ которого равна 20 см. Найдите:

а) Высоту цилиндра; б) Площадь основания цилиндра.

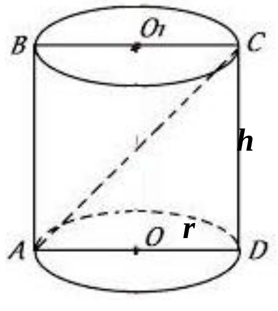
Дано:	*Решение:*
Цилиндр $AC=20$ см $ABCD$ – осевое сечение цилиндра	Рассмотрим ΔACD – прямоугольный. По теореме Пифагора: $AC^2=CD^2+AD^2$ $AC^2=2CD^2$, *так как* ΔACD *– прямоугольный, равнобедренный треугольник (из условия, что ABCD - квадрат) AD=CD.* $CD^2=\frac{AC^2}{2}$ $CD=\frac{AC}{\sqrt2}=\frac{20}{\sqrt2}\cdot\frac{\sqrt2}{\sqrt2}=\frac{20\sqrt2}{2}=10\sqrt2$ см $S_{осн.}=\pi r^2$, радиус $r={}^1/_2\cdot AD={}^1/_2\cdot10\sqrt2=5\sqrt2$ см $S_{осн.}=\pi\cdot(5\sqrt2)^2=50\pi\ см^2$
$h-?$ $S_{осн.}-?$	



Ответ: $CD=10\sqrt2\ см,\ S_{осн.}=50\pi\ см^2$

8. Сколько понадобится краски, чтобы покрасить бак цилиндрической формы с диаметром основания 1,5 м и высотой 3 м, если на один квадратный метр расходуется 200 г краски?

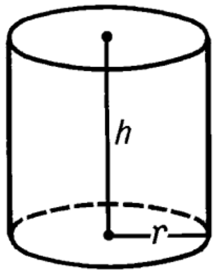
Дано:	*Решение:*
Цилиндр AD $AD=1{,}5$ *м* $h=3$ *м*	$S_{бака}=2S_{осн.}+S_{бок}$, так как бак имеет только одно основание, то $S_{бака}=S_{осн.}+S_{бок}$ $S_{бака}=\pi r^2+2\pi rh=\pi\cdot\left(\frac{AD}{2}\right)^2+2\pi\left(\frac{AD}{2}\right)h$ $S_{бака}=\pi\cdot(\frac{1{,}5}{2})^2+2\cdot\pi\cdot\left(\frac{1{,}5}{2}\right)\cdot3=5{,}0625\ см$ $N=0{,}2\cdot5{,}0625=1{,}0125\ кг$
$N-?$	



Ответ: 1,0125 кг краска понадобится, чтобы покрасить бак цилиндрической формы с диаметром 1,5 м и высотой 3 м.

9. Высота цилиндра на 12 см больше его радиуса, а площадь полной поверхности равна 288π см². Найдите радиус основания и высоту цилиндра.

Дано:	*Решение:*
Цилиндр $S_{п.п.} = 288\pi$ см²	$S_{п.п.} = 2\pi r(h + r) = 288\pi$ $r = x, h = x + 12$ (по условию задачи) $288\pi = 2\pi x((x + 12) + x)$.
h −? r − ?	Преобразовав выражение, получим: $288 = 4x^2 + 24x$. $4x^2 + 24x - 288 = 0$ $x^2 + 6x - 72 = 0$ $a = 1; b = 6; c = -72$ $x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-288)}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm \sqrt{324}}{2} = \frac{-6 \pm 18}{2}$ $x_1 = \frac{-6+18}{2} = \frac{12}{2} = 6; x_2 = \frac{-6-18}{2} = \frac{-24}{2} = -12$ Очевидно, что берем $r > 0$, тогда $r = 6$ *см* $h = 6 + 12 = 18$ *см*



Ответ: $r = 6$ *см*, $h = 18$ *см*

Вариант 1

Часть А:

1. Найдите площадь основания цилиндра, если радиус основания цилиндра равен 4 см, а высота 6 см.

а) 16π см² б) 32π см² в) 48π см² г) 24π см²

2. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если радиус основания цилиндра равен 5 дм, а высота 7 дм.

а) 35π дм² б) 40π дм² в) 12π дм² г) 70π дм²

3. Чему будет равна площадь полной поверхности цилиндра, если диаметр цилиндра равен 6 см, а высота 5 см.

а) 65π см² б) 24π см² в) 48π см² г) 36π см²

4. Чему будет равен объем цилиндра, если радиус равен 8 дм, а высота 13 дм.

а) 256π дм³ б) 512π дм³ в) 832π дм³ г) 624π дм³

5. Радиус основания цилиндра равен 15 см, а высота цилиндра равна 20 см. Найдите диагональ осевого сечения цилиндра.

а) 25 см б) 36 см в) 65 см г) 48 см

6. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 5 мм, а высота цилиндра равна 4 мм. Найдите радиус основания цилиндра.

а) 5 мм б) 9 мм в) 3 мм г) 7 мм

7. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 15 см, а диаметр основания цилиндра равен 24 см. Найдите высоту цилиндра.

а) 15 см б) 9 см в) 3 см г) 7 см

Часть В:

Установите соответствие:

1. Цилиндр	**А.** Прямоугольник
2. Образующая	**Б.** Отрезок, соединяющий точку окружности верхнего основания с соответственной точкой окружности нижнего основания
3. Боковая поверхность	**В.** Отрезок, соединяющий центры оснований
4. Ось вращения	**Г.** Круг
5. Высота	**Д.** Поверхность, образованная образующими цилиндра часть цилиндрической поверхности
6. Осевое сечение цилиндра	**Е.** Тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя кругами с границами L и L_1
7. Сечение цилиндра плоскостью α, перпендикулярной к оси	**Ж.** Ось цилиндра

Часть С:

1. Площадь осевого сечения цилиндра равна 10 м^2, а площадь основания равна 5 м^2. Найдите высоту цилиндра.

Вариант 2

Часть А:

1. Найдите площадь основания цилиндра, если радиус основания цилиндра равен 5 см, а высота 7 см.

а) *16 π см²* б) *25 π см²* в) *48 π см²* г) *24 π см²*

2. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если радиус основания цилиндра равен 3 дм, а высота 5 дм.

а) *35 π дм²* б) *40 π дм²* в) *30 π дм²* г) *70 π дм²*

3. Чему будет равна площадь полной поверхности цилиндра, если диаметр цилиндра равен 8 см, а высота 6 см.

а) 80π см^2 б) 24π см^2 в) $48\pi\ см^2$ г) $36\pi\ см^2$

4. Чему будет равен объем цилиндра, если радиус равен 7 дм, а высота 11 дм.

а) $297\pi\ дм^3$ б) $762\pi\ дм^3$ в) $539\pi\ дм^3$ г) $639\pi\ дм^3$

5. Радиус основания цилиндра равен 60 см, а высота цилиндра равна 80см. Найдите диагональ осевого сечения цилиндра.

а) *46 см* б) *57 см* в) *150 см* г) *100 см*

6. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 25 мм, а высота цилиндра равна 24 мм. Найдите радиус основания цилиндра.

а) *3,5 мм* б) *3 мм* в) *7 мм* г) *10,5 мм*

7. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 13 см, а диаметр основания цилиндра равен 10 см. Найдите высоту цилиндра

а) *4 см* б) *12 см* в) *9 см* г) *10 см*

Часть В:

Установите соответствие:

1. Ось цилиндра	**А.** Сумма площадей боковой поверхности и двух оснований.
2. Цилиндр	**Б.** Прямая, проходящая через центры основания цилиндра
3. Площадь боковой поверхности цилиндра	**В.** Произведения площади основания на высоту.
4. Площадью полной поверхности цилиндра	**Г.** Равные круги, расположенные в параллельных плоскостях.
5. Высота цилиндра	**Д.** Произведению длины окружности основания на высотку цилиндра.
6. Объем цилиндра	**Е.** Тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя кругами с границами L и L_1
7. Основания	**Ж.** Длина образующей.

Часть С:

1. Площадь осевого сечения цилиндра равна 16 м^2, а площадь основания равна $12,56$ м^2. Найдите высоту цилиндра.

Расчетное время выполнения практической работы: 45 минут

Контрольная работа оценивается по 17 – бальной системе.
Максимальное количество баллов по заданиям:

Часть А
Задание 1 - 1 балл
Задание 2 - 1 балл
Задание 3 - 1 балл
Задание 4 - 1 балл
Задание 5 – 1 балл
Задание 6 - 1 балл
Задание 7 – 1 балл

Часть В
Задание 1 - 2 балла
Задание 2 - 2 балла
Задание 3 - 2 балла
Задание 4 - 2 балла
Задание 5 - 2 балла
Задание 6 - 2 балла
Задание 7 - 2 балла

Часть С
Задание 1 - 3 балла

Шкала перевода баллов в отметки по 5 – бальной системе
22 – 24 баллов – 5
15 – 21 баллов – 4
9 – 14 баллов – 3
8 и меньше баллов – 2

Ответы и критерии оценки знаний.

	Вариант 1	**Вариант 2**
Часть А		
1	А	Б
2	Г	В
3	В	А
4	В	В
5	А	Г
6	В	А

7	Б	Б
Часть В		
1	Е	Б
2	Б	Е
3	Д	Д
4	Ж	А
5	В	Ж
6	А	В
7	Г	Г
Часть С		
1	$3,96\,м$	$8\,см$

В зависимости от полноты и правильности ответа за выполнение заданий выставляется от 0 до 3 баллов максимально.

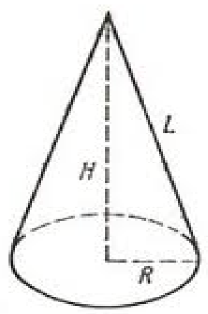
Решение задачи считается безупречным, если правильно выбран способ решения, само решение сопровождается необходимыми объяснениями, верно выполнены нужные вычисления и преобразования, получен правильный ответ, последовательно и аккуратно записано решение.

Практическая работа №75: Элементы конуса. Площадь поверхности

Цель: закрепление понятий: конус, площадь полной поверхности конуса, воспитание познавательной активности, показать применение конуса в различных областях, развитие логического мышления, формирование умений и навыков при решении задач на вычисление площади поверхности конуса.

Методические указания.

Конусом называется тело, которое состоит из круга - основание конуса, точки, не лежащей в плоскости этого круга - вершины конуса, и всех отрезков, соединяющих вершину конуса с точками основания.



Отрезок, соединяющий вершину и границу основания, называется **образующей конуса (ℓ).**

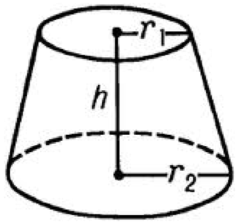
Отрезок, опущенный перпендикулярно из вершины на плоскость основания (а также длина такого отрезка), называется **высотой конуса (Н).**

R – радиус основания.

Круговой конус — конус, основание которого является кругом.

Прямой круговой конус (часто его называют просто конусом) можно получить вращением прямоугольного треугольника вокруг прямой, содержащей катет (эта прямая представляет собой ось конуса)

Часть конуса, лежащая между основанием и плоскостью, параллельной основанию и находящейся между вершиной и основанием, называется **усечённым конусом**.



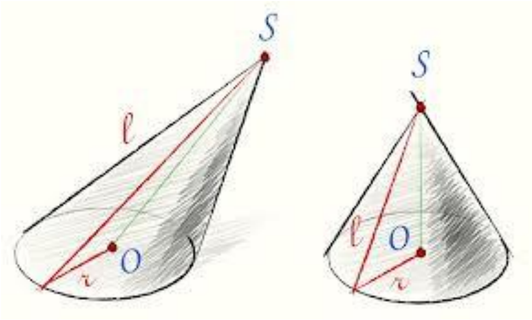
Площадь боковой поверхности усеченного конуса –

$S_{бок} = \pi\, \ell\, (r_1 + r_2)$.

где r_1 – радиус верхнего основания ,

r_2 - радиус нижнего основания.

Виды конусов:

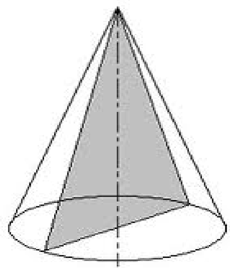


наклонный **прямой**

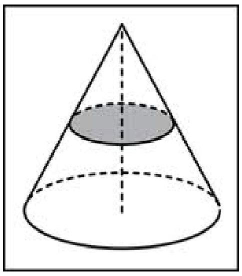
Боковая поверхность конуса можно вычислить по формуле: $\mathbf{S_{б.п.} = \pi R\ell}$, где R — радиус основания, ℓ — длина образующей.

Полная поверхность конуса равна сумме площадей боковой поверхности и площади основания: $\mathbf{S_{п.п.} = \pi R\ell + \pi R^2}$.

Сечения конуса:



Сечение конуса плоскостью, проходящей через его ось, называют **осевым сечением**.
(сечением является равнобедренный треугольник)



Сечение плоскостью перпендикулярной оси конуса:
(сечением является круг).

Применение конусов.

Знания о конусе широко применяются в быту, производстве и науке. мы. Например, мы используем ведра, имеющие форму усеченного конуса; крыши старинных замков похожи на конусы; для переливания жидкостей мы берем воронку, которая также имеет форму усеченного конуса. Во время спортивных соревнований, ограждения для движения в автошколах применяют спортивные фишки.

<u>**Задание: по данным вам моделям найти площадь боковой поверхности, полной поверхности.**</u>

<u>**Ход работы:**</u>

1.а) Для нахождения площади боковой поверхности конуса нужно измерить линейкой следующие элементы:

- диаметр,
- высоту.

В качестве модели можно взять (терку, лейку, пирамидку):

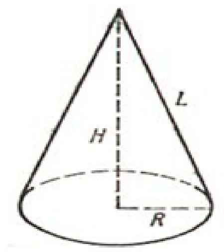
  

Подставить значения в формулу для нахождения площади боковой поверхности конуса .
б) Для нахождения площади полной поверхности конуса нужно найти площадь основания конуса площадь круга $\pi \cdot R^2$). Подставить данные в формулу площади полной поверхности
Площадь боковой поверхности конуса:

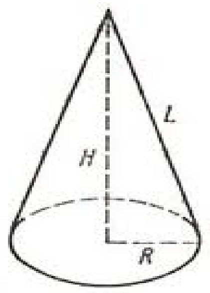
$$S_{бок} = \pi RL.$$

Площадь полной поверхности конуса:

$$S_{кон} = \pi RL + \pi R^2.$$



Пример1: Найти площадь боковой, полной поверхности. **Оформление работы:**



Дано: конус, H=10см, R=6см, ℓ= 11,6см
Найти: $S_{б.п.}$ $S_{п.п.}$
Решение: $S_{б.п.} = \pi R\ell = \pi \cdot 6 \cdot 11,6 = 69,6\pi$ (см^2)
$S_{п.п.} = \pi R\ell + \pi R^2 = \pi \cdot 6 \cdot 11,6 + \pi \cdot 6^2 = 105,6\pi$ (см^2)

Пример 2:
Задача.
Площадь основания конуса 36π см^2, а его образующая 10 см. Вычислить боковую поверхность конуса.
<u>Решение.</u>
Зная площадь основания, найдем его радиус.

$$S=\pi R^2$$
$$36\pi=\pi R^2$$
$$R^2 = 36 \Rightarrow R=6$$

Площадь боковой поверхности конуса найдем по формуле:
$S = \pi Rl$, где R - радиус основания , l - длина образующей,
откуда

$$S = \pi \cdot 6 \cdot 10 = 60\pi$$

Ответ: 60π см^2.

Задания для самостоятельной работы:

1. Выберите верное утверждение:
а) конус может быть получен в результате вращения равностороннего треугольника вокруг его стороны;
б) прямая, проходящая через вершину конуса и центр его основания, называется осью конуса;
в) разверткой боковой поверхности усеченного конуса является круг;
2.Задача. Высота конуса равна15 см, а образующая 16 см. Найдите радиус конуса.

3.Задача. Сколько квадратных метров брезента потребуется для сооружения палатки конической формы? Высотой 1,5м и радиусом 2 м?
Площадь боковой поверхности конуса:

$$S_{бок} = \pi RL.$$

Задания для практической работы

1 вариант
1. Высота конуса равна 6 м, образующая равна 10 м. Найдите площадь боковой поверхности конуса.
2. Образующая конуса равна 18 см и наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите площадь полной поверхности конуса.
3. Во сколько раз уменьшится площадь боковой поверхности конуса,
если радиус его основания уменьшить в 1,5 раза?

За каждое задание практической работы получаете максимальное количество баллов: 5.

Отметка	Количество баллов, необходимое для получения отметки
«3» (удовлетворительно)	8 - 10
«4» (хорошо)	11-13
«5» (отлично)	14

2 вариант
1. Радиус основания конуса равен 3 м, высота равна 4 м. Найдите площадь боковой поверхности конуса.
2. Площадь осевого сечения конуса равна 0,6 см^2. Высота конуса равна 1,2 см. Вычислить площадь полной поверхности конуса.
3. Во сколько раз уменьшится площадь боковой поверхности конуса, если радиус его основания уменьшить в 2,5 раза?

За каждое задание практической работы получаете максимальное количество баллов: 5.

Отметка	Количество баллов, необходимое для получения отметки
«3» (удовлетворительно)	8 - 10
«4» (хорошо)	11-13
«5» (отлично)	14

Практическая работа №76: Элементы сферы и шара. Уравнение сферы. Сечение шара плоскостью

Цель: Закрепление и систематизация теоретических знаний по теме и приобретение практических навыков вычисления площадей и объёмов, сформировать представление о телах вращения, сформировать представление о шаре и сфере.

Порядок выполнения работы:
1. Используя теоретические сведения и примеры, ответить на вопросы

2. Используя раздаточный материал (разъёмную модель шара **), выполнить необходимые измерения линейных размеров.**
3. Выполнить чертежи прямого кругового цилиндра и его сечений.

4. Выписать необходимые формулы площади сферы, объёма шара

5. По полученным данным вычислить площадь сферы, объёма шара

6.Решение и разбор решения заданий тренировочного модуля

7.Выполнить задания для самостоятельного решения

8. Ответить на контрольные вопросы:

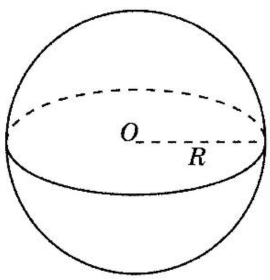
Критерии оценки практических работ
Оценка «5» - работа выполнена в полном объеме и без замечаний.
Оценка «4» - работа выполнена правильно с учетом 2-3 несущественных ошибок, исправленных самостоятельно по требованию преподавателя.
Оценка «3» - работа выполнена правильно не менее чем на половину или допущена существенная ошибка.
Оценка «2» - допущены две (и более) существенные ошибки в ходе работы, которые обучающиеся не может исправить даже по требованию преподавателя или работа не выполнена.
Теоретический материал *Окружность* – множество точек плоскости, равноудалённых от данной точки. Данная точка называется *центром* окружности, расстояние от центра до любой точки окружности называется *радиусом* окружности. *Круг* – это часть плоскости, ограниченная окружностью. *Сфера* – это поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на заданном расстоянии от данной точки, которую называют *центром*.

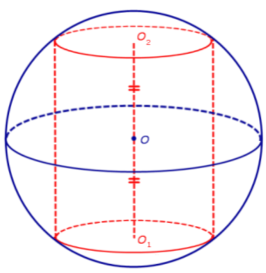
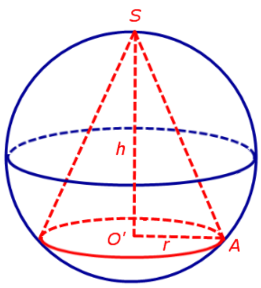
Тело, ограниченное сферой, называется *шаром.*

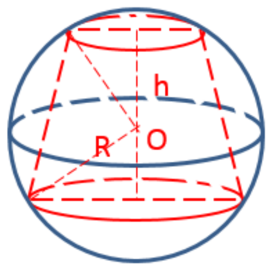
Уравнение сферы – уравнение сферы радиуса R и центром C(x_0; y_0; z_0).

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

Плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, называется *касательной плоскостью к сфере*, а их общая точка – *точкой касания.*





Соотношение между радиусом сферы, радиусом сечения и расстоянием от центра сферы до плоскости сечения:

$$R^2 = h^2 + r^2$$

Формула для вычисления площади поверхности сферы и ее элементов:
$S = 4\pi R^2$ – площадь сферы.
$S = 2\pi Rh$ – площадь поверхности сегмента сферы радиуса R с высотой h.
$S = \pi Rh(2h + \sqrt{2hR - h^2}$ – площадь поверхности сектора с высотой h. **3.** *Взаимное расположение сферы и плоскости*
Взаимное расположение сферы и плоскости зависит от соотношения между радиусом сферы R и расстояния от центра сферы до плоскости d.
1. Пусть $d < R$. Если расстояние от центра сферы до плоскости меньше радиуса сферы, тогда сфера и плоскость пересекаются, и сечение сферы плоскостью есть окружность.

2. Пусть $d = R$. Если расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу сферы тогда сфера и плоскость имеют только одну общую точку, и в этом случае говорят, что плоскость касается сферы.
3. Пусть $d > R$. Если расстояние от центра сферы до плоскости больше радиуса сферы, то сфера и плоскость не имеют общих точек.
Рассмотрим случай касания более подробно.

1. Используя теоретические сведения и примеры, ответить на вопросы:
что такое сфера, какие у неё есть элементы (центр, радиус,
диаметр сферы);
что такое шар и его элементы;
уравнение сферы;
формула для нахождения площади поверхности сферы; объёма шара.
взаимное расположение сферы и плоскости;

2. Используя раздаточный материал (разъёмную модель шара **), выполнить необходимые измерения линейных размеров.**

3. Выполнить чертежи прямого кругового цилиндра и его сечений.

4. Выписать необходимые формулы площади сферы, объёма шара

5. По полученным данным вычислить площадь сферы, объёма шара

6.Решение задач и разбор решения заданий тренировочного модуля

Задача №1. Площадь сечения шара, проходящего через его центр, равна 9 кв. м. Найдите площадь поверхности шара.

Решение:
Площадь круга вычисляется по формуле: $S_{\text{кр}} = \pi R^2$
Площадь поверхности шара вычисляется по формуле: $S_{\text{сф}} = 4\pi R^2$. Радиус шара и радиуса сечения, проходящего через центр шара, одинаковые. Поэтому площадь поверхности шара в 4 раза больше площади его диаметрального сечения. То есть площадь поверхности шара равна 36.
Ответ: 36
Задача №2. Вычислите радиус круга, площадь которого равна площади сферы радиуса 5.

Решение:
Площадь сферы равна $S_{\text{сф}} = 4\pi R^2$. То есть $S_{\text{сф}}=100\pi$.
По условию площадь круга некоторого радиуса r также равна 100π. Значит,
$r^2=100$, то есть r=10.
Ответ: 10.

Задача №3. Все стороны треугольника ABC касаются сферы радиуса 5. Найти расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если AB=13, BC=14, CA=15

Решение:
Окружность, вписанная в треугольник, является сечением сферы.
Найдем ее радиус.
Площадь треугольника с известными сторонами можно вычислить по формуле Герона:
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = 0.5(AB + BC + AC) = 21$$
$$S = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{21*8*7*6} = 84$$

S=84.

С другой стороны, $S = p * r$

Отсюда r=4.

Теперь найдем расстояние от центра шара до секущей плоскости.

Используем соотношение:

$$R^2 = h^2 + r^2$$
$$h^2 = R^2 - r^2$$

$h^2 = 25 - 16 = 9 \quad h = 3$ Ответ: 3.

Задача №4. Вершины прямоугольника лежат на сфере радиуса 10. Найти расстояние от центра сферы до плоскости прямоугольника, если его диагональ равна 16.

Решение:

Так как вершины прямоугольника лежат на сфере, то окружность, описанная около прямоугольника, является сечением сферы.

Радиус окружности, описанной около прямоугольника, равен половине его диагонали, то есть r=8.

По условию задачи R=10.

Используем соотношение:

$$R^2 = h^2 + r^2$$
$$h^2 = R^2 - r^2$$

$h^2 = 100 - 64 = 36$ h=6.

Ответ: 6.

Задача №5.

Найдите координаты центра и радиус сферы, заданной уравнением
$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + z^2 = 25$ $((x + 3)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 16)$.

Напишите уравнение сферы радиуса R с центром точке A, если A (2; 0; – 1), R = 7 (A (– 2; 1; 0), R = 6).

Проверьте, лежит ли точка A на сфере, заданной уравнением
$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 1$, если A (– 2; 1; 4) $((x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 4)^2 = 4$, если A (5; – 1; 4)).

Докажите, что данное уравнение является уравнением сферы:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y = 2$$
$$(x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z = 7).$$

Задача№6

Два сечения шара радиуса 10 см параллельными плоскостями имеют радиусы, равные 6 см и 8 см. Найти расстояние между секущими плоскостями.

Решение:

находим расстояние каждой из параллельных плоскостей до центра шара из прямоугольных треугольников по теореме Пифагора:

$d_1 = \sqrt{100-36} = 8$ см

или

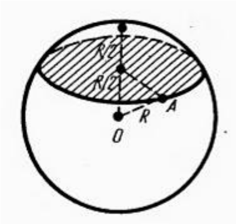
$d_2 = \sqrt{100-64} = 6$ см.

В зависимости от того, лежит ли центр шара между плоскостями или нет, получаем два различных ответа к задаче:

d=14 см

Задача№7

Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная ему плоскость. Как относится площадь полученного сечения к площади большого круга (рис. 69)?



Решение:

отношение площади круга к площади полученного сечения равно $\frac{\pi\left(R\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2}{\pi R^2}=\frac{3}{4}$.

Задания для самостоятельного решения:

Решите задачи:

1) Шар, радиус которого равен 41 дм, пересечен плоскостью на расстоянии 9 дм от центра. Вычислите площадь получившегося сечения.

2) Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная к нему плоскость. Как относится площадь полученного сечения к площади большого круга?

3) Радиус шара равен 63см. Точка находится на касательной плоскости на расстоянии 16 см от точки касания. Найти ее кратчайшее расстояние от поверхности шара.

4) Радиус шара *R*. Через конец радиуса проведена плоскость под углом в 60^0 к нему. Найти площадь сечения.

5) На поверхности шара даны три точки. Прямолинейные расстояния между ними: 6 см, 8 см и 10 см. Радиус шара равен 13см. Радиус шара равен 13см. Найти расстояние от центра шара до плоскости, проходящей через эти три точки.

Контрольные вопросы:

Дайте определение шара, сферы.

Запишите формулы площади сферы, объема шара.

Приведите примеры взаимного расположения сферы и плоскости.

Практическая работа № 77: Примеры симметрий в профессии

В разработке