Государственное бюджетное
профессиональное образовательное учреждение
«Кунгурский колледж агротехнологий и управления»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ ЕН.01 Математика по специальности 35.02.03 Технология деревообработки

углублённой подготовки

2023 г.

Рассмотрено и одобрено
на заседании методической комиссии
естественнонаучных дисциплин
Протокол № __1_
от 30 августа 2023 г.
Председатель МК
____________ В.Н. Чернышёва

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора
____

Методические рекомендации по выполнению практических работ составлены в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины ЕН.01 Математика

Организация-разработчик: **государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение «Кунгурский сельскохозяйственный колледж»**

Составитель:
Волкова О.В. преподаватель

Ф.И.О., должность

Пояснительная записка

Методические рекомендации к выполнению самостоятельных работ по дисциплине «ЕН.01 Математика» предназначены для организации самостоятельной работы обучающихся второго курса очного отделения специальности 35.02.03 Технология деревообработки на уроке.

Учебным планом на изучение дисциплины отводится 96 часов, в том числе практические занятия – 32 часа. Самостоятельные занятия являются важной формой образовательного процесса и направлены на экспериментальное подтверждение теоретических положений и формирование учебных и профессиональных практических умений, они составляют важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки.

Перед выполнением самостоятельной работы преподавателем проводится инструктаж, который включает цель задания, его содержание, время выполнения, основные требования к результатам работы, критерии оценки выполнения задания. Выполнению самостоятельных занятий предшествует проверка знаний студентов - их теоретической готовности к выполнению задания. Самостоятельные занятия носят репродуктивный характер. Работы, носящие репродуктивный характер, отличаются тем, что при их проведении студенты пользуются подробными инструкциями, в которых указаны: цель работы, пояснения (теория, основные характеристики), порядок выполнения работы.

Критерии оценивания при выполнении практической работы:

Процент результативности (%)	**Оценка уровня подготовки**	**Оценка**
91 – 100	отлично	5
70 - 90	хорошо	4
50 - 69	удовлетворительно	3
Менее 50	неудовлетворительно	2

Время выполнения самостоятельной работы составляет 90 минут.
В процессе инструктажа преподаватель обращает внимание обучающихся на возможные встречающиеся типичные ошибки.

Самостоятельная работа № 1: Работа с опорными конспектами по теме «Ряды. Установление сходимости рядов» с использованием опорных конспектов по темам занятий и методических рекомендаций

Цель работы: Закрепить и систематизировать знания по теме: «Ряды».

Задание: Исследовать на сходимость числовой ряд с помощью теорем сравнения:

1.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\sqrt[3]{n^7+4n}}$	4.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+2}$
2.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3-3n+1}{n^2+4}$	5.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$
3.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{7n+3}$	6.	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n}$

Задание: Исследовать на сходимость числовой ряд с помощью признака Даламбера:

7.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+3)!}$	10.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{n!}$
8.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^4}$	11.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{(n+1)!}$
9.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2^{3n-1}}$	12.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{\sqrt{n-1}}$

Задание: Исследовать на сходимость числовой ряд с помощью признака Коши:

13.	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+1}{3n+1}\right)^{n-2}$	16.	$\sum_{n=2}^{\infty} \sin\frac{n-2}{n^2+5}$
14.	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^{n}$	17.	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7n+1}{6n+5}\right)^{3n+2}$
15.	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-1}{6n+7}\right)^{(n+1)^2}$	18.	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n+4}{2n-1}\right)^{n^2}$

Задание: Исследовать на сходимость числовой ряд с произвольными членами (в случае сходимости указать тип: абсолютная или условная):

25.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n^2-3)}{n^4+2n}$	28.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+7n}{5^n+n}$.
26.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^{n+2}}{3^{n+1}}$	29.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+n}$
27.	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$	30.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^3-2}$

Пояснения к работе:
Необходимые формулы:
1.Признак сравнения
Пусть даны два ряда с положительными членами $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ (A)
и $b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$ (B), причем каждый член ряда (A) не превосходит соответствующего члена ряда (B), т.е. $a_n b_n$, начиная с некоторого номера, тогда:
1) если сходится ряд (B), то сходится и ряд (A);
2) если расходится ряд (A), то расходится и ряд (B).
2. Признак Даламбера

Если для ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p$, то при p<1 ряд сходится, при p>1 ряд расходится, при p=1 вопрос о сходимости остается открытым.
3.Радикальный признак Коши

Если для ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n} = p$, то при p<1 ряд сходится, при p>1 ряд расходится, при p=1 вопрос о сходимости остается открытым

Контрольные вопросы:
1. Запишите необходимое условие сходимости ряда.
2. Запишите теорему сравнения рядов.
3. Запишите интегральный признак Коши.
4. Запишите признак Лейбница.

Самостоятельная работа №2: Выполнение реферата «Биографии ученых математиков: Коши, Даламбера, Лейбница.

Цель: Научиться написанию реферата

Структура реферата

1. Титульный лист
2. Содержание
3. Введение
4. Основная часть
5. Заключение
6. Список литературы

Самостоятельная работа №3:
Работа с опорными конспектами по темам занятия «Дифференциальное исчисление». Правила и формулы дифференцирования. Производная сложной функции

Цель: закрепить навыки дифференцирования

1. Сведения из истории

Раздел математики, в котором изучаются производные и их применения к исследованию функций, называется ***дифференциальным исчислением***.

Дифференциальное исчисление было создано И.Ньютоном и Г.Лейбницем в конце XVII столетия. Термин «производная» ввел в 1797 г. Ж.Лагранж, он же ввёл современные обозначения производной y', $f'(x)$.

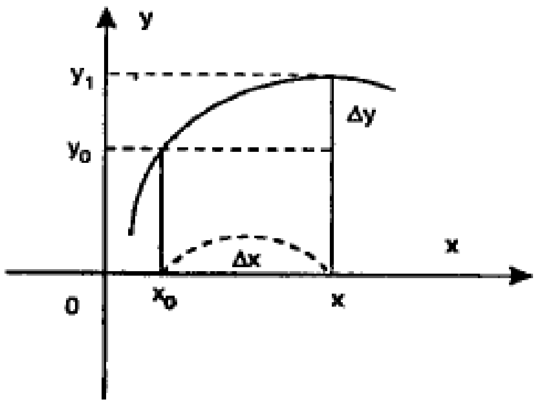
Производная – одно из фундаментальных понятий математики. Оно возникло в связи с необходимостью решения ряда задач из физики, механики и математики, но в первую очередь для определения скорости прямолинейного движения и построения касательной к кривой. Независимо друг от друга И.Ньютон и Г. Лейбниц разработали аппарат исчисления, которым мы пользуемся в настоящее время. Ньютон исходил в основном из задач механики, а Лейбниц по преимуществу исходил из геометрических задач.

2. Понятие и определение производной

Пусть дана функция $y = f(x)$. Если ввести приращение аргумента $\Delta x = x - x_0$ и приращение функции

$\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, то

производная функции запишется в виде $f' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$



Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Производная обозначается одним из символов: y', $f'(x)$.

Функцию, имеющую производную в точке x_0 называют ***дифференцируемой*** в данной точке.

Операция нахождения производной называется ***дифференцированием***.

Для того чтобы продифференцировать функцию *y* от *x*, надо:

1) вычислить значение функции *y*, соответствующее данному значению аргумента *x*;

2) придать данному значению аргумента приращение Δx и вычислить новое значение функции $y + \Delta y$;

3) вычесть прежнее значение функции из нового и тем самым определить приращение функции Δy;

4) составить отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$;

5) найти предел отношения при $\Delta x \to 0$; этот предел и дает искомую производную.

Пример. Найти производную функции $y = 3x^2 + 5y$ в любой точке x, найти производные данной функции в точках $x = 2$ и $x = -3$.

Решение.

1) $y = 3x^2 + 5$;

2) $y + \Delta y = 3(x + \Delta x)^2 + 5 = 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 5$;

3) $(3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 5) - (3x^2 + 5) = 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2$;

4) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 6x + 3\Delta x$;

5) $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (6x + 3\Delta x) = 6x$.

Найдём значение производной в данных точках:

при $x = 2$ $f'(2) = 6 \cdot 2 = 12$,

при $x = -3$ $f'(-3) = 6 \cdot (-3) = -18$.

3. Основные правила и формулы дифференцирования

С – постоянная, x – аргумент, u, v, w - функции от x, имеющие производные.

1. Постоянный множитель можно выносить за знак производной

$$(C \cdot u)' = C \cdot u', \ \left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{u'}{C}$$

2. Производная суммы (разности) равна сумме (разности) производных

$$(u + v - w)' = u' + v' - w'$$

3. Производная произведения равна

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

4. Производная частного равна

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Формулы дифференцирования

Функция $f(x)$		Производная $f'(x)$.
1.	C	0
2.	x	1
3.	x^n	$n \cdot x^{n-1}$
4.	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
5.	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
6.	a^x	$a^x \cdot \ln a$
7.	e^x	e^x
8.	$\sin x$	$\cos x$
9.	$\cos x$	$-\sin x$
10.	$tg\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
11.	$ctg\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
12.	$\log_a x$	$\frac{1}{x\ell na}$
13.	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
14.	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15.	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
16.	$arctg\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$
17.	$arcctg\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Пример. Вычислить производную функции:

№ 1. $y = 3^x - 2x^5 + e^2$

$$y' = (3^x - 2x^5 + e^2)' = (3^x)' - 2 \cdot (x^5)' + (e^2)' = 3^x \ln 3 - 10x^4;$$

№ 2. $y = 2^x \cdot x^3$

$$y' = (2^x \cdot x^3)' = (2^x)' \cdot x^3 + 2^x \cdot (x^3)' = 2^x \ln 2 \cdot x^3 + 2^x \cdot 3x \cdot^2 = 2^x \cdot x^2 (x \cdot \ln 2 + 3)$$

;

№ 3. $y = \dfrac{x^2}{2 - x^2}$

$$y' = \left(\frac{x^2}{2 - x^2} \right)' = \frac{(x^2)' \cdot (2 - x^2) - x^2 \cdot (2 - x^2)'}{(2 - x^2)^2} = \frac{2x \cdot (2 - x^2) - x^2 \cdot (-2x)}{(2 - x^2)^2} =$$

$$= \frac{4x - 2x^3 + 2x^3}{(2 - x^2)^2}.$$

<u>Задания для самостоятельной работы</u>

Найти производные функций:

1. $y = -x^3 + 9x^2 + x - 1$	2. $y = 0{,}5t^3 + 0{,}6t^2 + 0{,}8t + 11$
3. $y = (2x + 1)(x^2 + 3x - 1)$	4. $y = (-4x^2 + 1)(x^2 - 2x + 7)$
5. $y = \dfrac{5}{x^2 + 2x}$	6. $y = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$
7. $y = -3x^{-5} + 154x^{-4} - 2x^{-3} - \dfrac{1}{x} + 8$	8. $y = x^{-5} - 4x^{-3} + 2\cos x - 3x^2$
9. $y = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 1$	10. $y = x^4 - 3x^2 + 7x - 5\sin x$
11. $y = \dfrac{3x^2 - 2x - 4}{2x - 1}$	12. $y = \dfrac{\ln x + 4x^2}{e^x}$

4. Производная сложной функции

Пусть дана сложная функция $y = g(u)$, где $u = f(x)$.

Если функция $u = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке *x*, а функция $y = g(u)$ определена на множестве значений функции $f(x)$ и дифференцируема в точке $u = f(x)$, то сложная функция $y = g(f(x))$ в данной точке *x* имеет производную, которая находится по формуле

$$y'(x) = g'(u) \cdot f'(x).$$

Пример. Вычислить производную сложной функции:

№ 1. $y=(1+x^2)^5$

$$y'=((1+x^2)^5)'=5\cdot(1+x^2)^4\cdot(1+x^2)'=10x\cdot(1+x^2)^4;$$

№ 2. $y=\sin^2 x$

$$y'=(\sin^2 x)'=2\sin x\cdot(\sin x)'=2\sin x\cdot\cos x=2\sin 2x;$$

№ 3. $y=x\cdot e^{x^2}$

$$y'=(x\cdot e^{x^2})'=(x)'\cdot e^{x^2}+x\cdot(e^{x^2})'=e^{x^2}+x\cdot e^{x^2}\cdot(x^2)'=e^{x^2}+x\cdot e^{x^2}\cdot 2x=e^{x^2}(1+2x^2)$$

<u>Задания для самостоятельной работы</u>

Найти производные сложных функций:

1. $y=\sqrt{1+x^3}$	2. $y=\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$
3. $y=2\cdot(2x^3+1)^4$	4. $y=5\cdot(2x^2+1)^3$
5. $y=\dfrac{5}{tg^2 x}$	6. $y=2\cdot\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$
7. $y=x^2\cdot\sqrt{9-4x^2}$	8. $y=\sin^3 x\cdot\cos 2x$
9. $y=\dfrac{5x}{(4x^3-2)^6}$	10. $y=\dfrac{1}{2}\cdot tg^2 x+\ln\cos x$
11. $y=\dfrac{3x^2-2x-4}{2x-1}$	12. $y=\dfrac{\ln x+4x^2}{e^x}$

Самостоятельная работа №4:

Составление конспекта по теме «Исследование функций с помощью производной и построение графиков».

Цели: закрепить и систематизировать теоретические знания,

· формировать умения и навыки решения задач по исследованию функции с помощью производной.

В результате выполнения работы студент должен знать связь производной функции со свойствами монотонности функции: возрастанием, убыванием и экстремумами.

Должен уметь исследовать функцию с помощью производной.

План выполнения практической работы

1. Изучение методических рекомендаций по решению задач и выполнение упражнений и задач

2. Выполнение самостоятельной работы по вариантам.

3. Письменные ответы на контрольные вопросы

Методические рекомендации по решению упражнений и задач.

Пример 1: Провести полное исследование функции $y = x^3 - 3x$ и построить ее график

Решение:

1) Функция определена на всей числовой оси, т. е. ее область определения $x \in (-\infty; +\infty)$

2) Выясним, является ли функция четной или нечетной: $y(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -y(x)$.

Отсюда следует, что функция является нечетной, т.е. график симметричен относительно начала координат.

3) Найдем точки пересечения с осями координат:

- с осью OX: решим уравнение $x^3 - 3x = 0$
$x(x^2 - 3) = 0$, $x = 0$ *или* $x = \pm\sqrt{3}$
Точки пересечения с осью OX $(0;0), (\sqrt{3};0), (-\sqrt{3};0)$

- с осью OY: $y(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 = 0$
Точка пересечения с осью OY $(0;0)$

4) Функция непрерывна, асимптот у нее нет.

5) Найдем промежутки монотонности и точки экстремума функции: $y' = 3x^2 - 3$.

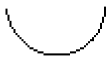
Критические точки: $3x^2 - 3 = 0, \quad x^2 = 1, \quad x = \pm 1$.

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	+	0	-	0	+
y	$\nearrow$	т. max 2	$\searrow$	т. min -2	$\nearrow$

$y(0) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = 2$
$y(2) = 1^3 - 3 \cdot 1 = -2$

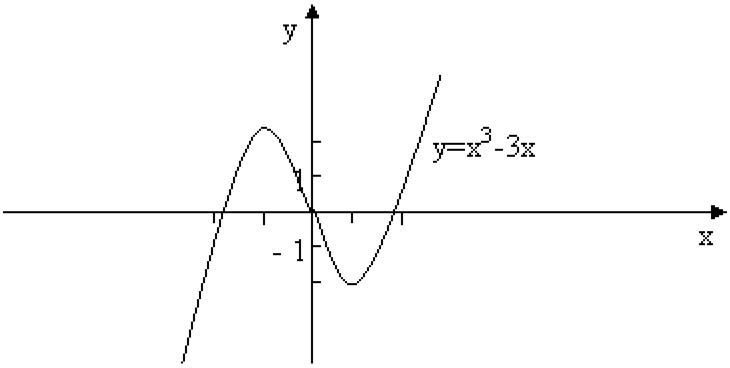
6) Найдем промежутки выпуклости и точки перегиба функции: $y'' = 6x$

Критические точки: $6x = 0, \quad x = 0$.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
y''	-	0	+
y		точка перегиба 0	

$y(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 = 0$

7) По результатам исследования построим график функции:



Пример 2: Провести полное исследование функции и построить её график. $y = f(x) = xe^{-x^2}$

Решение: 1) Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой: $D(f) = \Re$.

$f(-x) = -xe^{-(-x)^2} = -xe^{-x^2} = -(xe^{-x^2}) = -f(x)$, значит, данная функция является нечетной, её график симметричен относительно начала координат.

Очевидно, что функция непериодическая.

2) Асимптоты, поведение функции на бесконечности.

Так как функция непрерывна на R, то вертикальные асимптоты отсутствуют

В ходе решения используем **правило Лопиталя**: *Если существует предел отношения* ***бесконечно больших*** *в точке* k *функций:* $\lim\limits_{x \to k} \frac{f(x)}{g(x)}$ *, то в целях устранения неопределённости* $\frac{\infty}{\infty}$ *можно взять* ***две производные*** *– ОТДЕЛЬНО от числителя и ОТДЕЛЬНО от знаменателя. При этом:* $\lim\limits_{x \to k} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to k} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *, то есть* ***при дифференцировании числителя и знаменателя значение предела не меняется*****.**

римечание*: предел* $\lim\limits_{x \to k} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *должен существовать*

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}(xe^{-x^2}) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{e^{x^2}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x)'}{(e^{x^2})'} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2xe^{x^2}} = 0$$

Прямая $y = 0$ (ось OX) является горизонтальной асимптотой графика при $x \to \pm\infty$.

Из непрерывности на R и существования горизонтальной асимптоты следует тот факт, что функция *ограничена сверху* и *ограничена снизу*.

3) Точки пересечения графика с координатными осями, интервалы знакопостоянства.

График $f(x) = xe^{-x^2}$ проходит через начало координат.

Других точек пересечения с координатными осями нет. Более того, интервалы знакопостоянства очевидны, и ось можно не чертить: $e^{-x^2} > 0$, а значит, знак функции зависит только от «икса»:

$f(x) = xe^{-x^2} > 0$, если $x > 0$; $f(x) < 0$, если $x < 0$.

4) Возрастание, убывание, экстремумы функции.

$$f'(x) = (xe^{-x^2})' = (x)'\cdot e^{-x^2} + x\cdot(e^{-x^2})' = e^{-x^2} + x\cdot e^{-x^2}\cdot(-2x) = (1-2x^2)e^{-x^2} = 0$$

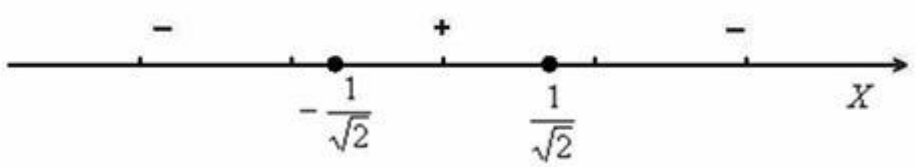
$$1-2x^2 = 0$$

$$2x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \approx \pm 0{,}71$ – критические точки.

Точки симметричны относительно нуля. Определим знаки производной:



Функция возрастает на интервале $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и убывает на интервалах $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$

В точке $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ функция достигает максимума: $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2e}} \approx 0{,}43$.

В силу свойства $f(-x) = -f(x)$ (нечётности функции) минимум можно не вычислять: $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2e}}$

Поскольку функция убывает на интервале $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, то, очевидно, на «минус бесконечности» график расположен **под** своей асимптотой. На интервале $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$ функция тоже убывает, но здесь всё наоборот – после перехода через точку максимума $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ линия приближается к оси OX уже сверху.

Из вышесказанного также следует, что график функции является выпуклым на «минус бесконечности» и вогнутым на «плюс бесконечности».

Самостоятельная работа № 5,6: Работа с опорными конспектами по темам занятий «Интегральное исчисление»

При решении задач этой темы необходимо знать:

1. Определение и свойства неопределенного интеграла.
2. Таблицу основных интегралов.
3. Основные методы интегрирования.
4. Стандартные методы интегрирования наиболее часто встречающихся классов функций.
5. Определение, свойства и способы вычисления определенного интеграла.

Таблица основных интегралов

1 $\int dx = x + C;$

2 $\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C, \quad k \neq -1;$

3 $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C;$

4 $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$ 4а $\int e^x dx = e^x + C;$

5 $\int \sin x\, dx = -\cos x + C;$

6 $\int \cos x\, dx = \sin x + C;$

7 $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$

8 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C;$

9 $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$

10 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx = \ln\left|\sqrt{x^2 \pm a^2} + x\right| + C;$

11 $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$

12 $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$

Образец решения варианта

Задание 1: Вычислить интеграл:

а) $\int\left(x^5 + \frac{4}{x^3} - \sqrt[3]{x^2} - 7\right)dx$**;**

б) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1+2x)^3}};$

в) $\int \frac{x^4}{\sin^2 x^5}dx;$

г) $\int 3^{2-7x}dx;$

д) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx;$

е) $\int e^x \cdot \sin e^x dx;$

ж) $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}}dx;$

з) $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-7}}dx;$

и) $\int \frac{\sin 5x}{4-\cos^2 5x}dx;$

к) $\int x \cdot \operatorname{tg}x^2 dx;$

л) $\int \frac{3^x}{9^x+4}dx;$

м) $\int x^2 \cdot \cos x\, dx;$

н) $\int \arccos x\, dx;$

о) $\int \frac{x^2+3x+6}{x^3-5x^2+6x}dx;$

п) $\int \frac{x^6}{x^2-x+1}dx;$

р) $\int \frac{dx}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)};$

с) $\int \frac{3x dx}{\sqrt{3x^2-2}+\sqrt[4]{3x^2-2}};$

т) $\int \cos 3x \cos 5x dx;$

у) $\int \sin^4 x\, dx;$

ф) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}};$

***Решение*:**

а) Найдем интеграл, применив свойства неопределенного интеграла и формулы (**1**) и (**2**) табличного интегрирования:

$$\int\left(x^5 + \frac{4}{x^3} - \sqrt[3]{x^2} - 7\right)dx = \int\left(x^5 + 4\cdot x^{-3} - x^{\frac{2}{3}} - 7\right)dx = \int x^5 dx + 4\int x^{-3}dx - \int x^{\frac{2}{3}}dx - 7\int dx =$$

$$= \frac{x^{5+1}}{5+1} + 4\cdot\frac{x^{-3+1}}{-3+1} - \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} - 7x + C = \frac{x^6}{6} + 4\cdot\frac{x^{-2}}{-2} - \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} - 7x + C = \frac{x^6}{6} - \frac{2}{x^2} - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{5} - 7x + C;$$

Интегралы (б – л) решим методом замены переменной.

б) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1+2x)^3}} \left| \begin{aligned} &t = 1+2x; \\ &dt = 2dx; \\ &dx = \frac{1}{2}dt \end{aligned} \right| = \int \frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt[4]{t^3}} = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{3}{4}}dt =$

{для нахождения интеграла применим формулу (**2**)}

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{4}}}{1/4} + C = 2(1+2x)^{1/4} + = 2\sqrt[4]{1+2x} + C;$

в**)** $\int \frac{x^4}{\sin^2 x^5} dx = \left| \begin{aligned} &t = x^5 \\ &dt = 5x^4 dx \\ &x^4 dx = \frac{1}{5}dt \end{aligned} \right| = \int \frac{\frac{1}{5}dt}{\sin^2 t} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{\sin^2 t} =$

{для нахождения интеграла применим формулу (**12**)}

$= -\frac{1}{5}\operatorname{ctg} t + C = -\frac{1}{5}\operatorname{ctg} x^5 + C;$

г) $\int 3^{2-7x} dx = \left| \begin{aligned} &t = 2-7x, \\ &dt = -7dx, \\ &dx = -\frac{1}{7}dt \end{aligned} \right| = \int 3^t \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) dt = -\frac{1}{7}\int 3^t dt =$

{для нахождения интеграла применим формулу (**4**)}

$= -\frac{1}{7} \cdot \frac{3^t}{\ln 3} + C = -\frac{1}{7} \cdot \frac{3^{2-7x}}{\ln 3} + C;$

д) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \left| \begin{aligned} &t = \operatorname{arctg} x \\ &dt = \frac{1}{1+x^2} dx \end{aligned} \right| = \int t dt =$

{для нахождения интеграла применим формулу (**2**)}

$= \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x + C;$

е) $\int e^x \cdot \sin e^x dx = \left| \begin{aligned} &t = e^x \\ &dt = e^x dx \end{aligned} \right| = \int \sin t dt =$

{для нахождения интеграла применим формулу (**5**)}

$= -\cos t + C = -\cos e^x + C;$

ж) $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}}dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2xdx \\ xdx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{4-t^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{2^2-t^2}} =$

{для нахождения интеграла применим формулу (**8**)}

$= \frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{2} + C;$

з) $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-7}}dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{\left(e^x\right)^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2}}dx = \left| \begin{array}{l} t = e^x, \\ dt = e^x dx, \\ e^x dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2}} =$

{для нахождения интеграла применим формулу (**10**)}

$= \ln\left|\sqrt{t^2-\left(\sqrt{7}\right)^2} + t\right| + C = \ln\left|\sqrt{e^{2x}-7} + e^x\right| + C;$

и) $\int \frac{\sin 5x\ dx}{9-\cos^2 5x} = \left| \begin{array}{l} t = \cos 5x \\ dt = -5\sin 5x\,dx \\ \sin 5x\,dx = -\frac{1}{5}dt \end{array} \right| = \int \frac{-\frac{1}{5}dt}{9-t^2} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t^2-9} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t^2-3^2} =$

{для нахождения интеграла применим формулу (**9**)}

$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right| + C = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{\cos 5x-3}{\cos 5x+3}\right| + C = \frac{1}{30}\ln\left|\frac{\cos 5x-3}{\cos 5x+3}\right| + C;$

к) $\int x\cdot \mathrm{tg} x^2 dx = \int \frac{x\sin x^2}{\cos x^2}dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x^2 \\ dt = -2x\sin x^2 dx \\ x\sin x^2 dx = -\frac{1}{2}dt \end{array} \right| = -\int \frac{\frac{1}{2}dt}{t} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} =$

{для нахождения интеграла применим формулу (**3**)}

$= -\frac{1}{2}\ln|t| + C = -\frac{1}{2}\ln\left|\cos x^2\right| + C;$

л) $\int \frac{3^x}{9^x+4}dx = \int \frac{3^x}{\left(3^x\right)^2+2^2}dx = \left| \begin{array}{l} t = 3^x \\ dt = 3^x \ln 3 dx \\ 3^x dx = \frac{1}{\ln 3}dt \end{array} \right| = \frac{1}{\ln 3}\int \frac{dt}{t^2+2^2} =$

{для нахождения интеграла применим формулу (**7**)}

$= \frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{t}{2} + C = \frac{1}{2\ln 3}\mathrm{arctg}\frac{3^x}{2} + C;$

Найдем интегралы (м – н) методом интегрирования по частям,

используя формулу $\int U \cdot V' dx = U \cdot V - \int U' \cdot V dx$ (**13**):

м) $\int x^2 \cos x dx = \begin{vmatrix} U = x^2; & U' = 2x \\ V' = \cos x; & V = \sin x \end{vmatrix} = x^2 \sin x - \int 2x \cdot \sin x dx =$

$= \begin{vmatrix} U = 2x; & U' = 2 \\ V' = \sin x; & V = -\cos x \end{vmatrix} == x^2 \cdot \sin x - \big(2x \cdot (-\cos x) - \int 2 \cdot (-\cos x) dx\big) =$

{для нахождения интеграла применим формулу (**6**)}

$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2\sin x + C;$

н) $\int \arccos x \, dx = \begin{vmatrix} U = \arccos x; \; U' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\ V' = 1; \qquad V = x \end{vmatrix} = x \cdot \arccos x - \int x \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

{второе слагаемое вычислим с помощью замены, применив формулу (**2**)}

$$\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{vmatrix} t = 1 - x^2 \\ dt = -2xdx \\ -xdx = \dfrac{1}{2} dt \end{vmatrix} = \int \frac{\frac{1}{2} dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{1/2} + C = \sqrt{1-x^2} + C$$

в итоге получаем $\int \arccos x \, dx = x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C;$

о) $\int \dfrac{x^2 + 3x + 6}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx.$

Под знаком интеграла правильная рациональная дробь. Разложим её на простейшие дроби:

$$\frac{x^2 + 3x + 6}{x^3 - 5x^2 + 6x} = \frac{x^2 + 3x + 6}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} =$$

$$= \frac{A(x-2)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x-2)}{x(x-2)(x-3)} =$$

$$= \frac{Ax^2 - 5Ax + 6A + Bx^2 - 3Bx + Cx^2 - 2Cx}{x(x-2)(x-3)};$$

Перейдем к равенству числителей:

$x^2 + 3x + 6 = Ax^2 - 5Ax + 6A + Bx^2 - 3Bx + Cx^2 - 2Cx$.

Отсюда следует, что

$$\left.\begin{matrix} x^2: \; 1 = A + B + C \\ x^1: \; 3 = -5A - 3B - 2C \\ x^0: \; 6 = 6A \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 + B + C \\ 8 = -3B - 2C \\ A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1, \\ B = -8, \\ C = 8. \end{cases}$$

Тогда $\dfrac{x^2 + 3x + 6}{x^3 - 5x^2 + 6x} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{8}{x-2} + \dfrac{8}{x-3}.$

Интегрируя почленно полученное равенство и применяя свойства неопределённого интеграла, получим:

$$\int\left(\frac{1}{x}-\frac{8}{x-2}+\frac{8}{x-3}\right)dx=\int\frac{dx}{x}-8\int\frac{dx}{x-2}+8\int\frac{dx}{x-3}=:$$

{для нахождения интегралов применим формулу (**3**)}

$$=\ln|x|-8\ln|x-2|+8\ln|x-3|+C;$$

п) $\int\frac{x^6}{x^2-x+1}dx$.

Под знаком интеграла неправильная рациональная дробь. Выделим целую часть этой дроби путем деления числителя на знаменатель:

$$\frac{x^6}{x^2-x+1}=x^4+x^3-x-1+\frac{1}{x^2-x+1}$$

Выделим полный квадрат в знаменателе правильной рациональной дроби:

$$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}.$$

Возвращаясь к исходному интегралы, получим:

$$\int\left(x^4+x^3-x-1+\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right)dx=\int x^4dx+\int x^3dx-\int xdx-\int 1dx+\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=$$

{для нахождения первых трёх интегралов применим формулу (**2**), для четвёртого – формулу (**1**), последний интеграл найдем с помощью формулы (**7**)}

$$=\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C=\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}-x+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C;$$

р) $\int\frac{dx}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)}$.

Найдем интеграл используя универсальную тригонометрическую подстановку:

$$\left|\begin{array}{l} t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\quad \sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},\\ \frac{x}{2}=\operatorname{arctg}t,\ x=2\operatorname{arctg}t\Rightarrow dx=\frac{2dt}{1+t^2}\end{array}\right|$$

$$=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}-2\cdot\frac{2t}{1+t^2}\right)}=\int\frac{1+t^2}{t\left(t^2-4t+3\right)}dt.$$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{1+t^2}{t\left(t^2-4t+3\right)}=\frac{1+t^2}{t(t-1)(t-3)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-1}+\frac{C}{t-3}=$$

$$=\frac{A(t-1)(t-3)+Bt(t-3)+Ct(t-1)}{t(t-1)(t-3)}$$

Перейдем к равенству числителей:

$$1+t^2 = At^2 - 4At + 3A + Bt^2 - 3Bt + Ct^2 - Ct .$$

Отсюда следует, что

$$\left.\begin{array}{l} t^2:\ 1 = A+B+C \\ t^1:\ \ 0 = -4A-3B-C \\ t^0:\ 1 = 3A \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{3}, \\ B = -1, \\ C = \frac{5}{3}, \end{cases}$$

Тогда $\dfrac{1+t^2}{t\left(t^2-4t+3\right)} = \dfrac{1}{3t} - \dfrac{1}{t-1} + \dfrac{5}{3(t-3)}$.

Интегрируя почленно полученное равенство, получим::

$$\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t} - \int\frac{dt}{t-1} + \frac{5}{3}\int\frac{dt}{t-3} =$$

{для нахождения интегралов применим формулу (**3**)}

$$= \frac{1}{3}\ln|t| - \ln|t-1| + \frac{5}{3}\ln|t-3| + C = \frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| - \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right| + \frac{5}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3\right| + C;$$

с) $\displaystyle\int\frac{3xdx}{\sqrt{3x^2-2}+\sqrt[4]{3x^2-2}}$.

Произведем замену: $3x^2 - 2 = t,\ dt = 6xdx,\ 3xdx = \dfrac{1}{2}dt.$

Получим: $\displaystyle\int\frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{t}+\sqrt[4]{t}} =$

Наименьшее общее кратное знаменателей дробей $\dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{1}{4}$ есть 4, поэтому введем следующую замену:

$$\left|\begin{array}{l} t = z^4 \\ dt = 4z^3dz \\ z = \sqrt[4]{t} \end{array}\right| = \frac{1}{2}\int\frac{4z^3dz}{\sqrt{z^4}+\sqrt[4]{z^4}} = 2\int\frac{z^2}{z^2+z}dz = 2\int\frac{z^2}{z(z+1)}dz = 2\int\frac{z}{z+1}dz =$$

$$= 2\int\left(1-\frac{1}{z+1}\right)dz = 2\int dz - 2\int\frac{dz}{z+1} =$$

{для нахождения интегралов применим формулы (**1**) и (**3**)}

$$= 2z - 2\ln|z+1| + C = 2\sqrt[4]{3x^2-2} - 2\ln\sqrt[4]{3x^2-2} + C;$$

т) $\displaystyle\int\cos 3x\cos 5xdx$.

Найдем интеграл, используя формулу тригонометрических преобразований

$$\cos 3x\cdot\cos 5x = \frac{1}{2}\left(\cos(3x-5x)+\cos(3x+5x)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos(-2x)+\cos 8x\right) = \frac{1}{2}\left(\cos 2x+\cos 8x\right)$$

Интегрируя почленно полученное равенство и применяя формулу (**6**), получим:

$$\int\frac{1}{2}(\cos 8x+\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}(-\sin 8x) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(-\sin 2x) + C = -\frac{1}{16}\sin 8x - \frac{1}{4}\sin 2x + C;$$

у) $\int \sin^4 x\, dx = \int \left(\sin^2 x\right)^2 dx = \left\{\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}\right\} = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$

$= \int \frac{1-2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} dx = \left\{\cos^2 2x = \frac{1+\cos 4x}{2}\right\} = \frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx =$

$= \frac{1}{4}\int dx - 2\cdot\frac{1}{4}\int \cos 2x\, dx + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int \cos 4x dx =$

$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx + \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x dx == \frac{3}{8}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x dx =$

{для нахождения интегралов применим формулы (**1**) и (**6**)}

$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x + C = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C;$;

ф) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} =$:

$$\left|\begin{array}{l} t = \sqrt{e^{2x}-1}, \\ e^{2x} = t^2+1, \\ x = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right), \\ dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{t^2+1}dt \end{array}\right| = \int \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{t^2+1}dt}{t} = \int \frac{dt}{t^2+1} =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**7**)}

$= \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}\sqrt{e^{2x}-1} + C.$

Задание 3: Вычислить:

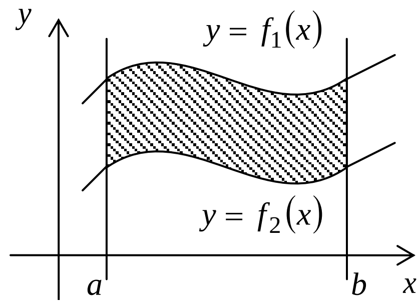
а) площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2$ и $y = 2 - x^2$;

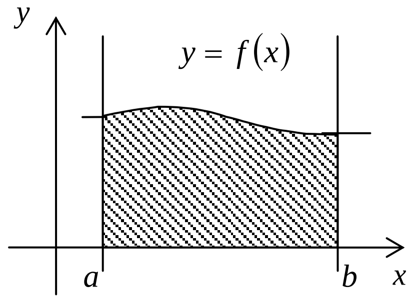
Решение:

а) Существуют несколько формул для вычисления площадей плоских фигур.

▪ Площадь фигуры, заданной в декартовой системе координат, ограниченной линиями $y = f_1(x)$ - сверху, $y = f_2(x)$ - снизу, слева прямой $x = a$, справа прямой $x = b$ определяется формулой

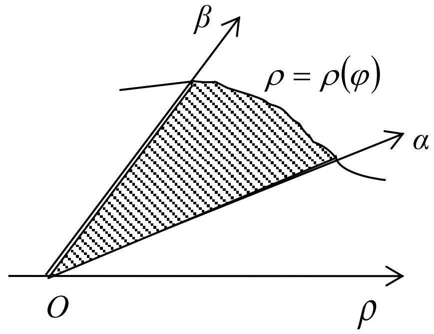
$S = \int_a^b \left[f_1(x) - f_2(x)\right]dx$ (**14**);





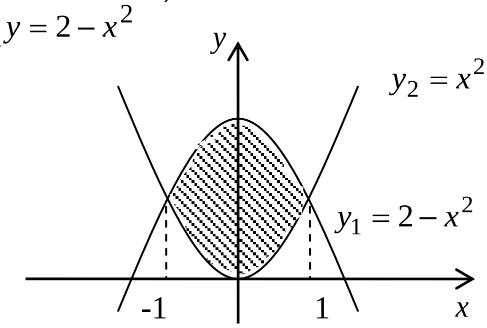
▪ Площадь фигуры, ограниченной кривой заданной параметрически уравнениями $(y = f(x),\ x \in [a;\ b]) \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \end{cases} t \in [\alpha;\ \beta]$, определяется формулой $S = \int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t)dt$ (**15**);

▪ Площадь фигуры, заданной в полярной системе координат, ограниченной кривой $\rho = \rho(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, определяется формулой: $S = \dfrac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi$ (**16**).



В нашем случае линии, ограничивающие фигуру, заданы в декартовых координатах, поэтому мы будем использовать формулу (**14**).

Найдем координаты точек пересечения линий: $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2 - x^2 \end{cases} \Rightarrow$

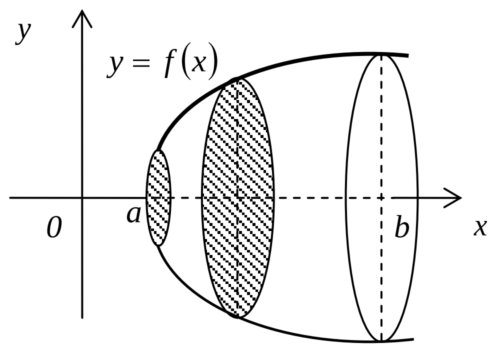


$x^2 = 2 - x^2 \ \Leftrightarrow \ x^2 = 1 \ \Leftrightarrow$
$x_1 = -1; \quad x_2 = 1 \Rightarrow a = -1; \quad b = 1.$

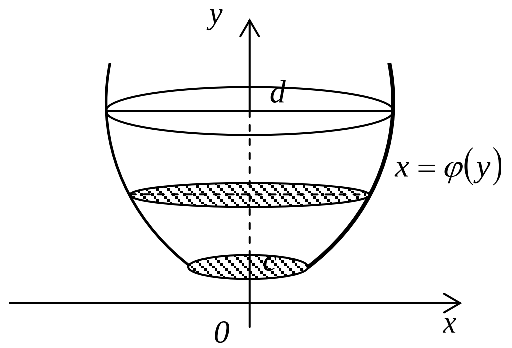
$$S = \int\limits_{-1}^{1}\left(\left(2 - x^2\right) - x^2\right)dx = \int\limits_{-1}^{1}\left(2 - 2x^2\right)dx = 2\int\limits_{-1}^{1}\left(1 - x^2\right)dx =$$

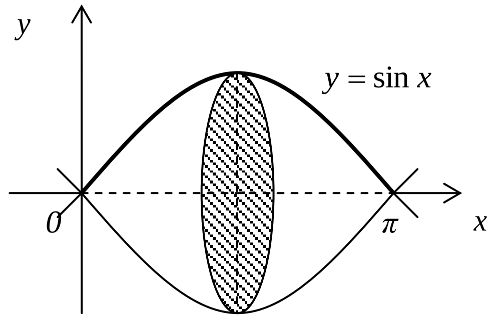
$$= 2\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 2\left(1 - \frac{1}{3} - \left(-1 - \frac{(-1)^3}{3}\right)\right) = \frac{8}{3};$$

в) Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $x \in [a;\ b]$. Тогда объём тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу Ox, определяется формулой: $V_x = \pi\int\limits_{a}^{b} f^2(x)dx$ (**20**).



Если криволинейная трапеция ограниченна графиком непрерывной функции $x = \varphi(y)$ и прямыми $x = 0$, $y = c$, $y = d$ $(c < d)$, то объём тела, образованного вращением этой трапеции вокруг оси Oy, по аналогии с формулой (20), равен: $V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y)dy$ (**21**).





В условиях нашей задачи $y = \sin x$, $a = 0$, $b = \pi$.

$$V_x = -\pi\int_0^{\pi} \sin^2 xdx = \left\{ \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \right\} =$$

$$= \pi\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\pi} dx - \int_0^{1} \cos 2x\,dx \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x \right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}\left(\left(\pi - \frac{1}{2}\sin 2\pi \right) - \left(0 - \frac{1}{2}\sin 0 \right) \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

Вариант 1.

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int\left(x^2 - 2x + \frac{3}{\sqrt{x}} \right)dx;$ б) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x}};$ в) $\int\frac{x^2}{\left(1+3x^3\right)^2}dx;$

г) $\int\frac{x}{1+3x^2}dx;$ д) $\int\frac{\cos x}{1-2\sin x}dx;$ е) $\int e^{-x^2}xdx;$

ж) $\int\sin 2x\,dx;$ з) $\int\left(\cos\frac{x}{3} + 1 \right)dx;$ и) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}};$

к) $\int\frac{3^x}{3^{2x}+1}dx;$ л) $\int\frac{dx}{x^2-2x+4};$ м) $\int xe^{-2x}\,dx;$

н) $\int x^2\ln x\,dx;$ о) $\int\frac{2x-1}{x^2-3x+2}dx;$ п) $\int\frac{x^4+2}{x^3+3x}dx;$

р) $\int\frac{dx}{1+3\cos x};$ с) $\int\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx;$ т) $\int\sin x\cos 2xdx;$

у) $\int \cos^2 x\,dx;$ ф) $\int \left(e^x+2\right)^3 dx.$

Задание 2: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной параболами: $y=\frac{x^2}{2}-x+1$ и $y=-\frac{x^2}{2}+3x+6$;

б) длину дуги кривой: $y=\ln x$ от точки с абсциссой $x_1=\frac{3}{4}$ до точки $x_2=2{,}4$;

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной гиперболой $y=\frac{6}{x}$, осью OY и прямыми $y=1$ и $y=6$.

<u>Вариант 2.</u>

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int\left(x^4-\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{2}{x^3}-11\right)dx;$ б) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}};$ в) $\int\frac{xdx}{\left(5x^2+1\right)^2};$

г) $\int 7^x\sqrt{3\cdot 7^x+4}\,dx;$ д) $\int\frac{x^2}{1+3x^3}dx;$ е) $\int\frac{e^{-x}}{e^{-x}+4}dx;$

ж) $\int\sin 5x\,dx;$ з) $\int\frac{dx}{1+3x^2};$ и) $\int tg3x\,dx;$

к) $\int\frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}};$ л) $\int\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x-3};$ м) $\int(x+3)e^{2x}dx;$

н) $\int x\arccos x\,dx;$ о) $\int\frac{3x^2-1}{x^3-x}dx;$ п) $\int\frac{x^3+1}{x^2-4}dx;$

р) $\int\frac{dx}{2-2\sin x};$ с) $\int\frac{dx}{\sqrt{3x+1}+\sqrt[4]{3x+1}};$ т) $\int\cos 3x\sin 2x dx;$

у) $\int\sin^4 x\cdot\cos x^5\,dx;$ ф) $\int\sqrt{e^x+1}\,dx.$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_0^1\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^3}};$ б) $\int_0^\infty\frac{xdx}{x^2+4}.$

***Задание 3*:** Вычислить:

а) площадь фигуры, заключенной между кривой $y = 4 - x^2$ и осью Ox;

б) длину дуги кривой $y = 1 - \ln \cos x$ в пределах от $x_1 = 0$ до $x_2 = \dfrac{\pi}{4}$;

в) объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной кривыми $y = \dfrac{2}{1 + x^2}$.

Вариант 3.

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int \left(x^2 - \sqrt[4]{x^3} + \frac{2}{x} - 3 \right) dx;$ б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}};$ в) $\int \frac{x^2}{\left(1 - 4x^3\right)^2} dx;$

г) $\int \frac{x\,dx}{x^2 + 5};$ д) $\int \frac{\cos 3x}{1 + \sin 3x} dx;$ е) $\int e^{-2x^2} \cdot x dx;$

ж) $\int a^{3x}\, dx;$ з) $\int (2 + \sin 2x) dx;$ и) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx;$

к) $\int 2^x tg 2^x\, dx;$ л) $\int \frac{2^x}{\sqrt{1 - 4^x}} dx;$ м) $\int x e^x dx;$

н) $\int x \arcsin 5x\, dx;$ о) $\int \frac{x^2 + 2x - 2}{x^3 - 9x} dx;$ п) $\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 2x} dx;$

р) $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x};$ с) $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1 - \sqrt{x}} dx;$ т) $\int \cos 4x \cdot \cos 5x\, dx;$

у) $\int \sin^3 x\, dx;$ ф) $\int \left(e^x - 4\right)^2 dx.$

Вариант 4.

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int \left(1 - 2\sqrt[3]{x} + \frac{7}{x^4} \right) dx;$ б) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + 2x}};$ в) $\int \frac{xdx}{\left(3 + x^2\right)^3};$

г) $\int \frac{arctg 2x}{1 + 4x^2} dx;$ д) $\int \frac{x^2}{1 + 4x^3} dx;$ е) $\int \frac{e^x}{1 - 2e^x} dx;$

ж) $\int e^{-x^3} x^2 dx;$ з) $\int \sin 2x\, dx;$ и) $\int \frac{dx}{\cos^2 3x};$

к) $\int \frac{x\,dx}{\sin x^2};$ л) $\int \frac{dx}{5 + 4x^2};$ м) $\int (x + 2) \cos 5x\, dx;$

н) $\int \arcsin 4x\, dx$;   о) $\int \frac{x-3}{x^3+8}dx$;   п) $\int \frac{x^3-2}{x^3+2x^2+x}dx$;

р) $\int \frac{dx}{2+\sin x}$;   с) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}\, dx$;   т) $\int \sin x \cdot \cos 3x\, dx$;

у) $\int \cos^4 x\, dx$;   ф) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+e^x}}$.

Самостоятельная работа №7:

Подготовка к практической работе «Линейные дифференциальные уравнения 1 порядка» с использованием опорных конспектов по темам занятий и методических рекомендаций;

Тема: Обыкновенные дифференциальные уравнения

Цели: - приобретение базовых знаний в области фундаментального раздела математики – линейной алгебры;

- развитие логического мышления;
- воспитание аккуратности, настойчивости.

Задание: Найти частное решение дифференциального уравнения (по вариантам)

1)*(1+y)dx=(1-x)dy; y=3 при x=-2.*

2)(2+y)dx=(3-x)dy; y=1 при x=-1.

3)(3+y)dx=(1-x)dy; y=2 при x=4.

4)y'=2x, y=4 при x=5.

5)2y'=x, y=2 при x=-2.

Форма контроля: проверка решения в рабочей тетради.

Время на выполнение задания 5 часов.

Вопросы для самоконтроля: 1. Какие уравнения называются дифференциальными?
2. Какие уравнения называются дифференциальными переменными с разделяющимися переменными?

Пример:

Дифференциальное уравнение *первого порядка* в общем случае **содержит**:
1) независимую переменную x;
2) зависимую переменную y (функцию);
3) первую производную функции: y'.

В некоторых уравнениях 1-го порядка может отсутствовать «икс» или (и) «игрек», но это не существенно – **важно** чтобы в ДУ **была** первая производная y', и **не было** производных высших порядков – y'', y''' и т.д.

Что значит решить дифференциальное уравнение? Решить дифференциальное уравнение – это значит, найти **множество всех функций**, которые удовлетворяют данному уравнению. Такое множество функций часто имеет вид $y = f(x; C)$ (C – произвольная постоянная), который называется **общим решением дифференциального уравнения**.

Найти частное решение дифференциального уравнения $y' = -2y$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 2$

Решение: по условию требуется найти **частное решение** ДУ, удовлетворяющее заданному начальному условию. Такая постановка вопроса также называется *задачей Коши*.

Сначала находим общее решение. В уравнении нет переменной «икс», но это не должно смущать, главное, в нём есть первая производная.

Переписываем производную в нужном виде:

$$\frac{dy}{dx} = -2y$$

Очевидно, что переменные можно разделить, мальчики – налево, девочки – направо:

$$\frac{dy}{y} = -2dx$$

Интегрируем уравнение:

$$\int \frac{dy}{y} = -2\int dx$$

$$\ln|y| = -2x + C^*$$

Общий интеграл получен. Здесь константу я нарисовал с надстрочной звездочкой, дело в том, что очень скоро она превратится в другую константу.

Теперь пробуем общий интеграл преобразовать в общее решение (выразить «игрек» в явном виде). Вспоминаем старое, доброе, школьное: $\ln a = b \Rightarrow a = e^b$. В данном случае:

$$y = e^{-2x+C^*}$$

Константа в показателе смотрится как-то некошерно, поэтому её обычно спускают с небес на землю. Если подробно, то происходит это так. Используя свойство степеней, перепишем функцию следующим образом:

$$y = e^{C^*} \cdot e^{-2x}$$

Если C^* – это константа, то e^{C^*} – тоже некоторая константа, переобозначим её буквой C:

$$y = Ce^{-2x}$$

Запомните «снос» константы – это **второй технический приём**, который часто используют в ходе решения дифференциальных уравнений.

Итак, общее решение: $y = Ce^{-2x},\ \text{где } C = const$. Такое вот симпатичное семейство экспоненциальных функций.

На завершающем этапе нужно найти частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию $y(0) = 2$. Это тоже просто.

В чём состоит задача? Необходимо подобрать **такое** значение константы C, чтобы выполнялось условие $y(0) = 2$.

Оформить можно по-разному, но понятнее всего, пожалуй, будет так. В общее решение вместо «икса» подставляем ноль, а вместо «игрека» двойку:

$$2 = Ce^{-2\cdot 0}$$

$$2 = Ce^0$$

$$2 = C \cdot 1$$

То есть, $C = 2$

Стандартная версия оформления:

$$y(0) = Ce^{-2\cdot 0} = Ce^0 = C = 2$$

Теперь в общее решение $y = Ce^{-2x}$ подставляем найденное значение константы $C = 2$: $y = 2e^{-2x}$ – это и есть нужное нам частное решение.

Ответ: частное решение: $y = 2e^{-2x}$

Самостоятельная работа №8: Выполнение реферата «Дифференциальные уравнения в науке и технике

Цель: Отработать навыки написания реферата

Структура реферата

7. Титульный лист
8. Содержание
9. Введение
10. Основная часть
11. Заключение
12. Список литературы

Самостоятельная работа №9

Подготовка к практической работе «Основные понятия комбинаторики и теории вероятностей» с использованием опорных конспектов по темам занятий и методических рекомендаций.

Цель: Изучить теоретический материал по теме

1.2. Основные понятия комбинаторики и теории вероятностей

а) Основные понятия комбинаторики

Комбинаторика (теория соединений)– область математики, в которой рассматриваются вопросы о том, сколько различных комбинаций, удовлетворяющих тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов. По сути дела, в комбинаторике изучают конечные множества, их подмножества, а также кортежи, составленные из элементов конечных множеств.

Большинство комбинаторных задач решается с помощью двух основных правил: правила суммы и правила произведения.

Правило суммы: пусть множества A и B не имеют общих элементов. Если элемент a из множества A можно выбрать k способами, элемент b из множества B можно выбрать l способами, то выбор «или элемент a, или элемент b» можно осуществить $k+l$ способами. Это правило распространяется на любое конечное число множеств.

Правило произведения: если элемент a можно выбрать k способами и после каждого из этих выборов элемент b можно выбрать l способами, то пару (a,b) (упорядоченную пару) можно выбрать $k \cdot l$ способами. Это правило распространяется на любое конечное число упорядоченных наборов множества.

Факториал – функция, определённая на множестве целых неотрицательных чисел, значение которой равно произведению натуральных чисел от 1 до данного числа n, т.е. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$ (обозначается $n!$). По определению $0!=1,\ 1!=1$.

Пусть множество X состоит из n элементов. Любой набор из m элементов этого множества называется *выборкой* из n элементов по m элементам. Различают упорядоченные выборки (важен порядок расположения элементов выборки) и неупорядоченные (порядок расположения элементов неважен). Кроме того, различают выборки с повторениями и без повторений.

Определение 1: размещением без повторений из n элементов по m элементам называется упорядоченный набор, составленный из m различных элементов $n-$членного множества (т.е. это упорядоченная выборка без повторений). Число всех размещений без повторений из n элементов по m элементам вычисляется по формуле $A_n^m = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(m-1))$ или $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$.

Определение 2: размещением с повторениями из n элементов по m элементам называется упорядоченный набор, составленный из m элементов $n-$членного множества, при этом элементы в наборе могут повторяться (т.е. это число упорядоченных выборок из n элементов по m элементам с повторениями). Число всех таких наборов вычисляется по формуле $\widetilde{A}_n^m = n^m$.

Определение 3: перестановкой (без повторений) называется упорядоченный набор, составленный из всех элементов данного множества, причем все элементы этого набора различны. Наборы отличаются друг от друга лишь порядком расположения в них элементов. Число всех перестановок из n элементов вычисляется по формуле $P_n = n!$.

Определение 4: сочетанием без повторений из n элементов по m элементам называется любой неупорядоченный набор, состоящий из m различных элементов $n-$членного множества. Число всех таких наборов обозначается через C_n^m и вычисляется по формуле $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

Определение 5: пусть при составлении набора элемент x_1 используется k_1 раз, элемент x_2 используется k_2 раз, …, элемент x_n используется k_n раз, причем различные наборы отличаются лишь порядком расположения в них элементов. Такие наборы называются перестановками с повторениями с составом $k_1, k_2, ..., k_n$. Их число вычисляется по формуле $P(k_1, k_2, ..., k_n) = \dfrac{(k_1 + k_2 + ... + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot ... \cdot k_n!}$.

Определение 6: разобьем все перестановки с повторениями из n–членного множества длины m на классы эквивалентности, отнесся к одному классу эквивалентности перестановки одинаково состава. Эти классы эквивалентности называют сочетаниями с повторениями из n элементов по m элементам. Их число вычисляется по формуле $\widetilde{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$.

Формулы комбинаторики используются в том случае, если требуется посчитать число комбинаций элементов из данного множества, обладающих определенным свойством.

б) Основные понятия теории вероятностей

Теория вероятностей является основой для анализа тех явлений окружающей действительности, которым присуще «изменчивость» и появление которых не определяется однозначно условиями проводимых наблюдений. Вопрос об использовании вероятностных и статистических методов является затруднительным, и его разумно рассматривать после того, как участники обсуждения изучат основные подходы и результаты данной науки.

Теория вероятностей — раздел математики, изучающий закономерности случайных явлений: случайные события, случайные величины, их свойства и операции над ними. Предметом теории вероятностей служит изучение вероятностных закономерностей массовых однородных случайных событий. Знание закономерностей, которым подчиняются многочисленные случайные события, позволяет предугадать, как эти события будут проходить. Так, можно предсказать, причем с небольшой погрешностью, число выпадений герба, если монета будет подброшена достаточно большое количество раз. При этом предполагается, что монета бросается при одних и тех же условиях.

В теории вероятностей *испытание (опыт, эксперимент)* – реализация определенного комплекса условий, в результате которого обязательно произойдет какое-либо событие.

Результат или исход испытания называется *событием*. События обозначаются заглавными буквами начала латинского алфавита $A, B, C, \ldots$.

Пример 1. В коробке лежат цветные шары. Из коробки наугад вытаскивают один шар. Извлечение шара из коробки – испытание, появление шара определенного цвета – событие.

Два события называются *совместными*, если появление одного из них не исключает появление другого в данном испытании.

Два события называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление другого в данном испытании.

Пример 2. Испытание – бросается игральный кубик. A - «выпадение четного числа очков», B - «выпадение числа очков, кратного 3», C - «выпадение числа очков, кратного 4».События A и B совместные, A и C совместные, B и C несовместные.

Два события называются *противоположными*, если в данном испытании одно из них обязательно происходит, и они не могут произойти одновременно, то есть они несовместны. Событие, противоположное событию A, обозначается $\overline{A}$ ($\overline{A}$ - не наступление события A).

Пример 3. Испытание – два человека делают по одному выстрелу по мишени. Событие A - «оба попали в мишень», событие $\overline{A}$ - «хотя бы один промазал».

Событие называется *случайным*, если в данном испытании оно может произойти, а может и не произойти.

Событие называется *достоверным*, если в данном испытании оно происходит при любом исходе этого испытания.

Событие называется *невозможным*, если в данном испытании оно не может произойти по условиям самого испытания.

Рис. 1

Пример 4. Испытание – вынимают один шар из коробки, в которой 5 красных и 4 синих шара. A - «вынут красный шар», B - «вынут синий шар», C - «вынут зеленый шар», D - «вынут цветной шар». События A и B случайные, C невозможное, D достоверное.

События называются *равновозможными* в данном испытании, если по условию опыта нет оснований считать, что одно из них более возможно, чем другое.

Вероятность – численная мера возможности наступления события.

Всякое испытание влечет за собой некоторую совокупность событий. Если эти события можно перечислить, то говорят, что испытание сводится к схеме случаев. Именно в этом случае и применимо классическое определение вероятности.

Говорят, что события $u_1, u_2, ..., u_n$ образуют *полную группу* событий данного испытания, если одно из них обязательно происходит в данном испытании.

Говорят, что события $u_1, u_2, ..., u_n$ составляют *полную группу элементарных событий (элементарных исходов)* данного испытания, если:

1) одно из них обязательно происходит в данном испытании;
2) они попарно несовместны;
3) они равновозможны;
4) их нельзя разложить на более простые события.

Пример 5. Испытание – подбрасывается игральный кубик. 1) u_1 - «выпадение четного числа очков», u_2 - «выпадение числа очков, делящегося на 3», u_3 - «выпадение 5 очков». $\{u_1, u_2, u_3\}$ - не является полной группой элементарных событий данного испытания (нарушены условия $2,3,4$). 2) u_i - «выпадение i очков». $\{u_1, u_2, ..., u_6\}$ - полная группа элементарных событий.

Пусть задано некоторое множество Ω. Элементы этого множества называют элементарными событиями. Любое подмножество множества Ω называется событием. Потребуем, чтобы:

1. Само множество Ω - событие.
2. Если A событие, то $\overline{A}$ тоже событие (где $\overline{A}$ - дополнение множества A до Ω).
3. Если $A_1, A_2, ...$ события, то $A_1 + A_2 + ...$ и $A_1 \cdot A_2 \cdot ...$ тоже события, где $A_1 + A_2 + ... = A_1 \cup A_2 \cup ..., A_1 \cdot A_2 \cdot ... = A_1 \cap A_2 \cap ...$.

Множество Ω, удовлетворяющее условиям $1-3$, называется *пространством элементарных событий*.

Примем определения:

1) Событие Ω называется достоверным.

2) Событие $\Omega^{'}$ называется невозможным, где $\Omega^{'} = C_{\Omega}(\Omega) = \varnothing$.

3) События A и $\overline{A}$ (где $\overline{A} = C_{\Omega}(A)$) называются противоположными.

4) События A и B называются несовместными, если $A \cdot B = \varnothing$.

Говорят, что событие B *благоприятствует* событию A, если наступление события B влечет за собой и наступление события A.

Пример 6. Испытание – подбрасывается игральный кубик. A - «выпадение четного числа очков», B - «выпадение 6 очков». Событие B благоприятствует событию A, но событие A не является благоприятным событию B.

Определение (классическое определение вероятности). Под вероятностью $P(A)$ события A понимается отношение числа равновозможных элементарных исходов, благоприятствующих событию A, к числу всех равновозможных и возможных элементарных исходов данного испытания, то есть $P(A) = \frac{m}{n}$, где m

– число исходов, благоприятствующих событию A, и n – число всех возможных элементарных исходов при данном испытании.

Пример 7. Из полного набора домино выбирается одна пластинка. Какова вероятность, что сумма очков на ней равна 6?

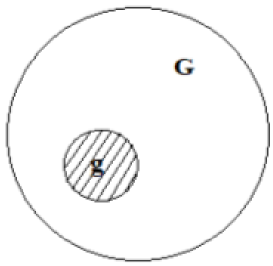
Событие A - «сумма очков на пластине равна 6». Число всех возможных элементарных исходов $n = 28$, число исходов, благоприятствующих событию A , $m = 4$($0+6$, $1+5$, $2+4$, $3+3$). Тогда $P(A) = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$.

Если испытание в задаче состоит в выборе одного элемента из множества, то m и n вычисляются непосредственно. Если же выбирается несколько элементов из множества, то, как правило, для вычисления m и n используются правила и формулы комбинаторики.

Свойства вероятностей событий:

1°. Вероятность достоверного события равна 1 (событию A благоприятствуют все исходы, то есть $m = n$ и $P(A) = \frac{n}{n} = 1$).

2°. Вероятность невозможного события равна 0 (событию A не благоприятствует ни один исход, то есть $m = 0$ и $P(A) = \frac{0}{n} = 0$).



3°. Вероятность случайного события A удовлетворяет неравенству $0 < P(A) < 1$ (так как $0 < m < n$).

Два события A и B называются *равными (эквивалентными)*, если каждое из них происходит всякий раз, когда происходит другое. Эквивалентные события обозначаются $A = B$ и имеют одинаковые вероятности (если $A = B$, то $P(A) = P(B)$).

Определение (геометрическое определение вероятности). Пусть множество g содержится во множестве G ($g \subset G$). И пусть в область G бросается некоторая точка (рис.2). Вероятность того, что точка окажется в области g вычисляется по формуле:

$$P(\text{попадания в область } g) = \frac{\text{мера области } g}{\text{мера области } G}, \text{ где:}$$ Рис. 2

1) если g и G отрезки, то их мера – длина отрезков;

2) если g и G плоские области, то их мера – их площади;

3) если g и G пространственные области, то их мера – их объемы.

Не всегда бывает удобно и легко непосредственно подсчитывать случаи, благоприятствующие данному событию. Поэтому для нахождения вероятности события бывает полезно представить его в виде комбинации некоторых других, более простых событий. Приведем теоретические факты, используя которые можно по вероятностям одних случайных событий находить вероятности других случайных событий, связанных с первыми.

Суммой событий A и B (рис.3) называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий (или наступление события A или события B, или они наступили одновременно). Сумму событий обозначают $A+B$.

Произведением событий A и B (рис.3) называется событие, состоящее в одновременном наступлении и события A, и события B. Произведение событий обозначают $A \cdot B$ или AB.

Пример 8. Испытание – два стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Событие A - «первый стрелок попадет в мишень», B - «второй стрелок попадет в мишень». Тогда событие $A+B$ - «хотя бы один попадет в мишень», $A \cdot B$ - «оба попадут в мишень».

Разностью событий A и B (рис.3) называется событие, происходящее тогда и только тогда, когда происходит событие A, но не происходит событие B. Разность событий обозначают $A \setminus B$.

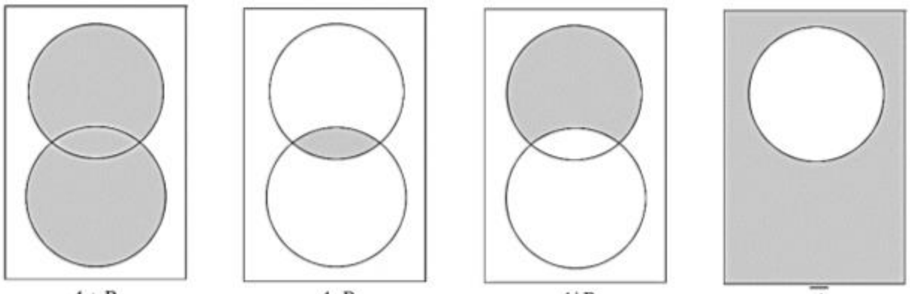


Рис. 3

Аксиоматическое построение теории вероятностей было предложено А. Н. Колмогоровым. *Аксиомы Колмогорова*:

Аксиома 1. Каждому событию A поставлено в соответствие неотрицательное число $P(A)$, называемое вероятностью события A.

Аксиома 2. Если события $A_1, A_2, \ldots$ попарно несовместные, то $P(A_1 + A_2 + \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$.

Аксиома 3. $P(\Omega) = 1$.

Все теоремы теории вероятностей могут быть доказаны на основе этих аксиом. Благодаря теоретико-множественной интерпретации событий действия над событиями можно иллюстрировать с помощью диаграмм Эйлера-Венна. Если множество Ω конечное, то аксиому 2 можно заменить более слабым требованием:

Аксиома $2'$. Если события A_1 и A_2 несовместные, то $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$.

Рассмотрим теоремы о вероятности суммы событий.

Теорема 1: если события A и B несовместные, то $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

Доказательство. Пусть событию A благоприятствуют k исходов, событию B благоприятствуют m исходов. Тогда, так как A и B несовместные, то событию $A+B$ благоприятствуют $(k+m)$ исходов. Число всех исходов равно n. Тогда $P(A+B) = \dfrac{k+m}{n} = \dfrac{k}{n} + \dfrac{m}{n} = P(A) + P(B)$.

Следствие. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1, то есть $P(A)+P(\overline{A})=1$.

Доказательство. Событие $A+\overline{A}=U$ достоверное, значит $P(U)=1$, то есть $P(A+\overline{A})=1$. Так как события A и $\overline{A}$ несовместные, то $P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})=1$.

Замечание: теорема 1 распространяется на любое конечное число попарно несовместных событий, то есть, если события $A_1, A_2, ..., A_n$ попарно несовместны, то $P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)$.

Теорема 2: если события A и B совместные, то $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

Доказательство. Пусть испытание имеет n исходов. Из них событию A благоприятствуют k исходов, событию B благоприятствуют m исходов, событию AB благоприятствуют l исходов. Тогда событию $A+B$ благоприятствуют $k+m-l$ исходов. Значит $P(A+B)=\dfrac{k+m-l}{n}=\dfrac{k}{n}+\dfrac{m}{n}-\dfrac{l}{n}=P(A)+P(B)-P(AB)$.

Замечание: для большого числа совместных событий удобнее пользоваться формулой $P(A_1+A_2+...+A_n)=1-P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot...\cdot\overline{A_n})$.

События называются *независимыми*, если вероятность наступления каждого из них не зависит от того, произошло другое событие или нет.

Пример 9. Пусть в ящике находятся 5 белых и 4 черных шара. Наугад дважды вынимают по одному шару. Событие A - «первым вынут белый шар», событие B - «вторым вынут черный шар».

1 случай. Вынутый в первом испытании шар возвращается в ящик и лишь после этого вынимается второй шар, то есть, испытание проводится по схеме возвращенного шара. Тогда: а) событие A произошло, то есть, первым вынули белый шар ($P(B)=\dfrac{4}{9}$); б) событие A не произошло, то есть, первым вынули черный шар ($P(B)=\dfrac{4}{9}$). При такой организации испытания события A и B независимые.

2 случай. Вынутый в первом испытании шар назад не возвращается. Тогда: а) событие A произошло ($P(B)=\frac{4}{8}$); б) событие A не произошло ($P(B)=\frac{3}{8}$). При такой организации испытания события A и B являются зависимыми.

Вероятность события B, найденная при условии, что событие A произошло, называется условной вероятностью события B и обозначается $P_A(B)$ или $P(B/A)$. В примере 9 $P_A(B)=\frac{4}{8}$.

Рассмотрим теоремы о вероятности произведения событий.

Теорема 1: если события A и B зависимые, то $P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)$ или $P(AB)=P(B)\cdot P_B(A)$.

Доказательство. 1) Для случая геометрического определения вероятности.

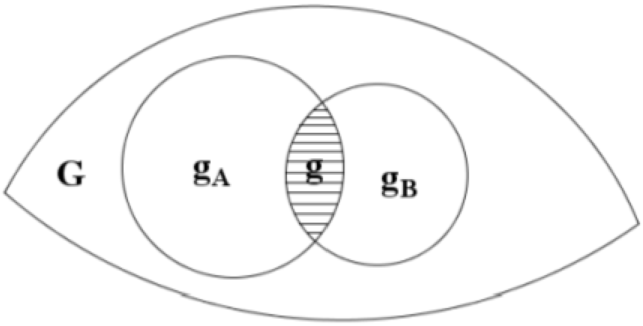


Рис. 4

Тогда $P_A(B)=\frac{\text{мера области}\, m(g)}{m(g_A)}=\frac{\frac{m(g)}{m(G)}}{\frac{m(g_A)}{m(G)}}=\frac{P(AB)}{P(A)}$. То есть $P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)$.

2) Пусть испытание сводится к схеме случаев. Пусть событию A благоприятствуют k исходов, событию B благоприятствуют m исходов,

событию AB благоприятствуют l исходов. Всего испытание может иметь n исходов. Тогда $P_A(B) = \frac{l}{k} = \frac{\frac{l}{n}}{\frac{k}{n}} = \frac{P(AB)}{P(A)}$. То есть $P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$.

Теорема 2*:* если события A и B независимые, то $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Доказательство. Теорема 2 следует из теоремы 1, так как, по определению, если A и B независимые, то $P_A(B) = P(B)$.

Теоремы 1 и 2 справедливы для любого конечного числа событий.

Теорема $1'$*:* если события $A_1, A_2, ..., A_n$ зависимые, то $P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1A_2}(A_3) \cdot ... \cdot P_{A_1A_2 \cdot ... \cdot A_{n-1}}(A_n)$.

Теорема $2'$*:* если события $A_1, A_2, ..., A_n$ независимые, то $P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n)$.

Формула полной вероятности и формула Бейеса применяются в том случае, когда интересующее нас событие A может произойти лишь одновременно с одним из событий $H_1, H_2, ..., H_n$, причем события $H_1, H_2, ..., H_n$ составляют полную группу попарно несовместных событий данного испытания. Эти события принято называть *гипотезами*. Так как гипотезы составляют полную группу попарно несовместных событий, то $P(H_1) + P(H_2) + ... + P(H_n) = 1$. Событие $A = H_1A + H_2A + ... + H_nA$, где в правой части попарно несовместные события. Тогда

$$P(A) = P(H_1A + H_2A + ... + H_nA) = P(H_1A) + P(H_2A) + ... + P(H_nA) = P(H_1)P_{H_1}(A) + \\ + P(H_2)P_{H_2}(A) + ... + P(H_n)P_{H_n}(A).$$

Таким образом, $P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + ... + P(H_n)P_{H_n}(A)$ - ***формула полной вероятности***.

Формула Бейеса относится к той же ситуации, что и формула полной вероятности. Она применяется в том случае, когда известно, что событие A произошло, и нужно найти вероятность того, что при этом имела место определенная гипотеза.

$P_A(H_i) = \dfrac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{P(A)}$ - *формула Бейеса*, где $P(A)$ вычисляется по формуле полной вероятности.

Доказательство. По теореме 1 для вероятности произведения событий $P(H_i A) = P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)$, с другой стороны $P(H_i A) = P(A) \cdot P_A(H_i)$. Тогда $P(H_i) \cdot P_{H_i}(A) = P(A) \cdot P_A(H_i)$, значит $P_A(H_i) = \dfrac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{P(A)}$.

Но в теории вероятностей встречаются более сложные задачи, которые соответствуют так называемой схеме Бернулли. Говорят, что проводится повторное независимое испытание (или *испытание проводится по схеме Бернулли*), если:

1) одно и то же испытание повторяется несколько раз при неизменных условиях;
2) в каждом из этих испытаний интересующее нас событие A может наступить с одной и той же вероятностью P.

Типы задач, связанных со схемой Бернулли:

1. Нахождение вероятности того, что в n испытаниях событие A наступит ровно m раз, то есть $P_n(m) = C_n^m \cdot P^m \cdot q^{n-m}$. Эта формула называется *формулой Бернулли*, где $q = 1 - P$, то есть, если $P = P(A)$ в отдельном испытании, то $q = P(\overline{A})$ в отдельном испытании.

Доказательство. Интересуют исходы вида $\underbrace{AA...A}_{m\,раз}\underbrace{\overline{A}\overline{A}...\overline{A}}_{(n-m)\,раз}$. По правилу произведения вероятность каждого такого исхода равна $P^m q^{n-m}$. Число же всех таких исходов равно C_n^m, так как из n позиций m позиций можно выбрать C_n^m способами с тем, чтобы поставить на эти позиции событие A, а на оставшиеся позиции событие $\overline{A}$. Тогда по теореме о вероятности суммы несовместных событий получим $P_n(m) = C_n^m \cdot P^m \cdot q^{n-m}$.

<u>Примеры задач:</u>

Задача 1 (*alexlarin.net, генератор вариантов базового уровня ЕГЭ – 2015, №10*). В группе туристов 20 человек. Их забрасывают в труднодоступный район вертолётом в несколько приёмов по 5 человек за рейс. Порядок, в котором вертолёт перевозит туристов, случаен. Найдите вероятность того, что турист Ф. полетит вторым рейсом вертолёта.

Тип задачи. Задача на логическое мышление.

Характеристика задачи. Текстовая задача, моделирующая реальную или близкую к реальной ситуацию.

Комментарий. По условию задачи требуется найти вероятность.

Решение:

На втором рейсе 5 мест, всего мест 20. Тогда вероятность того, что турист Ф. полетит вторым рейсом вертолёта, равна:

$$\frac{5}{20}=\frac{1}{4}=0{,}25\,.$$

Ответ: $0{,}25$.

Задача 2 (*alexlarin.net, генератор вариантов профильного уровня ЕГЭ – 2016, №4*). Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 60% этих стекол, вторая - 40%. Среди стекол, выпускаемых первой фабрикой, брак составляет 3%. Среди стекол, выпускаемых второй фабрикой, брак составляет 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Тип задачи. Задача на логическое мышление.

Характеристика задачи. Текстовая задача, моделирующая реальную или близкую к реальной ситуацию.

Комментарий. По условию задачи требуется найти вероятность.

Решение 1:

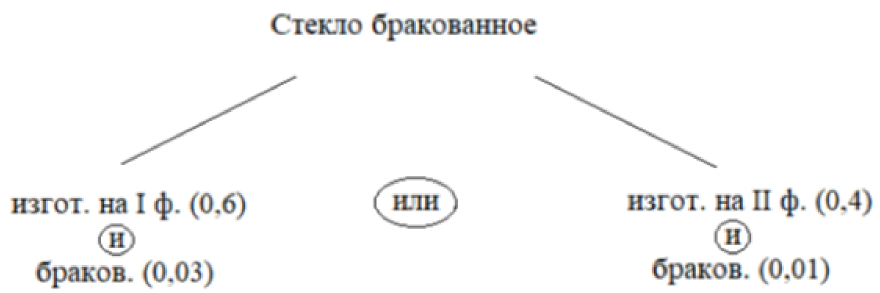
Вероятность того, что стекло сделано на первой фабрике и оно бракованное: $0{,}6 \cdot 0{,}03 = 0{,}018$.

Вероятность того, что стекло сделано на второй фабрике и оно бракованное: $0{,}4 \cdot 0{,}01 = 0{,}004$.

Поэтому по формуле полной вероятности вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным равна $0{,}018 + 0{,}004 = 0{,}022$.

Ответ: $0{,}022$.

Решение 2:



$$P(A) = 0{,}6 \cdot 0{,}03 + 0{,}4 \cdot 0{,}01 = 0{,}022$$

Рис. 7

Самостоятельная работа №10:

Выполнение реферата «Роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности»

Цель: Отработать навыки написания реферата

Структура реферата

13. Титульный лист
14. Содержание
15. Введение
16. Основная часть

17. Заключение
18. Список литературы

Самостоятельная работа №11:

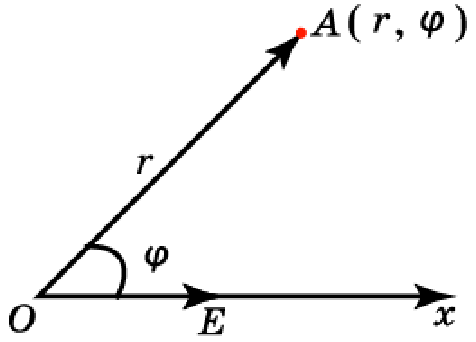
Работа с опорными конспектами по темам занятия «Преобразование прямоугольных координат. Полярные координаты».

Цель: в помощь обучающимся для подготовки к практической работе

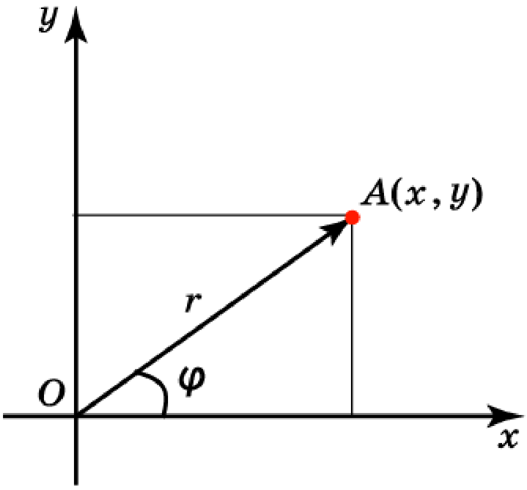
Пусть на плоскости задана координатная прямая с началом координат O и направляющим вектором.

Эта прямая в данном случае будет называться полярной осью.

Полярными координатами точки A на плоскости с заданной полярной осью называется пара (r,φ), где r - расстояние от точки A до точки O, φ - угол между полярной осью и вектором , отсчитываемый в направлении против часовой стрелки. При этом первая координата r называется полярным радиусом, а вторая φ - полярным углом. Полярный угол φ можно задавать в градусах или радианах.



Если на плоскости задана декартова система координат, то обычно за полярную ось принимается ось Ox. В этом случае каждой точке плоскости с декартовыми координатами (x,y) можно сопоставить полярные координаты (r,φ). При этом декартовы координаты выражаются через полярные по формулам

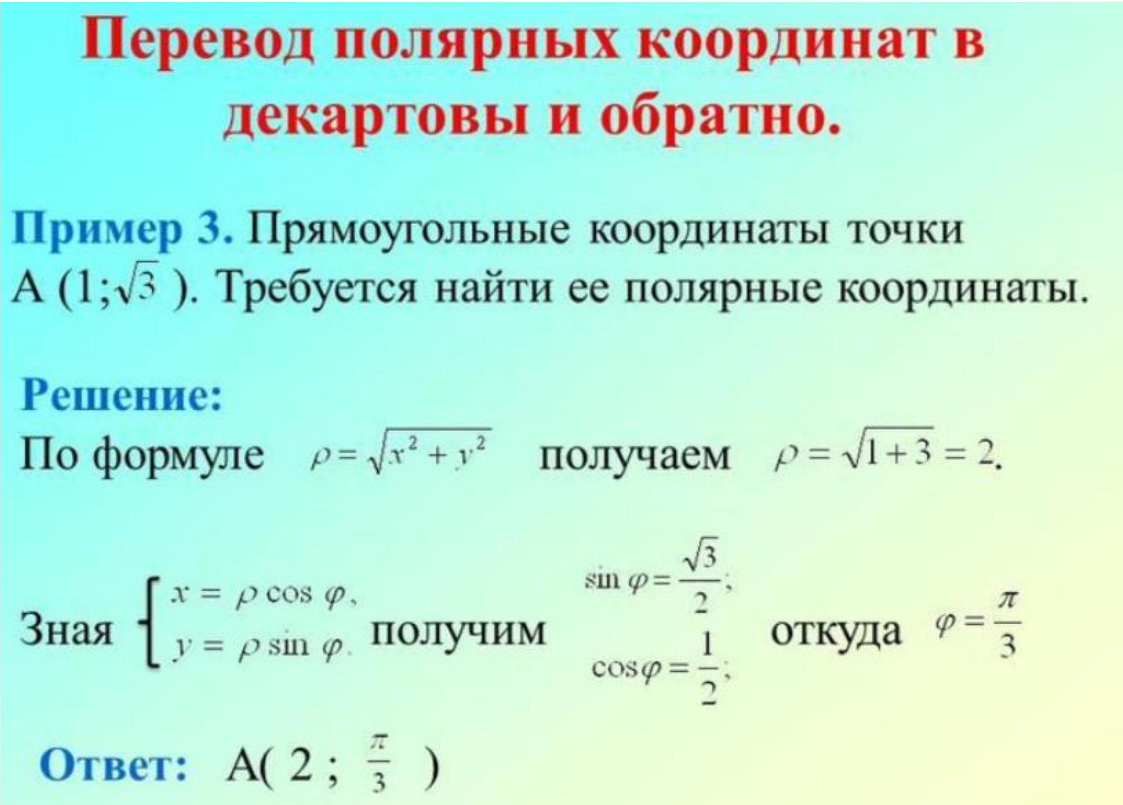


$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

И, наоборот, полярные координаты выражаются через декартовы по формулам

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

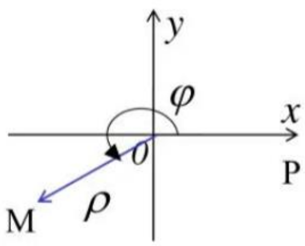


Пример 2. Найти полярные координаты точки М, если даны её прямоугольные координаты: $M(-\sqrt{3};-1)$

Решение: Имеем: $x=-\sqrt{3}, \quad y=-1$

Находим: $\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$

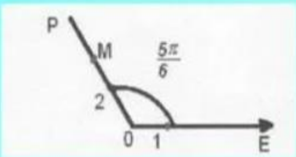
$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi=\frac{x}{\rho}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\varphi=\frac{y}{\rho}=-\frac{1}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \varphi=\frac{7\pi}{6}$$



Ответ. $M(2;\frac{7\pi}{6})$

Перевод полярных координат в декартовы и обратно.

Пример 1. Требуется построить точку М (2 ; $\frac{5\pi}{6}$) в полярной системе координат.



Проведем луч ОР под углом $\frac{5\pi}{6}$ к полярной оси ОЕ и отложим от полюса отрезок ОМ, равный двум единицам масштаба. Конец М этого отрезка и будут искомой точкой .

Пример 2. Найти прямоугольные координаты точки, полярные координаты которой М ($2\sqrt{3}$; $\frac{\pi}{6}$).

Решение: По формулам $\begin{aligned}x=\rho\cos\varphi,\\ y=\rho\sin\varphi.\end{aligned}$ получаем $x=2\sqrt{3}cos\frac{\pi}{6}=2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3,$

$y=2\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6}=2\sqrt{3}\frac{1}{2}=\sqrt{3}.$

Ответ: М(3; $\sqrt{3}$)

Пример 1. Найти прямоугольные координаты точки М,

если даны её полярные координаты: $M\left(2;-\frac{2\pi}{3}\right)$

Решение: Имеем: $\rho=2,\quad \varphi=-\frac{2\pi}{3}$

Находим:

$$x=\rho\cos\varphi=2\cdot\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=2\cdot\cos\frac{2\pi}{3}=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$$

$$y=\rho\sin\varphi=2\cdot\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=-2\cdot\sin\frac{2\pi}{3}=-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$$

Ответ. $M(-1;-\sqrt{3})$

Самостоятельная работа №12: «Прямая на плоскости и ее уравнение» с использованием методических рекомендаций;

Цель: Отработать навыки решения задач

Уравнение прямой на плоскости

1. Дана точка и угловой коэффициент $y-y_o=k(x-x_o)$
2. С угловым коэффициентом $y=kx+b$
3. Даны две точки $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}-\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$
4. Общее уравнение прямой $Ax+By+C=0$
5. Уравнение в отрезках $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

Задача 1.

Даны координаты вершин трапеции *ABCD*: $A(-2;-2), B(-3;1), C(7;7), D(3;1)$. Напишите уравнения прямых, содержащих

а) диагонали *AC* и *BD*;

б) среднюю линию трапеции.

Решение (рис. 1):

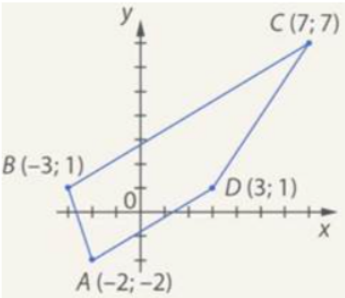


Рис. 1. Иллюстрация к задаче

$ax + by + c = 0$ – общее уравнение прямой, оно задается конкретной тройкой чисел *a*, *b* и *c*.

а) Найдем уравнение прямой *AC*, для этого в уравнение прямой подставляем координаты точек и *C*:

$$\begin{cases} -2a - 2b + c = 0, \\ 7a + 7b + c = 0. \end{cases}$$

Как и раньше, получили два уравнения с тремя неизвестными, будем решать ее методом алгебраического сложения.

$$\begin{cases} -2a - 2b + c = 0, | \cdot 7 \\ 7a + 7b + c = 0; | \cdot 2 \end{cases} <=> \begin{cases} -14a - 14b + 7c = 0, \\ + \\ 14a + 14b + 2c = 0; \end{cases} => c = 0.$$

Если c=0, то прямая проходит через начало координат. Подставим c в любое уравнение:

$$\begin{cases} c = 0, \\ a = -b \end{cases} => ax - ay = 0 => x = y.$$

Ответ: $x = y$.

б) Найдем уравнение прямой *BD*: точки *B* и *D* имеют одну и ту же ординату, равную 1, поэтому уравнение прямой *BD* $y = 1$.

Ответ: $y = 1$.

в) Найдем координаты точки M – середины CD и точки N – середины AB:

$M(5;4), N\left(-\frac{5}{2};-\frac{1}{2}\right)$ (рис. 2).

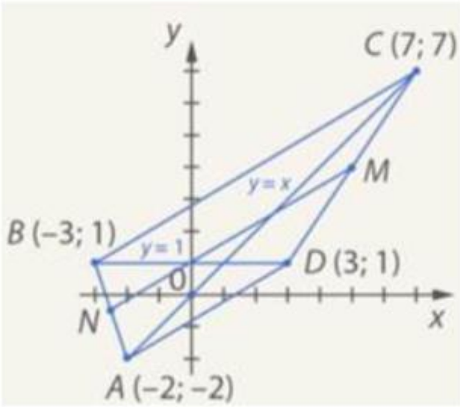


Рис. 2. Иллюстрация к задаче

Подставляем координаты точек M и N в уравнение $ax + by + c = 0$:

$$\begin{cases} 5a + 4b + c = 0, \\ -\frac{5}{2}a - \frac{1}{2}b + c = 0; | \cdot 2 \end{cases} <=> \begin{cases} 5a + 4b + c = 0, \\ -5a - b + 2c = 0; \end{cases} => b = -c.$$

Подставляем в первое уравнение:

$$\begin{cases} b = -c, \\ 5a - 4c + c = 0; \end{cases} <=> \begin{cases} b = -c, \\ a = \frac{3}{5}c; \end{cases} => \frac{3}{5}cx - cy + c = 0, c \neq 0, => 3x - 5y + 5 = 0.$$

Ответ: $3x - 5y + 5 = 0.$

Задача 2.

Найдите координаты точек пересечения прямой $3x - 4y + 12 = 0$ с осями координат. Начертите эту прямую и найдите длину отрезка прямой, отсекаемого осями координат.

Решение:

Определим точки пересечения с осями и построим данную прямую (рис. 3).

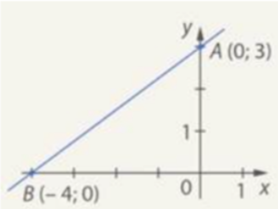


Рис. 3. Иллюстрация к задаче

x	0	-4
y	3	0

A(0; 3), B(-4; 0)

Найдем длину отрезка AB:

$$AB = \sqrt{(0+4)^2 + (3-0)^2} = 5.$$

Ответ: A(0; 3), B(-4; 0), AB=5.

Задача 3.

Найдите координаты точек пересечения прямых $4x + 3y - 6 = 0$ и $2x + y - 4 = 0$.

Координаты искомой точки являются координатами точки пересечения прямых, поэтому они удовлетворяют и первому и второму уравнениям прямых, то есть следует решить систему из двух уравнений:

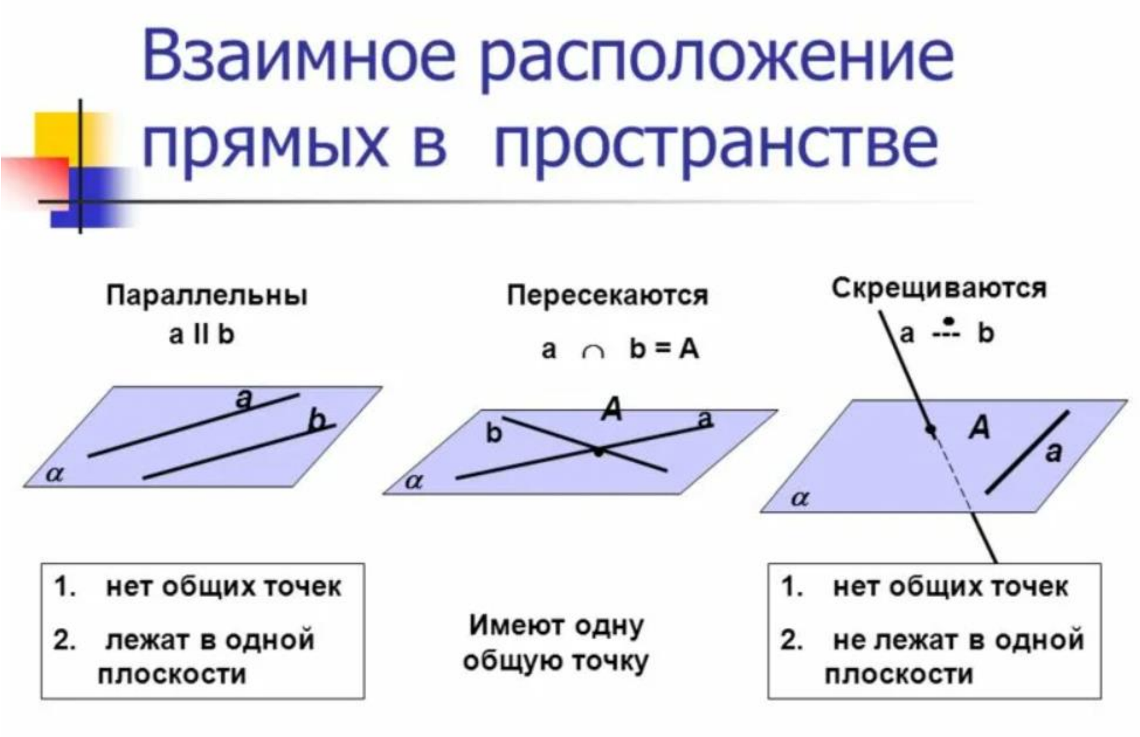
$$\begin{cases} 4x + 3y - 6 = 0, \\ 2x + y - 4 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3(4 - 2x) - 6 = 0, \\ y = 4 - 2x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = -2. \end{cases}$$

Координаты точки пересечения прямых $(3; -2)$.

Ответ: $(3; -2)$.

Самостоятельная работа №13: «Две прямые на плоскости» с использованием методических рекомендаций

Цель: Отработать теоретические понятия по теме



Тест: Параллельные прямые

1. Две прямые в пространстве называются … если они лежат в одной плоскости и не пересекаются:
   а) параллельные +
   б) перпендикулярные
   в) скрещивающиеся

2. Если сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то прямые:
а) параллельны +
б) перпендикулярны
в) скрещивающиеся

3. Если две прямые параллельны третьей, то они:
а) совпадают
б) пересекаются
в) параллельны +

4. Какого условия достаточно, чтобы две прямые пересечённые секущей были параллельны:
а) накрест лежащие или соответственные углы равны +
б) накрест лежащие и соответственные углы равны
в) накрест лежащие, соответственные и односторонние углы равны

5. Если через точку, лежащую вне прямой, проведено несколько прямых, то сколько из них пересекаются с исходной прямой:
а) все, которые имеют на рисунке точку пересечения с исходной прямой

б) неизвестно, так как не сказано, сколько прямых проведено через точку
в) все, кроме параллельной прямой +

6. Один из внутренних односторонних углов при параллельных прямых и секущей равен 50 градусов. Найдите второй внутренний односторонний угол:
а) 90 градусов
б) 130 градусов +
в) 180 градусов

7. Сколько параллельных прямых можно провести через точку, не лежащую на данной прямой:
а) ни одной
б) сколько угодно
в) одну +

8. Если при пересечении двух прямых секущей, … и … углы равны, то прямые параллельны:
а) накрест лежащие и соответственные +
б) соответственные и горизонтальные
в) односторонние и горизонтальные

9. Какие углы равны при пересечении двух параллельных прямых третьей:
а) смежные
б) вертикальные
в) накрест лежащие +

10. Три параллельные прямые пересечены четвёртой прямой. Сумма всех образовавшихся тупых углов с вершинами в точках пересечения равна 960°. Найдите величины каждого из образовавшихся при этом острых углов:
а) все по 30°
б) все по 20° +
в) все по 35°

11. Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит:
а) всегда проходит прямая, параллельная данной +
б) только одна прямая, параллельная данной
в) только одна прямая, не пересекающаяся с данной

12. Точки A, B,C, P, K иT расположены так, что прямая AB параллельна прямой CP, а прямая KT параллельна прямой AB. Как расположены прямые CP и KT, если точка P — середина отрезка BT:
а) прямые CP и KT параллельны или совпадают
б) прямые CP и KT параллельны +
в) прямые CP и KT совпадают

13. Две прямые параллельны, если при пересечении их секущей:
а) соответственные углы равны +
б) сумма соответственных углов равна 180 градусов
в) соответственные углы не равны

14. Сколько углов образуется при пересечении двух параллельных прямых третьей:
а) 6
б) 4
в) 8 +

15. При пересечении двух прямых секущей, образуются углы, имеющие специальные названия:
а) параллельные и перпендикулярные +
б) острые, прямые и тупые
в) смежные и вертикальные

16. Сколько прямых углов может образоваться при пересечении двух параллельных прямых третьей:
а) 4
б) 8 +
в) 6

17. Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то:
а) с другой прямой она совпадает
б) другую прямую она пересекает
в) другой прямой она параллельна +

18. При пересечении двух параллельных прямых третьей один из углов оказался равным 112 градусов. Найдите наименьший из всех образованных при этом углов:
а) 86 градусов
б) 68 градусов +
в) 112 градусов

19. Если две параллельны прямые пересечены секущей, то:
а) соответственные углы равны
б) вертикальные углы равны
в) односторонние углы равны +

20. При каком положении секущей ее отрезок, заключенный между параллельными прямыми, имеет наименьшую длину:
а) Секущая пересекает данные прямые под углом 45 градусов.
б) Секущая перпендикулярна данным прямым. +
в) Секущая параллельна данным прямым.

21. Выберите утверждение, являющееся аксиомой параллельных прямых:
а) через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая параллельная данной +
б) через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной
в) если прямая пересекает, одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую

22. Как расположены относительно друг друга биссектрисы внутренних односторонних углов, которые получились при пересечении двух параллельных прямых третьей:

а) параллельны
б) перпендикулярны +
в) пересекаются под углом 45 градусов

23. Один из признаков параллельности двух прямых гласит:
а) если при пересечении двух прямых секущей, сумма соответственных углов равна 180, то прямые параллельны
б) если при пересечении двух прямых секущей, накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны
в) если при пересечении двух прямых секущей, односторонние углы равны, то прямые параллельны +

24. Сколько равных тупых углов может образоваться при пересечении двух параллельных прямых третьей:
а) 2
б) 4 +
в) 8

25. Две прямые на плоскости называются параллельными, если они:
а) находятся на одинаковом расстоянии друг от друга
б) перпендикулярны одной прямой
в) не пересекаются +

26. При пересечении двух параллельных прямых третьей один из углов оказался равным 34 градуса. Найдите наименьший из всех образованных при этом углов:
а) 68 градусов
б) 34 градуса +
в) 146 градусов

27. Фигуры, в которых используются параллельные прямые:
а) ромб
б) трапеция
в) оба варианта верны +
г) нет верного ответа

28. При пересечении двух параллельных прямых третьей один из углов оказался равным 97 градусов. Найдите наименьший из всех образованных при этом углов:
а) 97 градусов
б) 77 градусов
в) 83 градуса +

29. Выберите углы, которые не возникают при пересечении параллельных прямых секущей:
а) равносторонние +
б) накрест лежащие
в) односторонние

30. При пересечении двух параллельных прямых третьей внешние накрест лежащие углы оказались равными 65 градусов. Найдите внутренние накрест лежащие углы:

а) 65 и 180 градусов
б) 65 и 115 градусов +
в) 125 градусов

1. Прямая – это
А) Линия, которая не искривляется, имеет начало, но не имеет конца;
Б) Линия, которая не искривляется, не имеет ни начала, ни конца, можно бесконечно продолжать в обе стороны;
В) Линия, состоящая из нескольких отрезков не лежащих на одной прямой;
Г) Линия, которая имеет и начало и конец

2. Угол – это
А) геометрическая фигура, образованная двумя луча, выходящие из одной точки
Б) геометрическая фигура, образованная двумя луча, выходящие из разных точек
В) геометрическая фигура, образованная двумя прямыми
Г) геометрическая фигура, образованная двумя отрезками

3. Вертикальные углы – это
А) пары углов с общей вершиной, которые образованы при пересечении двух прямых так, что стороны одного угла являются продолжением сторон другого.
Б) пара углов с общей вершиной и одной общей стороной
В) пары углов с общей вершиной, которые образованы при пересечении двух прямых так, что стороны одного угла не являются продолжением сторон другого.
Г) несколько углов с общей вершиной, которые образованы при пересечении двух прямых так, что стороны одного угла не являются продолжением сторон другого.

4. Смежные углы – это
А) пары углов с общей вершиной, которые образованы при пересечении двух прямых так, что стороны одного угла являются продолжением сторон другого.
Б) пара углов с общей вершиной и одной общей стороной
В) пары углов с общей вершиной, которые образованы при пересечении двух прямых так, что стороны одного угла не являются продолжением сторон другого.
Г) несколько углов с общей вершиной, которые образованы при пересечении двух прямых так, что стороны одного угла не являются продолжением сторон другого.

5. Параллельные прямые – это
А) две непересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости.
Б) две непересекающиеся прямые, не лежащие в одной плоскости.
В) две пересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости.
Г) две пересекающиеся прямые, не лежащие в одной плоскости.
6. Скрещивающиеся прямые – это
А) две непересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости.
Б) две непересекающиеся прямые, не лежащие в одной плоскости.
В) две пересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости.
Г) две прямые, лежащие в одной плоскости и имеющие одну общую точку, .

7. Пересекающиеся прямые – это
А) две непересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости.
Б) две непересекающиеся прямые, не лежащие в одной плоскости.
В) две пересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости.
Г) две прямые, лежащие в одной плоскости и имеющие одну общую точку, .

8. Перпендикулярные прямые – это
А) две непересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости.
Б) две непересекающиеся прямые, не лежащие в одной плоскости.
В) две пересекающиеся прямые под прямым углом, лежащие в одной плоскости.
Г) две прямые, лежащие в одной плоскости и имеющие одну общую точку, .

9. Расстояние между параллельными прямыми – это
А) длина отрезка заключенного между ними
Б) кратчайшее расстояние от точки до фигуры
В) длина перпендикуляра опущенного из этой точки к прямой
Г) длина перпендикуляра заключенного между этими прямыми

Самостоятельная работа №14: Выполнение реферата «Линии в нашей жизни».
Цель: Отработать навыки написания реферата

Структура реферата

19. Титульный лист
20. Содержание
21. Введение
22. Основная часть
23. Заключение
24. Список литературы

Самостоятельная работа №15: Подготовка к практической работе «Кривые второго порядка» с использованием опорных конспектов по темам занятий и методических рекомендаций.

Цель:

1. Окружность и ее уравнение

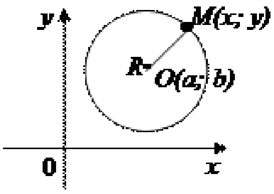
Кривая второго порядка – линия на плоскости, задаваемая уравнением: $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$, где коэффициенты A, B, C, D, E, F – любые действительные числа при условии, что A, B, C одновременно не равны нулю.

Выделяют следующие кривые второго порядка:

- окружность;
- эллипс;
- гипербола;
- парабола.

Окружностью называется множество точек плоскости, равноудаленных от одной точки, называемой центром.

Пусть центром окружности является точка $O(a;b)$, а расстояние до любой точки $M(x;y)$ окружности равно R (рис.1). Составим уравнение окружности.



Расстояние от точки *M* до центра окружности можно найти, пользуясь формулой расстояния между точками:

$$\left|\overline{\mathrm{OM}}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,|$$

Подставив в это выражение координаты точек *M* и *O*,получим: $\mathrm{OM} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$

Поскольку расстояние *OM* равно радиусу *R*, следовательно, R=$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$.

Возведём обе части уравнения в квадрат: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

Это уравнение называется ***канонуческим уравнением окружности*** с центром *O*(*a*;*b*) и радиусом *R*.

Если центр окружности совпадает с началом координат, то уравнение окружности имеет вид: $x^2 + y^2 = R^2$.

Пример 1Составьте уравнение окружности с центром *O*(3; -2) и радиусом *r* = 5.

Решение:Подставив a =3, b =-2 и r = 5 в каноническое уравнение окружности $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, получим: $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$.

Пример 2Запишите уравнение окружности с центром в точке М(-3;1), которая проходит через точку К(-1;5)

Решение: $\overline{\mathrm{OM}}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \to \sqrt{-1 - (-3)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{20}$

Подставим значения в уравнение окружности $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \to$

$$20 = (x - (-3)^2 + (y-1)^2$$

$$20 = (x+3)^2 + (y-1)^2$$

Самостоятельно:

1. **Составьте уравнение окружности**
   А.О(-2;1) R=4Б. *M (1; -4) , R = 2;* *В. M (0; -5) , R = 3;*Г. О(-3;2), *R*=4.
1. **Составьте уравнение окружности с центром в точке М (1; -4), проходящей через точку А(0; 3).**
2. **Определите по уравнению окружности координаты ее центра и радиус :**

   А) $(Х+2)^2$ + (У – $5)^2$ = 49 Б) $(Х+7)^2$ + (У + $1)^2$ = 36

В) (Х- $6)^2$ + (У + $15)^2$ = 81 Г) Х ^{2} + (У -$9)^2$ = 2

2. Эллипс и его уравнение

Эллипсомназывается множество точек на плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух заданных точек (называемых *фокусами*) есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

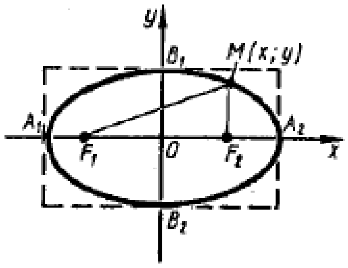
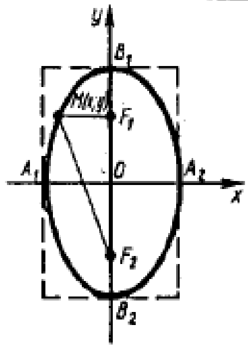
Фокусы эллипса принято обозначат буквами *F1 и F2*, расстояние между фокусами – через *2c*, сумму расстояний от любой точки эллипса до фокусов- через *2a (2a*> 2c*).*

Каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Где *a*,*b*,*c* – связаннымежду собой равенством $a^2-b^2=c^2$ или $b^2-a=c^2$.

Рассмотрим два основных случая расположения эллипса относительно осей координат. Эти случаи представлены в следующей таблице:

	 Рис. 56	 Рис. 57
Положение фокусов	$F_1;\ F_2 \in Ox$	$F_1;\ F_2 \in Oy$
Координаты фокусов	$F_1(-c;\ 0),\ F_2(c;\ 0)$	$F_1(0;\ c),\ F_2(0;\ -c)$
Соотношение между a и b	$a>b$	$b>a$
Большая ось	$\|A_1A_2\|=2a$	$\|B_1B_2\|=2b$
Малая ось	$\|B_1B_2\|=2b$	$\|A_1A_2\|=2a$
Фокусное расстояние	$\|F_1F_2\|=2c$	$\|F_1F_2\|=2c$
Эксцентриситет	$\varepsilon=c/a$	$\varepsilon=c/b$
Соотношение между a, b и c	$a^2-b^2=c^2$	$b^2-a^2=c^2$
Уравнение	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Эксцентриситетом эллипса называется отношение расстояния между фокусами к длине большей оси. Эксцентриситет обозначается буквой ε.

$$\varepsilon=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a} \text{ или } \varepsilon=\frac{2c}{2b}=\frac{c}{b}$$

Так как по определению $2a>2c$, *то*эксцентриситет всегда выражается правильной дробью, те $0\leq\varepsilon\leq 1$.

- ✓ Если $\varepsilon\approx 1$ то эллипс сильно вытянут;
- ✓ если же $\varepsilon\approx 0$, то эллипс имеет более круглую форму.
- ✓ если $\varepsilon=0$ то эллипс вырождается в окружность.

№1Найти координаты фокусов, длины осей и эксцентриситет эллипса, заданного уравнением $2x^2 + y^2 = 32$

- Решение: приведем уравнение к каноническому виду $\frac{2x^2}{32} + \frac{y^2}{32} = \frac{32}{32}$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{32} = 1$$

- Находимфокусы эллипса: a^2=16 b^2=32

Откуда a=4;b=$\sqrt{32}$или 4$\sqrt{2}$.

Так как b$> a$, то фокусы эллипса расположены на оси ординат

$$b^2 - a^2 = c^2$$
$$32 - 16 = c^2$$
$$16=c^2$$
$$c=\pm4$$

<u>F1(0;4)F1(0;-4)</u>

- Находим длины осей:
  2b=2*4$\sqrt{2}$=8$\sqrt{2}$.
  2a=2*4=8.
- Эксцентриситет эллипса:

$$\varepsilon = \frac{2c}{2b} = \frac{2*4}{8\sqrt{2}} = 0{,}705.$$

Ответ: **фокусы эллипса <u>F1(0;4) F2(0;-4)</u>**
длины осей: 2b=8$\sqrt{2}$. 2a=8
$\boldsymbol{\varepsilon = 0{,}705}$

<u>Самостоятельно:</u>

Найти координаты фокусов, длины осей и эксцентриситет эллипса, заданного уравнением:

1. $\boldsymbol{16x^2 + 25y^2 = 400}$
2. $\boldsymbol{\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1}$
3. $\boldsymbol{\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1}$

3. Гипербола и ее уравнение

Гиперболой называется множество точек плоскости, разность расстояний от каждой из которых до двух заданных точек (фокусов) есть величина постоянная.

Эта постоянная величина положительна и меньше расстояния меду фокусами.

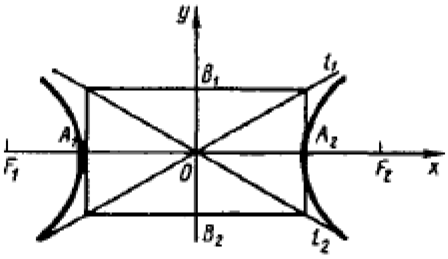
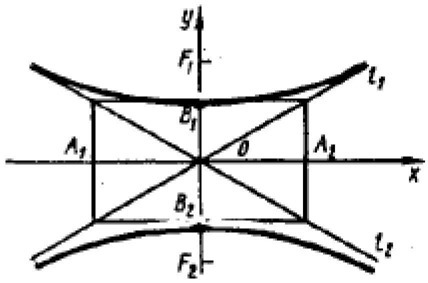
Фокусы гиперболы принято обозначат буквами *F1 и F2*, расстояние между фокусами – через *2c*, постоянную разность между расстояниями от любой точки гиперболы до ее фокусов - через *2a (2a*$>$ 2c*)*.

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ или } \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

Где *a*,*b*,*c* – связанны между собой равенством $\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$.

Рассмотрим два основных случая расположения гиперболы относительно осей координат. Эти случаи представлены в следующей таблице:

	Рис. 58	Рис. 59
Положение фокусов	$F_1;\ F_2 \in Ox$	$F_1;\ F_2 \in Oy$
Координаты фокусов	$F_1(-c;\ 0);\ F_2(c;\ 0)$	$F_1(0;\ c);\ F_2(0;\ -c)$
Действительная ось	$\lvert A_1A_2 \rvert = 2a$	$\lvert B_1B_2 \rvert = 2b$
Мнимая ось	$\lvert B_1B_2 \rvert = 2b$	$\lvert A_1A_2 \rvert = 2a$
Фокусное расстояние	$\lvert F_1F_2 \rvert = 2c$	$\lvert F_1F_2 \rvert = 2c$
Эксцентриситет	$\varepsilon = c/a$	$\varepsilon = c/b$
Соотношение между a, b и c	$c^2 - a^2 = b^2$	$c^2 - b^2 = a^2$
Уравнение	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояние между фокусами к длине действительной оси.

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} \qquad \varepsilon = \frac{2c}{2b} = \frac{c}{b}$$

Так как по определению 2a> 2c, то ε гиперболы всегда выражается дробью, т. е. $\varepsilon > 1$
Прямые называются **асимптотами**; их уравнения имеет вид

$$\boldsymbol{y = \pm \frac{b}{a} * x}$$

№1 Найти координаты фокусов, длины осей, эксцентриситет и уравнения асимптот, если гипербола задана уравнением $\mathbf{16x^2 - 25y^2 = 400}$

Решение:

- Приведем уравнение к каноническому виду, т.е. разделим обе его части на 400

$$\frac{16x^2}{400} - \frac{25y^2}{400} = 1$$
$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$$
$$a^2 = 25 b^2 = 16$$
$$a = 5 \quad b = 4$$

- Найдем с: $\mathbf{c = a^2 - b^2 = c^2}$
  $25 + 16 = 41$

$c = \sqrt{41}$

Итак.фокусы гиперболы **F1(-$\sqrt{41}$; 0) F2(0;$-\sqrt{41}$)**

- действительная ось $2a = 5 * 2 = 10$
- мнимая ось $2b = 4 * 2 = 8$
- $\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{2*\sqrt{41}}{10}$

  $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{41}}{5}$
- уравнение ассимптот

  $y = \pm \frac{b}{a} * x$

$y = \pm \frac{4}{5} * x$

*Ответ: фокусы гиперболыF1***(-$\sqrt{41}$; 0) *F2(0;*$-\sqrt{41}$)**

Длины осей 2a=10 2b=8

Эксцентриситет $\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{2*\sqrt{41}}{10}$

уравнение ассимптот$y = \pm \frac{b}{a} * x$

Самостоятельно: Найти координаты фокусов, длины осей, эксцентриситет и уравнения асимптот, если гипербола задана уравнением $5x^2 - 4y^2 = 20.$

Самостоятельная работа №16: Выполнение реферата «Кривые в науке и технике».
Цель: Отработать навыки написания реферата

Структура реферата

25. Титульный лист
26. Содержание
27. Введение
28. Основная часть
29. Заключение
30. Список литературы

4. Парабола и ее уравнение

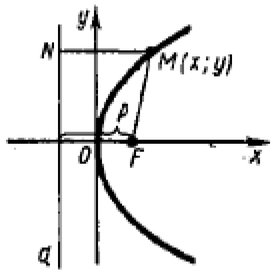
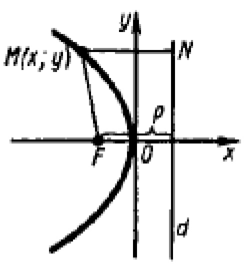
Параболой называется множество точек на плоскости, равноудаленных от заданной точки (*называемой фокусом*) и данной прямой (*называемой директрисой*).

Фокус параболы принято обозначать буквой F , директрису буквой d, расстояние от фокуса до директрисы - буквой $p(p>0)$. Рассмотрим основные случаи расположения параболы относительно осей координат.

Каноническое уравнение параболы, фокус которой расположен на оси абсцисс (рис.61,62), имеет вид

$$\boldsymbol{y^2 = 2px} \text{ или } \boldsymbol{y^2 = -2px}$$

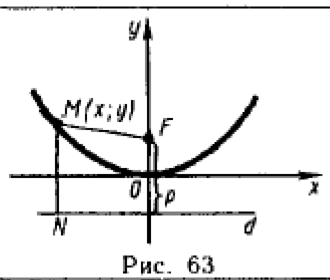
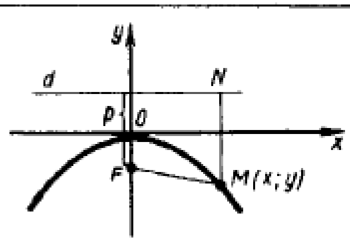
Эти два случая представлены в следующей таблице:

	 Рис. 61	 Рис. 62
Положение фокуса	На положительной полуоси Ox	На отрицательной полуоси Ox
Координаты фокуса	$F\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$	$F\left(-\frac{p}{2};\ 0\right)$
Уравнение директрисы	$y=-\frac{p}{2}$	$y=\frac{p}{2}$
Уравнение параболы	$y^2=2px$	$y^2=-2px$

Каноническое уравнение параболы, фокус которой расположен на оси ординат (рис.63,64), имеет вид

$$\boldsymbol{x^2 = 2py} \text{ или } \boldsymbol{x^2 = -2py}$$

Эти два случая представлены в следующей таблице:

	 Рис. 63	 Рис. 64
Положение фокуса	На положительной полуоси Oy	На отрицательной полуоси Oy
Координаты фокуса	$F\left(0;\ \frac{p}{2}\right)$	$F\left(0;\ -\frac{p}{2}\right)$
Уравнение директрисы	$y=-\frac{p}{2}$	$y=\frac{p}{2}$
Уравнение параболы	$x^2=2py$	$x^2=-2py$

№1 Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы, заданной уравнением $y^2 = 8x$.

Решение:

№2 Найти каноническое уравнение параболы и уравнение ее директрисы, если известно, что вершина параболы лежит в начале координат, а фокус имеет координаты (0;-3).
Решение:

1. Фокус параболы отрицателен, т.к. его координаты (0;-3) следовательно, уравнение параболы имеет вид $\boldsymbol{x^2 = -2py}$(ветви параболы направлены вниз**).**
2. Составляем уравнение параболы:

$$\boldsymbol{y = \frac{p}{2} = -3}$$
$$p = -6$$
$$2p = -12$$
$$x^2 = 12py - \text{уравнение параболы}$$

3. Уравнение директрисы:

$$y = 3$$
$$y - 3 = 0$$