Государственное бюджетное
профессиональное образовательное учреждение
«Кунгурский сельскохозяйственный колледж»

МЕТОДИЧЕСКИЕУКАЗАНИЯ
по выполнению практических работ

по учебной дисциплине ЕН.01 Математика

специальности35.02.06Технология производства и переработки сельскохозяйственной продукции

Кунгур, 2021г.

Рассмотрено и одобрено на
заседании методической комиссии
естественно - научных дисциплин
Протокол № 1 от «30» августа 2021 г.
Председатель МК
___________ / Тюрикова Т.Л. /
(подпись) (Ф.И.О.)

Утверждаю
зам.директора по УМР
___________ Л.И. Петрова

2

Методические указания предназначены для обучающихся 2 курса по специальности 35.02.06 Технология производства и переработки сельскохозяйственной продукции, изучающие учебную дисциплину ЕН. 01 Математика, с целью практического применения при выполнении отчета по практическим работам, как на занятиях, так и в качестве внеаудиторных самостоятельных работ.

Составитель: Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение «Кунгурский сельскохозяйственный колледж»

ТюриковаТ.Л., преподаватель математических дисциплин

Оглавление

Перечень практических работ

№ п/п	Название практических работ	Количество часов
1	Расчѐт количества выборок	2
2	Вычисление вероятности события	2
3	Решение задач на вычисление дисперсии и математического ожидания случайной величины	2
4	Построение полигона и гистограммы для заданной выборки	2
5	Построение эмпирической функции	2
6	Вычисление пределов функций	2
7	Вычисление производных	2
8	Исследование функции с помощью производной, построение графика	2
9	Вычисление неопределѐнных интегралов	2
10	Вычисление определѐнных интегралов	2

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Настоящие методические указания по учебной дисциплине ЕН.01 Математика для специальности 35.02.06 Технология производства и переработки сельскохозяйственной продукции составлены в соответствии с требованиями ФГОС.

Практические задания направлены на подтверждение теоретических знаний, формирование учебных, профессиональных и практических умений, они составляют важную часть теоретической и практической подготовки и направлены на достижение следующих умений и знаний, а также общих и профессиональных компетенций:
У1.Решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;

З1. Значение математики в профессиональной деятельности и при освоении ППССЗ;

З2.Основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности;

З3. Основные понятия и методы математического анализа, дискретной математики, теории вероятности и математической статистики;

З4.Основы интегрального и дифференциального исчисления.

ОК1.Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нестиза них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчинѐнных), результат выполнения заданий.

ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

ПК 1.1. Выбирать и реализовывать технологии производства продукции растениеводства.

ПК 1.2. Выбирать и реализовывать технологии первичной обработки продукции растениеводства.

ПК 1.3. Выбирать и использовать различные методы оценки и контроля качества и качества сельскохозяйственного сырья и продукции растениеводства.

ПК 2.1. Выбирать и реализовывать технологии производства продукции животноводства.

ПК 2.2. Выбирать и реализовывать технологии первичной обработки продукции животноводства.

ПК 2.3. Выбирать и реализовывать различные методы оценки и контроля количества и качества сельскохозяйственного сырья и продукции животноводства.

ПК 3.1. Выбирать и реализовывать технологии хранения в соответствии с качеством поступающей сельскохозяйственной продукции и сырья.

ПК 3.2. Контролировать состояние сельскохозяйственной продукции и сырья в период хранения.

ПК 3.3. Выбирать и реализовывать технологии переработки сельскохозяйственной продукции.

ПК 3.4. Выбирать и использовать различные методы оценки и контроля количества и качества сырья, материалов, сельскохозяйственной продукции на этапе переработки.

ПК 3.5. Выполнять предпродажную подготовку и реализацию сельскохозяйственной продукции.

ПК 4.1. Участвовать в планировании основных показателей сельскохозяйственного производства.

ПК4.2.Планировать выполнение работ исполнителями. ПК

4.3. Организовывать работу трудового коллектива.

ПК 4.4. Контролировать ход и оценивать результаты выполнения работ исполнителями.

ПК4.5.Вести утверждѐнную учѐтно-отчѐтную документацию.

Практические занятия по математике направлены на:

1. Выработку умений и приобретение практических навыков по всем темам курса;
2. Приобретение навыка пользования калькулятором;
3. развитие умения формулировать на математическом языке несложные прикладные задачи;
4. развитие самостоятельности у студентов;
5. определение уровня усвоения из ученного материала с целью контроля.

Для каждого практического занятия формулируются цели работы, перечислен тот минимум знаний и умений, который необходим для выполнения работы, порядок выполнения работы, контрольные вопросы.

На занятиях используется фронтальная форма обучения на этапе актуализации знаний и индивидуальная форма работы во время самостоятельной деятельности студентов.

На практическом занятии оформляется отчет в тетрадь:

1. дата;
2. номер и название практического занятия;
3. цель работы;
4. ход работы (формулировка задания, решение и ответ);
5. контрольные вопросы (формулировка вопросов и ответы на них).

Оценка за выполнение практического занятия выставляется в форме дифференцируемого зачета и учитывается как показатель текущей успеваемости студентов.

Каждая работа оценивается по пятибалльной системе:
Оценка «5», если работа выполнена на 90-100%
Оценка «4» выставляется, если работа выполнена на 70-89%
оценка «3» выставляется, если работа выполнена на 50-69%
Оценка «2» выставляется, если работа выполнена меньше, чем на 50%

ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ

Подготовка к практическим занятиям заключается в самостоятельном изучении теории по рекомендуемой литературе, предусмотренной рабочей программой.

Выполнение заданий производится индивидуально в часы, предусмотренные расписанием занятий в соответствии с методическими указаниями к практическим работам.

Отчѐт по практической работе каждый обучающийся выполняет индивидуально с учѐтом рекомендаций по оформлению.

Защита проводится путѐм выполнения индивидуального задания согласно варианту.

Практическая работа считается выполненной, если она соответствует критериям, указанным в пояснительной записке.

Отчѐты обучающихся о проделанной работе помогают им лучше усвоить объяснения преподавателя и способствуют более прочному закреплению теоретического курса.

Методические указания к практическим работам

Практическая работа №1

Тема: Расчѐт количества выборок.

Цель: отработка навыков решения комбинаторных задач

Время выполнения: 90 минут.

Ход работы:

1. Познакомиться стеоретическим материалом.
2. Сделать краткий конспект теоретического материала в рабочих тетрадях (основные понятия, определения, формулы, примеры).
3. В тетрадях для практических работ выполнить практическую работу.
4. Ответить письменно на контрольные вопросы.
5. Сдать преподавателю тетради для практических работ.

Теоретические сведения и методические рекомендации по решению задач

При решении ряда теоретических и практических задач требуется из конечного множества элементов по заданным правилам составлять различные комбинации и производить подсчет числа всех возможных таких комбинаций. Такие задачи принято называть *комбинаторными*, а раздел математики, занимающийся их решением, называется *комбинаторикой*.

Размещения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Пусть данном ножество,состоящее из n элементов. *Размещением* из n элементов по m элементов ($0 \le m \le n$) называется *упорядоченное* подмножество, содержащее *m различных* элементов данного множества.

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$$

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Из определения следует, что размещения из n элементов по m элементов– это все m – элементные подмножества, отличающиеся *составом элементов или порядком их следования*.

Пример 1. Сколькими способами можно составить дневное расписание из трех пар, если в группе изучают 12 различных предметов?

Решение.

Первой парой можно поставить любой из 12 различных предметов. Второй парой можно поставить любой из 11 оставшихся различных предметов. Значит, общее число способов, которыми можно составить первые две пары, равно 12·11. Для третьей пары остается 10 возможностей выбора предметов, так как две уже составлены. Поэтому для трех пар количество различных способов равно:

$$12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320.$$

Или с использованием формулы размещений (при составлении расписания важен порядок следования предметов):

$$A_{12}^3 = \frac{12!}{(12-3!)} = \frac{12!}{9!} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{1} = 1320.$$

Пример 2. В местком избрано 6 человек. Из них надо выбрать председателя и заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

Решение.

Задача сводится к нахождению числа размещений из шести элементов по два, так как здесь существенно и то, кто будет выбран в руководство месткома, и то, как распределяются обязанности между ними. Таким образом, искомое число равно

$$A_6^2=\frac{6!}{(6-2)!}=\frac{6!}{4!}=\frac{5\cdot6}{1}=30.$$

Пример 3. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 1,2, 3, 4, 5 при условии, что в каждом числе нет одинаковых цифр?

Решение.

Так как при составлении трехзначных чисел важен порядок следования элементов, то при решении задачи используется формула размещений.

$$A_5^3=\frac{5!}{(5-3)}=\frac{5!}{2!}=\frac{3\cdot4\cdot5}{1}=60.$$

Пример 4. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 0,1, 2, 3, 4, 5 при условии, что в каждом числе нет одинаковых цифр?

Решение.

Так как при составлении трехзначных чисел важен порядок следования элементов, то при решении задачи используется формула размещений трех элементов из шести. Но среди полученного числа трехзначных чисел будут и такие, у которых впереди стоит ноль, а эти числа являются двузначными, а не трехзначными. Поэтому из полученного числа чисел необходимо вычесть число двузначных чисел, составленных из пяти цифр: 1, 2, 3, 4, 5.

$$A_6^3-A_5^2=\frac{6!}{(6-3!)}-\frac{5!}{(5-2)!}=\frac{6!}{3!}-\frac{5!}{3!}=\frac{4\cdot5\cdot6}{1}-\frac{4\cdot5}{1}=120-20=100.$$

Перестановки

ОПРЕДЕЛЕНИЕ *Перестановкой* из n элементов называется *упорядоченное* множество, состоящее из n элементов, выбранных из данных n элементов.

$$\boxed{P_n = A_n^n = n!}$$

Перестановки из n элементов отличаются, таким образом, одна от другой лишь *порядком следования элементов*. Перестановки являются частным случаем размещений.

Пример 1. Сколько различных трехцветных флагов с тремя горизонтальными полосами можно получить, если использовать красный, синий, белый цвета?

Решение.

При составлении флагов возможны случаи:

красный, синий, белый;

красный, белый, синий;

синий,красный,белый;

синий,белый,красный;

белый,синий,красный;

белый,красный,синий.

Т.е. число всех возможных вариантов флагов равно шести.

Можно также использовать формулу числа перестановок из трех элементов, так как в этом случае из всего множества используются все элементы и при составлении флагов важен порядок следования полос.

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

Пример 2. Сколькими способами можно расставлять на одной полке шесть различных книг?

Решение.

Искомое число способов равно числу перестановок из шести элементов, так как из шести данных элементов используются все шесть и при составлении множеств из шести книг важен порядок следования этих книг.

$$P_6=6!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6=720.$$

Пример 3. Сколькими различными способами можно расставлять на одной полке восемь различных книг так, чтобы две определенные книги оказались рядом?

Решение.

Искомое число способов равно числу перестановок из семи элементов, так как две определенные книги должны стоять рядом и их можно принять за одну: P_7. Кроме того, эти две книги тоже можно переставлять. Число таких способов равно P_2. Каждой из перестановок P_2 соответствуют все перестановки P_7. Поэтому искомое число способов:

$$P_2\cdot P_7=2!\cdot 7!= 10080.$$

Пример 4. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, если каждая из цифр в записи числа встречается один раз?

Решение.

Рассматриваемое четырехзначное число может быть представлено как некоторая перестановка из цифр 0, 1, 2, 3, в которой первая цифра отлична от нуля. Так как число перестановок из четырех цифр равно $P_4=4!$ и из них $P_3=3!$ перестановок начинаются с нуля, то искомое количество равно

$$P_4-P_3=4!-3!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4-1\cdot 2\cdot 3=1\cdot 2\cdot 3\cdot(4-1)=18.$$

Сочетания

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Пусть дано множество, состоящее из n элементов. Сочетанием из n элементов по m элементов ($0\le m\le n$) называется любое подмножество, которое содержит m различных элементов данного множества.

$$\boxed{C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}.}$$

Из определения следует, что сочетания из n элементов по m элементов отличаются один от другого, *по крайней мере, одним элементом.*

Пример 1. Сколькими различными способами можно выбрать из 14 человек делегацию в составе 3 человек?

Решение.

Различными считаются те делегации, которые отличаются хотя бы одним членом. Поэтому

$$C_{14}^{3}=\frac{14!}{3!(14-3)!}=364.$$

Пример 2. В группе 20 юношей и 10 девушек. Сколькими способами можно избрать трех юношей и двух девушек для участия в слете студентов?

Решение. Так как порядок выбранных трех юношей из двадцатии двух девушек из десяти не имеет значения, то используются сочетания, причем каждому из сочетанийC_{20}^{3} соответствуют все сочетания C_{10}^{3}. Тогда искомое число способов равно

$$C_{20}^{3}\cdot C_{10}^{2}=\frac{20!}{3!(20-3!)}\cdot\frac{10!}{2!(10-2!)}=$$

$$=\frac{20!}{3!\cdot 17!}\cdot\frac{10!}{3!\cdot 8!}=\frac{18\cdot 19\cdot 20}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{9\cdot 10}{1\cdot 2}=3\cdot 19\cdot 20\cdot 5\cdot 9=51300.$$

Пример3. В урне 10 белых и 5 черных шаров. Сколькими способами из урны можно вынимать наугад 3 шаратак, чтобы два шара оказались белыми, а один черным?

Решение.

При выемке шаров без различен порядок их появления. Поэтому число способов равно числу сочетаний, причем каждому из сочетаний C_{10}^{2}

Соответствуют все сочетания C_{5}^{1}.Тогда искомое число способов равно

$$C_{10}^{2}\cdot C_{5}^{1}=\frac{10!}{2!(10-2)!}\cdot\frac{5!}{1!(5-1)!}=\frac{10!}{2!\cdot 8!}\cdot\frac{5!}{1!\cdot 4!}=225.$$

<u>Контрольные вопросы</u>

1. Чем отличаются сочетания от размещений?
2. Чем характеризуются перестановки?

Для отчѐта представить:

1. Решение индивидуального задания.
2. Письменные ответы на контрольные вопросы.

Практическаяработа№2

Тема: Вычисление вероятности событий.

Цель: решение задач на нахождение вероятности случайных событий с помощью классической формулы

Время выполнения: 90 минут.

Ход работы:

1. Познакомиться с теоретическим материалом.
2. Сделать краткий конспект теоретического материала в рабочих тетрадях (основные понятия, определения, формулы, примеры).
3. В тетрадях для практических работ выполнить практическую работу.
4. Ответить письменно на контрольные вопросы.
5. Сдать преподавателю тетради для практических работ.

Теоретические сведения и методические рекомендации по решению задач

Классическое определение вероятности:

Вероятностью события A называется отношение числа случаев, благоприятствующих ему, к общему числу случаев, т.е. $P(A)=\frac{m}{n}$,

где $P(A)$- вероятность события A,

m–число случаев, благоприятствующих событию A,

n– общее число случаев.

Свойства вероятности события

1. Вероятность достоверного события равна единице:
$$P(U)=1$$
2. Вероятность невозможного события равна нулю:
$$P(V)=0$$
3. Вероятность случайного события выражается положительным числом,

Меньшим единицы: $P(A)\le 1$

4. Вероятность любого события удовлетворяет неравенствам:

$$0\le P(A)\le 1$$

Пример 1. Какова вероятность того, что при однократном бросании правильной и однородной монеты выпадет герб?

Событие A– при бросании монеты выпал герб.

Имеем: число всех равновозможных элементарных исходов опыта, образующих полную группу, n=2,числоисходов,благоприятствующихсобытию A –m = 1. Поэтому

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{2}.$$

Пример 2. Какова вероятность того, что при однократном подбрасывании правильной и однородной игральной кости выпадет на верхней грани

а) пять очков;

б) четное число очков;

в) число очков, кратное трем?

а) Событие A– на верхней грани выпало пять очков.

Имеем: число всех равновозможных элементарных исходов опыта, образующих полную группу, n=6,числоисходов,благоприятствующихсобытию A –m = 1. Поэтому

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{6}.$$

б) Событие A – на верхней грани выпало четное число очков.

Имеем: число всех равно возможных элементарных исходов

опыта, образующих полную

группу,n=6,числоисходов,благоприятствующихсобытию A–m=3,таккакможетпоявитьсячислоочков:2, 4, 6.Поэтому

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

$\overline{n}$ $\overline{6}$ $\overline{2}$

в) Событие *A*– на верхней грани выпало число очков, кратное трем.

Имеем: число всех равновозможных элементарных исходов опыта, образующих полную группу, n=6,число исходов, благоприятствующих событию A –m = 2, так как может появиться число очков: 3, 6. Поэтому

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Пример 3. В урне 3 белых и 9 черных шаров. Из урны наугад вынимают один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется а) черным;

б) белым?

а) Событие A– вынутый шар оказался черным.

Имеем: число всех равновозможных элементарных исходов опыта, образующих полную группу, n=12,числоисходов,благоприятствующих событию A –m = 9. Поэтому

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}.$$

б) Событие A – вынутый шар оказался белым.

Имеем: число всех равно возможных элементарных исходов опыта, образующих полную группу, n=12,число исходов, благоприятствующих событию A –m = 3. Поэтому

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}.$$

Пример 4. Подбрасывают две игральные кости. Найти вероятность того, что на них в сумме выпадет 6 очков.

Событие A–при бросании двух игральных костей на них в сумме выпадет 6 очков.

При подбрасывании двух игральных костей общее число всех равновозможных элементарных исходов опыта равно числу пар

(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)	(1; 4)	(1; 5)	(1; 6)
(2; 1)	(2; 2)	(2; 3)	(2; 4)	(2; 5)	(2; 6)
(3; 1)	(3; 2)	(3; 3)	(3; 4)	(3; 5)	(3; 6)

(4; 1)	(4; 2)	(4; 3)	(4; 4)	(4; 5)	(4; 6)
(5; 1)	(5; 2)	(5; 3)	(5; 4)	(5; 5)	(5; 6)
(6; 1)	(6; 2)	(6; 3)	(6; 4)	(6; 5)	(6;6),т.е.*n*= 36.

Событию *A* благоприятствуют пять пар:

(1; 5) (2; 4) (3; 3) (4; 2) (5;1),т.е.*m*=5.

Следовательно, искомая вероятность

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{5}{36}\approx 0{,}139.$$

Пример 5. Подбрасываются три монеты. Найти вероятность того, что две из них упадут кверху гербом, а третья – цифрой?

Событие *A*–при бросании трех монет две из них упадут к верху гербом, а третья – цифрой

При подбрасывании трех монет общее число всех равно возможных элементарных исходов опыта равно числу пар:

(Г;Г;Г) (Г;Г;Ц) (Г;Ц;Ц) (Ц;Ц;Ц)

(Ц;Г;Г) (Ц;Ц;Г) (Г;Ц; Г) (Ц;Г;Ц),т.е.*n*=8.

Событию *A* благоприятствуют три пары:

(Г; Г; Ц) (Ц; Г; Г) (Г; Ц; Г), т.е. *m* = 3.

Следовательно, искомая вероятность:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{8}\approx 0{,}375.$$

Контрольные вопросы

1. Когда можно посчитать вероятность по классической формуле.
2. Приведите пример достоверного, невозможного, случайного события.

Для отчѐта представить:

1. Решение индивидуального задания.
2. Письменные ответы на контрольные вопросы.

Практическая работа №3

Тема: Решение задач на вычисление дисперсии и математического ожидания случайной величины

Цель: развитие практических навыков вычисления основных характеристик.

Время выполнения: 90 минут.

Ход работы:

1. Познакомиться с теоретическим материалом.
2. Сделать краткий конспект теоретического материала в рабочих тетрадях (основные понятия, определения, формулы, примеры).
3. В тетрадях для практических работ выполнить практическую работу.
4. Ответить письменно на контрольные вопросы.
5. Сдать преподавателю тетради для практических работ.

Теоретические сведения и методические рекомендации по решению задач

Определение. Закон распределения дискретной случайной величины – это связь между возможными значениями случайной величины и их вероятностями.

Для ДС В закон распределения записывают в виде таблицы.

Определение. Математическим ожиданием M(X) (средним значением) ДСВ X, заданной законом распределения, называется число, равное сумме произведений еѐ значений на соответствующие им вероятности: **M(X)=**$\boldsymbol{x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \cdots + x_n \cdot p_n}$**.**

Определение .Дисперсией D(X) случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения еѐ возможных значений от еѐ среднего значения.

Дисперсия находится по формуле**: D(X)=**$\boldsymbol{M(X^2) - (M(X))^2}$

Методические рекомендации

Решение типового примера

Пример. Случайная величина X задана законом распределения. Найти математическое ожидание, дисперсию и среде квадратическое отклонение:

X	3	5	7	11
p	0,14	0,20	0,49	0,17

Математическое ожидание M(X)вычисляем по формуле: M(X)=$x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \cdots + x_n \cdot p_n$.

Получаем: M(X)=3· 0,14 +5·0,2+ 7·0,49+ 11·0,17=6,72.

Для нахождения дисперсии воспользуемся формулами: D(X)=$M(X^2)-(M(X))^2$ и $M(X^2)=x_1^2\cdot p_1+x_2^2\cdot p_2+\cdots+x_n^2\cdot p_n$.

Получаем:$M(X^2)=3^2\cdot 0{,}14+5^2\cdot 0{,}2+7^2\cdot 0{,}49+11^2\cdot 0{,}17=50{,}84$.

$$D(X)=50{,}84-6{,}72^2=5{,}6816.$$

Среднеквадратическое отклонение$\sigma(X)$ находим по формуле:$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

Получаем: $\sigma(X)=\sqrt{5{,}6816}\approx 2{,}3836$.

Ответ: M(X)=6,72 D(X)=5,6816 $\sigma(X)\approx 2{,}3836$.

Контрольные вопросы

1. Какой смысл имеет математическое ожидание?
2. В чѐм разница между дисперсией и среднимквадратическим отклонением?

Для отчѐта представить:

1. Решение индивидуального задания.
2. Письменные ответы на контрольные вопросы.

Практическая работа №4

Тема: Построение полигона и гистограммы для заданной выборки

Цель: отработка практических навыков построения графического изображения результатов статистического исследования.

Время выполнения: 90 минут.

Ход работы:

1. Познакомиться с теоретическим материалом.
2. Сделать краткий конспект теоретического материала в рабочих тетрадях (основные понятия, определения, формулы, примеры).
3. В тетрадях для практических работ выполнить практическую работу.
4. Ответить письменно на контрольные вопросы.
5. Сдать преподавателю тетради для практических работ.

Теоретические сведения и методические рекомендации по решению задач

Существует три основных метода графического представления выборочных данных–гистограмма(столбчатая диаграмма),полигон частот и сглаженная кривая (огива).

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною Δ, а высоты равны отношению (плотность частоты).

Для построения гистограммы частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс, на расстоянии .

Площадь i-го частичного прямоугольника равна – сумме частот вариант i-го интервала; следовательно, площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, то есть объему выборки n.

Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длинноюΔ,а высоты равны отношению (плотность относительной частоты).

Для построения гистограммы относительных частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на расстоянии . Площадь i-го частичного прямоугольника равна – относительной частоте вариант, попавших в i-й интервал. Следовательно, площадь гистограммы относительных частот равна сумме всех относительных частот, то есть единице.

Полигоном частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки(x_1,n_1), (x_2, n_2), …, (xN, nN).

Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i, а на оси ординат–соответствующие им частоты n_i.Точки(x_i,n_i) соединяют отрезками прямых и получают полигон частот.

Полигоном относительных частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки (x_1, ω_1), (x_2, ω_2), …, (xN, ωN).

Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i, а на осиординатω_i.Точки(x_i,ω_i) соединяют отрезками прямых и получают полигон относительных частот.

Замечание. В случае интервального вариационного ряда под x_i понимается середина i-го частичного интервала.

Сглаженная кривая или *огива*. Иногда вместо гистограммы или полигона частот строят сглаженную кривую. Основное отличие в том, что она проводится по точкам таким образом, чтобы график не имел острых углов или зубцов. Для ее построения по вертикальной оси всегда откладываются значения от 0 до 100 (они соответствуют процентам). По горизонтальной оси откладываются границы интервалов группирования данных. После этого на координатной плоскости наносятся точки, первая координата которой соответствует середине интервала илизначениювариантыx_i,автораякоордината–накопленнойчастотепопадания, выраженной в процентах. Для окончательного построения нанесенные точки соединяются гладкой кривой.

В качестве исходных данных для построения огивы используется таблица, полученная после табулирования данных, но при этом второй столбец этой таблицы(частоты) мы должны преобразовать в накопленные частоты, а затем в проценты.

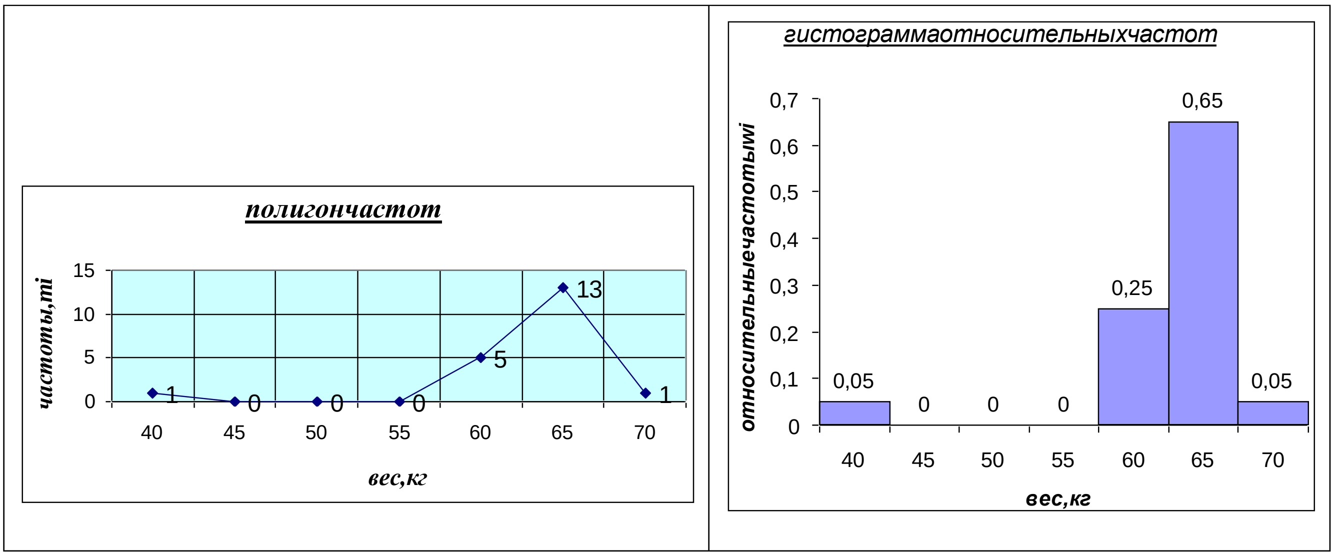


Рис.Примеры оформления графических данных.

Контрольные вопросы

1. Чем отличается полигон от гистограммы?
2. Как ещѐ можно представить результаты статистического исследования?

Для отчѐта представить:

1. Решение индивидуального задания.
2. Письменные ответы на контрольные вопросы.

Практическая работа №5

Тема :Построение эмпирической функции

Цель: развитие практических навыков построения графика эмпирической функции.

Время выполнения: 90 минут.

Ход работы:

1. Познакомиться с теоретическим материалом.
2. Сделать краткий конспект теоретического материала в рабочих тетрадях (основные понятия, определения, формулы, примеры).
3. В тетрадях для практических работ выполнить практическую работу.
4. Ответить письменно на контрольные вопросы.
5. Сдать преподавателю тетради для практических работ.

Теоретические сведения и методические рекомендации по решению задач

Пусть x_1,x_2,……..,x_n– возможные значения случайной величины X. Каждая случайная величина имеет функцию распределения F(x). Обычно она неизвестна. Задача заключается в том, чтобы оценить функцию распределения этой СВХ,т.е. можно найти эмпирическую функцию распределения.

Определение. ***Эмпирической функцией распределения*** (функцией распределения выборки) называют функцию F(x),которая определяет для каждого значения x относительную частоту события $X < x$.

Теоретическая функция распределения F(x) определяет вероятность события, а эмпирическая функция F(x) определяет относительную частоту этого же события.

Итак, если выборка задана вариационным рядом, то эмпирическая функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} x\le x_1 \\ \frac{n_1}{n} & \text{при} x_1<x\le x_2 \\ \frac{(n_1+n_2)}{n} & \text{при} x_2 <x\le x_3 \\ \frac{(n_1+n_2+n_3)}{n} & \text{при} x_3 <x\le x_4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \frac{(n_1+n_2+n_3+\cdots+n_{n-1})}{n} & \text{при} x_{n-1}<x\le x_n \\ 1 & \text{при} x>x_n \end{cases} \qquad (*)$$

График эмпирической функции называется ***кумулятой.*** Она носит характер ступенчатой ломаной.

Пример. Контролѐр ОТК анализировал отклонение длины деталей в миллиметрах от стандарта на основе выборки, состоящей из 50 деталей. По результатам выборки построить эмпирическую функцию распределения:

x_i	-2	0	1	3	5	8
n_i	8	5	11	16	4	6

Решение:

Объѐм выборки равен:n=8+5+11+16+4+6=50.Тогда вариационный ряд относительных частот имеет вид:

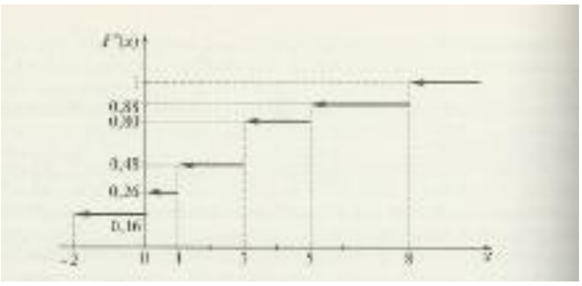
x_i	-2	0	1	3	5	8
$\frac{n_i}{n}$	0,16	0,10	0,22	0,32	0,08	0,12

В соответствии с формулой (*) построим эмпирическую функцию распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} x\leq -2 \\ 0{,}16 & \text{при} -2<x\leq 0 \\ 0{,}16+0{,}10=0{,}26 & \text{при} 0<x\leq 1 \\ 0{,}26+0{,}22=0{,}48 & \text{при} 1<x\leq 3 \\ 0{,}48+0{,}32=0{,}8 & \text{при} 3<x\leq 5 \\ 0{,}8+0{,}08=0{,}88 & \text{при} 5<x\leq 8 \\ 1 & \text{при} x>8 \end{cases}$$

$$\text{или } F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} x\leq -2 \\ 0{,}16 & \text{при} -2<x\leq 0 \\ 0{,}26 & \text{при} 0<x\leq 1 \\ 0{,}48 & \text{при} 1<x\leq 3 \\ 0{,}8 & \text{при} 3<x\leq 5 \\ 0{,}88 & \text{при} 5<x\leq 8 \\ 1 & \text{при} x>8 \end{cases}$$

Построим график эмпирической функции:



К умулята даѐт возможность понимать графически изображѐнную информацию, например, ответить на вопросы: «Определить число деталей, у которых отклонение от стандарта: а) менее 3 мм; б) не менее 3 мм».

Значение эмпирической функции распределения при x=3равно F(3)=0,80. Тогда число деталей, у которых отклонение от стандарта менее 3 мм, найдѐм как произведение n(x<3)=0,80·50 = 40 (дет.), а число деталей, у которых отклонение от стандарта не менее 3 мм, равно n(x≥3)=(1-0,80) · 50 = 10 (дет.)

Задание. Случайная величина задана законом распределения:

X	x_1	x_2	x_3	x_4
p	p_1	p_2	p_3	p_4

Найти функцию распределения F(x) и построить её график. Вычислить для X математическое ожидание M(X), дисперсию D(X), среднеквадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Пример.

X	3	5	7	11
p	0,14	0,20	0,49	0,17

Решение:Функциюраспределениянаходимпоформуле:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le x_1 \\ p_1, & x_1<x\le x_2 \\ p_1+p_2 & x_2<x\le x_3 \\ \dots\dots\dots\dots & \\ \sum_{i=1}^{n-1} p_i, & x_{n-1}<x\le x_n \\ 1, & x<x_n \end{cases}$$

Тогда:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<3, \\ 0{,}14 & 3<x\le 5, \\ 0{,}34 & 5<x\le 7, \\ 0{,}83 & 7<x\le 11, \\ 1, & x>11 \end{cases}$$

ПостроимграфикфункциираспределенияF(x)(см.рисунок).

Рис. График функции распределения.

Математическое ожидание M(X) вычисляем по формуле: M(X)=$\sum_{i=1}^{\infty} x_i{\cdot}p_i$.

Получаем: M(X)=$3\cdot 0{,}14 + 5\cdot 0{,}2 + 7\cdot 0{,}49 + 11\cdot 0{,}17 = 6{,}72$.

Для нахождения дисперсии воспользуемся формулами: D(X)=$M(X^2)-(M(X))^2$и $M(X^2)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2{\cdot}p_i$/

Получаем:$M(X^2)=3^2\cdot 0{,}14+ 5^2\cdot 0{,}2+7^2\cdot 0{,}49+11^2\cdot 0{,}17=50{,}84$.

$$D(X)=50{,}84 - 6{,}72^2=5{,}6816.$$

Среднеквадратическое отклонение$\sigma(X)$ находим по формуле: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Получаем: $\sigma(X) = \sqrt{5{,}6816} \approx 2{,}3836$.

$$\text{Ответ:}F(x)=\begin{cases}0, & x<3,\\ 0{,}14 & 3<x\le 5,\\ 0{,}34 & 5<x\le 7,\\ 0{,}83 & 7<x\le 11,\\ 1, & x>11\end{cases}\qquad M(X)=6{,}72 \qquad D(X)=5{,}6816 \qquad \sigma(X)\approx 2{,}3836.$$

Контрольные вопросы

1. Чем отличается эмпирическая функция от теоретической функции?
2. Для чего используют эмпирическую функцию на производстве?

Для отчѐта представить:

1. Решение индивидуального задания.
2. Письменные ответы на контрольные вопросы.

Практическая работа №6

Тема: Вычисление пределов функций.

Цель: отработка практических навыков вычисления пределов функций

Время выполнения: 90 минут.

Ход работы:

1. Познакомиться с теоретическим материалом.
2. Сделать краткий конспект теоретического материала в рабочих тетрадях (основные понятия, определения, формулы, примеры).
3. В тетрадях для практических работ выполнить практическую работу.
4. Ответить письменно на контрольные вопросы.
5. Сдать преподавателю тетради для практических работ.

Теоретические сведения и методические рекомендации по решению задач

Теоретическая часть.

Раскрытие неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$

Теоретическая часть:

Способы разложения на множители:

1) Вынесение общего множителя за скобку: $ax^2+bx=x(ax+b)$

2) Формулы сокращенного умножения:

- Разность квадратов $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
- $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$
- Сумма и разность кубов $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\pm ab+b^2)$

3) Разложение квадратного трехчлена на множители:

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1,x_2 корни квадратного уравнения

4) Способ группировки

- Образовать группы, между ними знак«+»,
- В каждой группе вынести общий множитель за скобки,
- Найти и вынести за скобки общий множитель обеих групп, в результате получим произведение множителей.

Разбор решения одного варианта:

1. $\lim\limits_{x\to 15}\dfrac{15x-x^2}{225-x^2}$;

2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2+2x-40}{8x-2x^2}$;

3. $\lim\limits_{x\to -11}\dfrac{x^3-121x}{x^2+22x+121}$;

4. $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{1000-x^3}{x^2-9x-10}$;

5. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-16x-x^2+16}{x^3-5x+4x^2}$;

Решение:

1) $\lim_{x\to 15}\frac{15x-x^2}{225-x^2}=$ подстановкапредельногозначенияx=15даетнеопределенностьвида $(\frac{0}{0})$.

Чтобы раскрытьэтунеопределенностьнадоразложитьчислительизнаменательнамножители. В числителе вынесем общий множитель «x» за скобку, в знаменателе заметим, что $225=15^2$иприменимформулуразностьквадратов

$$=\lim_{x\to 15}\frac{x(15-x)}{15^2-x^2}=\lim_{x\to 15}\frac{x(15-x)}{(15-x)(15+x)}=$$

сократимнамножитель,приводящийкнеопределенности,этох-15

$$\lim_{x\to 15}\frac{x}{15+x}=$$

подстановкапредельногозначенияx=15дает

$$=\frac{15}{15+15}=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}.$$

2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2+2x-40}{8x-2x^2}=(\frac{0}{0})=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2(x-)(x-)}{2x(4-x)}=$сократимна2:

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-)(x-)}{x(4-x)}=$$

решимквадратноеуравнение$2x^2+2x-40=0$

$D=4-4\cdot 2(-40)=4+320=324$, $\sqrt{D}=18$

$x_1=\frac{-2+18}{2\cdot 2}=\frac{16}{4}=4$, $x_2=\frac{-2-18}{2\cdot 2}=\frac{-20}{4}=-5$тогда

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+5)}{x(4-x)}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+5)}{-x(x-4)}=\lim_{x\to 4}\frac{x+5}{-x}=\frac{4+5}{-4}=-\frac{9}{4}.$$

3) $\lim\limits_{x\to-11} \dfrac{x^3-121x}{x^2+22x+121} = \left(\dfrac{0}{0}\right) =$

В числителе вынесем общий множитель «x»за скобки, причем заметим, что $121=11^2$,и применим формулу разность квадратов $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

А в знаменателе увидим формулу сокращенного умножения: квадрат первого, минус удвоенное произведение первого на второе, плюс квадрат второго

$$\lim_{x\to-11} \frac{x(x^2-121)}{x^2-2\cdot x\cdot 11+11^2} = \lim_{x\to-11} \frac{x(x-11)(x+11)}{(x-11)^2} =$$

Сократим на множитель(x-11)

$$=\lim_{x\to-11} \frac{x(x+11)}{x-11} =$$

Подставивпредельноезначениеx$=-11$,получим

$$=\frac{-11\cdot 0}{-22}=0$$

4) $\lim\limits_{x\to10} \dfrac{1000-x^3}{x^2-9x-10} = \left(\dfrac{0}{0}\right) =$

В числителе применим формулу разность кубов $a^3-b^3-(a-b)(a^2+ab+b^2)$, ав знаменателе разложим квадратный трехчлен на множители

$$=\lim_{x\to10} \frac{10^3-x^3}{(x-)(x-)} = \text{для этого найдем корни квадратного уравнения:}$$

$x^2-9x-10=0$

$D=81-4\cdot1\cdot(-10)=81+40=121$ $\sqrt{D}=11$

$x_1=\frac{9+11}{2}=\frac{20}{2}=\frac{10}{2}$; $x_2=\frac{9-11}{2}=\frac{-2}{2}=\frac{-1}{2}$,тогда

$$=\lim_{x\to10} \frac{(10-x)(10^2+10x+x^2)}{(x-10)(x+1)} = \lim_{x\to10} \frac{-(x-10)(100+10x+x^2)}{(x-10)(x+1)} =$$

сократимна$x-10$иподставим$x=10$,получим

$$=\lim_{x\to10} \frac{-(100+10x+x^2)}{(x+1)} = \frac{-(100+100+100)}{10+1} = \frac{-300}{11} = -27\frac{3}{11}.$$

5) $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{x^3-16x-x^2+16}{x^3-5x^2+4x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) =$

В числителе разложим на множители способом группировки

$(x^2-16x)+(-x^2+16)=x(x^2-16)-(x^2-16)=(x^2-16)(x-1)=$

$=(x^2-4^2)(x-1)=(x-4)(x+4)(x-1)$

А в знаменателе вынесем за скобки общий множитель «x»

$$=\lim_{x\to4} \frac{(x-4)(x+4)(x-1)}{x(x^2-5x+4)} =$$

А затем разложим квадратный трехчлен на множители:

$$\lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(x+4)(x-1)}{x(x-)(x-)} =$$

Для этого решим квадратное уравнение $x^2-5x+4=0$

$D=25-4\cdot 1\cdot 4=25-16=9$; $\sqrt{D}=3$

$x_{1,2}=\frac{5\pm 3}{2}$; $x_1=\frac{5+3}{2}=4$; $x_2=\frac{5-3}{2}=1$.

$$=\lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(x+4)(x-1)}{x(x-4)(x-1)} =$$

Сократим на$(x-4)(x-1)$иподставимx=4

$$=\lim_{x\to 4} \frac{x+4}{x} = \frac{8}{4}=2.$$

Раскрытие неопределенности вида$\left(\frac{0}{0}\right)$

Теоретическая часть:

Сопряженными называются множители $(a-b)$и $(a+b)$,причем их произведение дает формулу разность квадратов$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

Согласно свойств степени и корня: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$

Пример1:$(\sqrt{x+3}-\sqrt{7})(\sqrt{x+3}-\sqrt{7})=(\sqrt{x+3})^2-(\sqrt{7})^2=x+3-7=x-4$

Пример2:

$(\sqrt{x^2-4}-3x)(\sqrt{x^2-4}+3x)=(\sqrt{x^2-4})^2-(3x)^2=x^2-4-9x^2$

$=-8x^2-4$

Разбор решения одного варианта:

1. $\lim\limits_{x\to -2} \frac{\sqrt{x+9}-\sqrt{7}}{x+2}$; 2. $\lim\limits_{x\to 15} \frac{\sqrt{x+10}-5}{x-15}$; 3. $\lim\limits_{x\to 36} \frac{x^2-36x}{\sqrt{x-11}-5}$;	4. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{x^2-4}-\sqrt{3x}}{x-4}$; 5. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{\sqrt{3x+4}+x}{x+1}$;

1. $\lim\limits_{x\to -2} \frac{\sqrt{x+9}-\sqrt{7}}{x+2}$ подстановкапредельногозначения$x=-2$вчислитель

$\lim\limits_{x\to -2} \sqrt{x+9}-\sqrt{7}=0$,

Предел знаменателя дает

$\lim\limits_{x\to -2} x+2=0,$

То имеет место неопределенность вида$\left(\frac{0}{0}\right)$,которая вызвана присутствием корня. Раскроем Неопределенность умножением числителя и знаменателя на сопряженный множитель к числителю

$$=\lim_{x\to -2} \frac{\sqrt{x+9}-\sqrt{7}}{x+2}\cdot\frac{\sqrt{x+9}-\sqrt{7}}{\sqrt{x+9}-\sqrt{7}},$$

Применив в числителе формулу разность квадратов

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2,$ имеем:

$$\lim_{x\to -2}\frac{(\sqrt{x+9})^2-(\sqrt{7})^2}{(x+2)(\sqrt{x+9}+\sqrt{7})}=$$

При возведени и квадратного корня в квадраткорень исчезает

$$=\lim_{x\to -2}\frac{x+9-7}{(x+2)(\sqrt{x+9}+\sqrt{7})}=\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{(x+2)(\sqrt{x+9}+\sqrt{7})}=$$

Сократив на$(x+2)$- множитель, приводящий к неопределенностии подставив предельное значение $x=-2$, имеем

$$=\lim_{x\to -2}\frac{1}{\sqrt{x+9}+\sqrt{7}}=\frac{1}{\sqrt{-2+9}+\sqrt{7}}=\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{7}}=\frac{1}{2\sqrt{7}}.$$

2. $\lim\limits_{x\to 15}\frac{\sqrt{x+10}-5}{x-15}=$

подстановка$x=15$даетнеопределенностьвида $\left(\frac{0}{0}\right)$,вызванную присутствием корня, поэтому Умножаем на сопряженный множитель к числителю

$$=\lim_{x\to 15}\frac{\sqrt{x+10}-5}{x-15}\cdot\frac{\sqrt{x+10}+5}{\sqrt{x+10}+5},$$

Применив в числителе, формулу разность квадратов$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$$=\lim_{x\to 15}\frac{(\sqrt{x+10})^2-5^2}{(x-15)(\sqrt{x+10}+5)}=\lim_{x\to 15}\frac{x+10-25}{(x-15)(\sqrt{x+10}+5)}$$

Посчитав, в числителе подобные, имеем

$$=\lim_{x\to 15}\frac{x-15}{(x-15)(\sqrt{x+10}+5)}=$$

Сократим числитель и знаменатель на множитель x-15

$$=\lim_{x\to 15}\frac{1}{\sqrt{x+10}+5}=$$

Подставим предельное значение $x=15$,тогда

$= \frac{1}{\sqrt{25}+5} = \frac{1}{5+5} = \frac{1}{10}$.

3. $\lim\limits_{x\to 36} \frac{x^2-36x}{\sqrt{x-11}-5} =$

подстановка предельного значения $x=36$ дает неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, умножаем Числитель и знаменатель на сопряженный множитель к знаменателю

$$=\lim_{x\to 36} \frac{x^2-36x}{\sqrt{x-11}-5} \cdot \frac{\sqrt{x-11}+5}{\sqrt{x-11}+5} =$$

в знаменателе формула разность квадратов a^2-b^2

$$=\lim_{x\to 36} \frac{(x^2-36x)(\sqrt{x-11}+5)}{(\sqrt{x-11})^2-5^2} = \lim_{x\to 36} \frac{(x^2-36x)(\sqrt{x-11}+5)}{x-11-25} =$$

Вынесем в числителе общий множитель «х» за скобку, а в знаменателе вычислим

$$=\lim_{x\to 36} \frac{x(x-36)(\sqrt{x-11}+5)}{x-36} =$$

Сократим на $(x-36)$ и подставим предельное значение $x=36$, имеем

$$=\lim_{x\to 36} x(\sqrt{x-11}+5) = 36(\sqrt{36-11}+5) = 36(\sqrt{25}+5) = 36\cdot 10 = 360.$$

4. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{x^2-4}-\sqrt{3x}}{x-4} = \left(\frac{0}{0}\right) =$

Умножаем на сопряженный к числителю, а затем в числителе применяем формулу разность квадратов a^2-b^2:

$$=\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x^2-4}-\sqrt{3x}}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x^2-4}+\sqrt{3x}}{\sqrt{x^2-4}+\sqrt{3x}} = \lim_{x\to 4} \frac{\left(\sqrt{x^2-4}\right)^2-\left(\sqrt{3x}\right)^2}{(x-4)(\sqrt{x^2-4}+\sqrt{3x})} =$$

$$=\lim_{x\to 4} \frac{x^2-4-3x}{(x-4)(\sqrt{x^2-4}+\sqrt{3x})} = \lim_{x\to 4} \frac{x^2-3x-4}{(x-4)(\sqrt{x^2-4}+\sqrt{3x})} =$$

В числителе квадратный трехчлен, разложим на множители по формуле:

$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1, x_2 —корни квадратного уравнения $(x$

$$=\lim_{x\to 4} \frac{-\quad)(x-\quad)}{(x-4)(\sqrt{x^2-4}+\sqrt{3x})} =$$

Для этого найдем корни квадратного уравнения $x^2-3x-4=0$

$D=b^2-4ac=9-4\cdot 1\cdot(-4)=9+16=25, \sqrt{D}=5$

$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a} = \frac{3\pm 5}{2}$; $\quad x_1 = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4$; $\quad x_2 = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$, тогда

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+1)}{(x-4)(\sqrt{x^2-4}+\sqrt{3x})}=$$

Сократим на $(x-4)$ и подставим $x=4$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{x+1}{\sqrt{x^2-4}+\sqrt{3x}}=\frac{4+1}{\sqrt{4^2-4}+\sqrt{3\cdot 4}}=\frac{5}{\sqrt{12}+\sqrt{12}}=\frac{5}{2\sqrt{12}}=\frac{5}{2\sqrt{4\cdot 3}}=$$

$$=\frac{5}{2\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}}=\frac{5}{2\cdot 2\sqrt{3}}=\frac{5}{4\sqrt{3}}.$$

Вычисление предела при $x\to\infty$.

Теоретическая часть:

1. Предел бесконечно малой равен нулю.
2. Если предел величины равен нулю, то эта величина есть бесконечно малая.
3. Предел бесконечно большой величины равен бесконечности.
4. Если -величина бесконечно малая, то обратная ей величина $\frac{1}{x}$ Является бесконечно большой.
5. Если x- величина бесконечно большая, то обратная ей величина $\frac{1}{x}$ является бесконечно малой.
6. Предел числа есть само число.
7. Произведение постоянной величины на бесконечно малую есть величина бесконечно малая.

Разбор решения одного варианта:

1) $\lim_{x\to\infty} x^4-2x^3-1$

2) $\lim_{x\to\infty}\frac{1-7x}{3-5x}$

3) $\lim_{x\to\infty}\frac{4x-5}{6x^2-11}$

4) $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^6-5x^3-2}{7x^3-1}$

5) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-2x+8})$

1) $\lim_{x\to\infty} x^4-2x^3-1=$ первые два слагаемых при $x\to\infty$ пределов не имеют, поэтому имеет Место неопределенность $(\infty-\infty)$, чтобы её раскрыть, надо

Вынести за скобку большую степень переменной, входящей в пример:

$$=\lim_{x\to\infty}x^4\left(\frac{x^4}{x^4}-\frac{2x^3}{x^4}-\frac{1}{x^4}\right)=\lim_{x\to\infty}x^4\left(1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^4}\right)=\lim_{x\to\infty}x^4\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^4}\right)=$$

при $x\to\infty$, величины $\frac{2}{x}$, $\frac{1}{x^4}$ −бесконечно малые и их педелы равны нулю,

$=\infty\cdot(1-0-0)=\infty.$

2) $\lim_{x\to\infty}\frac{1-7x}{3-5x}=$

предел числителя и предел знаменателя есть величины бесконечно большие ⟹ имеет место неопределенность вида$(\frac{\infty}{\infty})$,раскроем её делением числителя и знаменателя на наибольшую Степень переменной т.е. на x и сократим, тогда

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{7x}{x}}{\frac{3}{x}-\frac{5x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-7}{\frac{3}{x}-x}=$$

помня, что при $x\to\infty$, $\frac{1}{x}\to0$, $\frac{3}{x}\to0$, имеем

$$=\frac{0-7}{0-5}=\frac{-7}{-5}=\frac{7}{5}.$$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x-5}{6x^2-11}=(\frac{\infty}{\infty})$

Делим каждое слагаемое на x^2исократим

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}{\frac{6x^2}{x^2}-\frac{11}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}}{6-\frac{4}{x^2}}=$$

так как при x→∞, $\frac{4}{x}\to0$, $\frac{5}{x^2}\to0$, $\frac{4}{x^2}\to0$ имеем:

$$=\frac{0-0}{6-0}=\frac{0}{6}=0.$$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^6-5x^3-2}{7x^3-1}=(\frac{\infty}{\infty})$

Делим числитель и знаменатель на старшую степень переменной, это x^6:

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{5}{x^3}-\frac{2}{x^6}}{\frac{7}{x^3}-\frac{1}{x^6}}=$$ при $x\to\infty$, $\frac{5}{x^3}\to0$, $\frac{2}{x^6}\to0$, $\frac{7}{x^3}\to0$, $\frac{1}{x^6}\to0$,

Тогда предел числителя равен 4, предел знаменателя равен 0, т.е. в знаменателе бесконечно малая величина ⟹ вся дробь есть величина бесконечно большая, т.е. = ∞.

$$=\left(\frac{4-0-0}{0-0}\right)=\left(\frac{4}{0}\right)=\infty.$$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-2x+8})=(\infty-\infty)=$

Умножим на сопряженный

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-2x+8})}{1}\cdot\frac{(\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-2x+8})}{(\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-2x+8})}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2-4x+3})^2-(\sqrt{x^2-2x+8})^2}{\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-2x+8}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+3-(x^2-2x+8)}{\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-2x+8}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+3-x^2+2x-8}{\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-2x+8}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x-5}{\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-2x+8}}=$$

при $x \to \infty$, имеем $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, раскроем путем деления на x, т.к. $\sqrt{x^2} = x$:

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{2x}{x} - \frac{5}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x} + \frac{\sqrt{x^2-2x+8}}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2-\frac{5}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4x}{x^2} + \frac{3}{x^2}} + \sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{8}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2-\frac{5}{x}}{\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}}} =$$ при $x \to \infty$, $\frac{4}{x} \to 0$, $\frac{3}{x^2} \to 0$, $\frac{2}{x} \to 0$, $\frac{8}{x^2} \to 0$,

тогда: $= \frac{-2-0}{\sqrt{1-0+0}+\sqrt{1-0+0}} = \frac{-2}{1+1} = -1.$

Контрольные вопросы

1. Что такое предел функции?
2. Как считать предел функции на бесконечности?

Для отчѐта представить:

1. Решение индивидуального задания.
2. Письменные ответы на контрольные вопросы.

Практическая работа №7

Тема: Вычисление производных функций.

Цель: совершенствовать умения вычислять производные элементарных функций, сложных функций.

Время выполнения: 90 минут.

Ход работы:

1. Познакомиться с теоретическим материалом.
2. Сделать краткий конспект теоретического материала в рабочих тетрадях (основные понятия, определения, формулы, примеры).
3. В тетрадях для практических работ выполнить практическую работу.
4. Ответить письменно на контрольные вопросы.
5. Сдать преподавателю тетради для практических работ.

Теоретические сведения и методические рекомендации по решению задач

Производной функции $y = f(x)$ ***в точке*** x_0 **называется предел отношения приращения функции** $\Delta f(x_0)$ **к приращению аргумента** Δx **при** $\Delta x \to 0$**,если этот предел существует, и обозначается**

$f'(x_0)$.

Основные правила дифференцирования функций

1. $(Cu)' = Cu'$;
2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
3. $(uv)' = u'v + uv'$;
4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$,

Где u и v – обозначают дифференцируемые функции независимой переменной x.

Таблица производных основных элементарных функций

1	$(c)' = 0, c = const$	9	$(\sin x)' = \cos x$
2	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	10	$(\cos x)' = -\sin x$
3	$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	11	$(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
4	$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	12	$(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
5	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	13	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
6	$(e^x)' = e^x$	14	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
7	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$	15	$(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
8	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	16	$(arcctg)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Производная сложной функции

$$y=f(u(x))\Rightarrow y'=f'(u)\cdot u'(x).$$

УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Пример№1. Найти производную функции $f(x)=2x^3-3x^4+19$.

Решение. $f'(x)=(2x^3-3x^4+19)'=(2x^3)'-(3x^4)'+(19)'=2(x^3)'-3(x^4)'+0=2\cdot 3x^2-3\cdot 4x^3=6x^2-12x^3$.

Пример №2. Найти производную функции $f(x)=x^5-x^4+9$ и вычислить ее значения в точках $x=0$ и $x=-1$

Решение. $f'(x)=(x^5-x^4+9)'=(x^5)'-(x^4)'+(9)'=5x^4-4x^3; f'(0)=5\cdot 0^4-4\cdot 0^3=0; f'(-1)=5\cdot(-1)^4-4\cdot(-1)^3=9$.

Пример№3. Найти производную функции $y=(x^2-1)(3x^2+5)$.

Решение. $y'=((x^2-1)(3x^2+5))'=(x^2-1)'(3x^2+5)+(x^2-1)(3x^2+5)'=2x(3x^2+5)+6x(x^2-1)=2x(3x^2+5+3x^2-3)=4x(3x^2+1)$.

Пример№4. Найти производную функции $y=\left(\frac{x^2-6}{3x+1}\right)$.

Решение. $y'=\left(\frac{x^2-6}{3x+1}\right)'=\frac{(x^2-6)'(3x+1)-(x^2-6)(3x+1)'}{(3x+1)^2}=\frac{2x(3x+1)-3(x^2-6)}{(3x+1)^2}=\frac{6x^2+2x-3x^2+18}{(3x+1)^2}=\frac{3x^2+2x+18}{(3x+1)^2}$.

Пример№5. Решите неравенство: $\frac{f'(x)}{g'(x)}\leq 0$, если $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x$, $g(x)=2x-1{,}5x^2$

.

РЕШЕНИЕ. Пользуясь правилами дифференцирования алгебраических функций и формулами дифференцирования элементарных функций, вычислим производные:

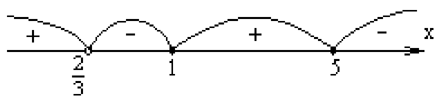
$$f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x\right)'=\frac{1}{3}(x^3)'-3(x^2)'+5(x)'=x^2-6x+5;$$

$$g'(x)=\left(2x-1{,}5x^2\right)'=2(x)'-1{,}5(x^2)'=2-3x.$$

Таким образом, нужно решить неравенство:

$$\frac{x^2-6x+5}{2-3x}\leq 0$$

Разложим числитель дроби на множители



$x^2-6x+5=0,\quad x_1=1,\quad x_2=5;\quad x^2-6x+5=(x-1)(x-5)$

методом интервалов.

Нули числителя: $x=1$, $x=5$. Нуль знаменателя: $x=\frac{2}{3}$.

Ответ: $\left(\frac{2}{3};1\right]\cup[5;+\infty)$.

Пример№6. Тело движется по прямой согласно закону $x(t)=t^3-2t+5$. Найдите скорость и ускорение точки в момент времени $t_0=4$.

РЕШЕНИЕ. Скорость движения – это производная от пути по времени, следовательно,

$$v(t)=x'(t)=\left(t^3-2t+5\right)'=3t^2-2.$$

Значит, в момент времени $t_0=4$ скорость данного движения такова: $v(4)=3\cdot4^2-2=46$.

Так как нам известна скорость движения как функция времени, мы можем найти ускорение этого движения: $a(t)=v'(t)=\left(3t^2-2\right)'=6t$. ускорение

Значит, в момент времени $t_0=4$ данного движения равно: $a(4)=6\cdot4=24$.

Отве т:46;24.

Пример№7. Заданы функции $f(x)=2+6x^3$, $g(x)=tgx$.Задайтеформулойсложную функциюh,если:а) $h(x)=g(f(x))$;б) $h(x)=f(g(x))$.

РЕШЕНИЕ. а) Функцию h можно представить в виде сложной функции $h(x)=g(f(x))$таким образом:

$$h(x)=g(f(x))=tg\left(2+6x^3\right).$$

б) Функцию h можно представить в виде сложной функции $h(x)=f(g(x))$таким образом:

$$h(x)=f(g(x))=2+6tg^3x.$$

Пример№8.Задайте формулами элементарные функции f и g,из которых Составлена сложная функция $h(x)=g(f(x))$:а) $h(x)=(4x-9)^7$;б) $\sqrt{tgx}$.

РЕШЕНИЕ. а) Функцию h можно представить в виде сложной функции $h(x)=g(f(x))$,где

$g(y)=y^7, y=f(x)=4x-9$.

б)Функцию h можно представить в виде сложной функции $h(x)=g(f(x))$,где $g(y)=\sqrt{y}, y=f(x)=tgx$.

Пример №9. Найдите производные сложных функций:а) $h(x)=\sqrt{9-x^2}$;б) $h(x)=\sin\left(3-\frac{x}{2}\right)$

РЕШЕНИЕ.а)Так как $h(x)=g(f(x))$,где $g(y)=\sqrt{y}, y=f(x)=9-x^2$,то $g'(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}$ и

$y'=f'(x)=-2x$,откуда $h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot y'=\frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$.

б)Так как $h(x)=g(f(x))$,где $g(y)=\sin y$, $y=f(x)=3-\frac{x}{2}$,то $g'(y)=\cos y$ и $y'=f'(x)=-\frac{1}{2}$,откуда $h'(x)=\cos y\cdot y'=\cos\left(3-\frac{x}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\cos\left(3-\frac{x}{2}\right)$

<u>Контрольные вопросы</u>

1. Что такое производная функции?
2. Какая функция называется сложной?
3. Как с помощью производной связаны путь и скорость?

Для отчёта представить:

1. Решение индивидуального задания.
2. Письменные ответы на контрольные вопросы.

Практическая работа №8

Тема :Исследование функций с помощью производной.

Цель: отработка практических навыков исследования функций с помощью производной

Время выполнения: 90 минут.

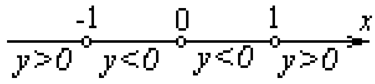
Ход работы:

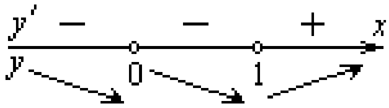
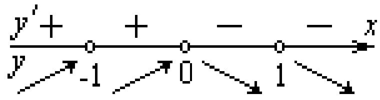
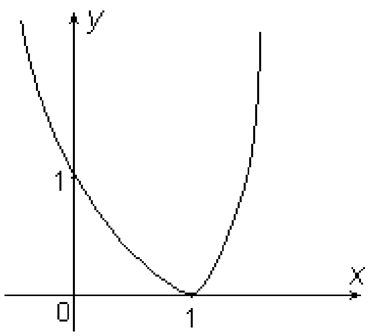
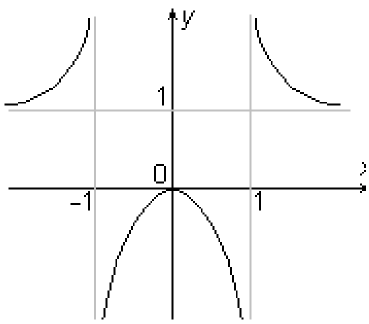
1. Познакомиться с теоретическим материалом.
2. Сделать краткий конспект теоретического материала в рабочих тетрадях (основные понятия, определения, формулы, примеры).
3. В тетрадях для практических работ выполнить практическую работу.
4. Ответить письменно на контрольные вопросы.
5. Сдать преподавателю тетради для практических работ.

Теоретические сведения и методические рекомендации по решению задач

*Задание.*Исследуйтеипостройтеграфикифункции:

а)$f(x)=3x^4-4x^3+1$;   б) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$.

№ шага	План исследования Функции	Применение плана а)$f(x)=3x^4-4x^3+1$	 б)$f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$
1	Находим область определенияфункции	$D(f)=R$	$x^2-1=0, x=\pm1$, $D(f)=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup$ $\cup(1;+\infty)$
2	Исследуем функцию на четность, нечетность	$f(-x)=3x^4+4x^3+1\neq\pm f(x)$ $\Rightarrow$функцияничетная,ни нечетная ( )	$f(-x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}=f(x)\Rightarrow$ функциячетная
3	Находим нули (корни) функции и промежутки еѐ знакопостоянства	$3x^4-4x^3+1=0, 3x^4-3x^3-$ $-(x^3-1)=0$, $(x-1)^2(3x^2+2x+1)=0$, $x-1=0, x=1$-нульфункции	$\dfrac{x^2}{x^2-1}=0$, 

4	Находим производную функции и её критические точки	$f'(x)=\left(3x^4-4x^3+1\right)'=12x^3-$ $-12x^2=12x^2(x-1)$, $f'(x)=0 \Rightarrow x=0;1$- критическиеточкифункции	$f'(x)=\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)'=$ $=\dfrac{2x\left(x^2-1\right)-2x^3}{\left(x^2-1\right)^2}=-\dfrac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}$ $f'(x)=0 \Rightarrow x=0$-критическая точка функции
5	Находимпромежутки монотонности,точки экстремума и экстремумыфункции	 $y'(-1)<0, y'(0,5)<0, y'(2)>0$ $x=0$–неявляетсяточкой экстремума, $x=1$ – точка минимума,$y_{min}=y(1)=0$	 $y'(-2)>0, y'(-0,5)>0$, $y'(0,5)<0, y'(2)<0$, $x=0$–точкамаксимума, $y_{max}=y(0)=0$
6	Находим предел функции при $x\to\pm\infty$	$\lim\limits_{\Delta x\to\pm\infty}\left(3x^4-4x^3+1\right)=\infty$	$\lim\limits_{\Delta x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{x^2-1}=1$
7	Строим эскиз графика функции		

Контрольные вопросы

1. Какую точку называют критической (стационарной) точкой функции?
2. Сформулируйте признак возрастания (убывания) функции.
3. Сформулируйте признак максимума (минимума) функции.

Для отчёта представить:

1. Решение индивидуального задания.
2. Письменные ответы на контрольные вопросы.

Практическая работа №9

Тема: Вычисление неопределѐнных интегралов.

Цель: отработка практических навыков вычисления интегралов

Время выполнения: 90 минут.

Ход работы:

1. Познакомиться с теоретическим материалом.
2. Сделать краткий конспект теоретического материала в рабочих тетрадях (основные понятия, определения, формулы, примеры).
3. В тетрадях для практических работ выполнить практическую работу.
4. Ответить письменно на контрольные вопросы.
5. Сдать преподавателю тетради для практических работ.

Теоретические сведения и методические рекомендации по решению задач

Определение. Дифференцируемая функция $F(x)$, определенная на некотором промежутке X, называется *первообразной* для функции $f(x)$, определенной на том же промежутке, если для всех x из этого промежутка

$F'(x)=f(x)$ или $dF(x)=f(x)dx$.

Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$, определенных на некотором промежутке X, называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ на этом

Промежутке и обозначается символом $\int f(x)dx$ $\int f(x)dx=F(x)+C$

Таблица основных неопределенных интегралов

	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C$		$\int ctgx\,dx=\ln\lvert\sin x\rvert+C$
	$\int \frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}+C$		$\int \frac{dx}{\cos^2 x}=tgx+C$
	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+C$		$\int \frac{dx}{\sin^2 x}=-ctgx+C$
	$\int \frac{dx}{x}=\ln\lvert x\rvert+C$		$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}\arcsin x+C\\ -\arccos x+C\end{cases}$

	$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$		$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$
	$\int e^x dx=e^x+C$		$\int \frac{dx}{1+x^2}=\begin{cases} arctgx+C \\ -arcctgx+C \end{cases}$
	$\int \sin xdx=-\cos x+C$		$\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$
	$\int \cos xdx=\sin x+C$		$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left\|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\|+C$
	$\int tgxdx=-\ln\|\cos x\|+C$		$\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\|+C$

Определение. Значение определенного интеграла на отрезке [a; b] от непрерывнойфункции$f(x)$равноприращениюлюбойизпервообразныхфункций $F(x)+C$ при изменении аргумента от $x=a$ до $x=b$.

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).}$$

гдеaиb–пределыинтегрирования; a–нижний, b–верхний;отрезок[a;b]– отрезок интегрирования.

Решениетиповыхпримеров:

Задание1.Вычислитьнеопределенныйинтеграл.

1. $\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+c$
2. $\int 5x^3dx=\frac{5x^4}{4}+c$
3. $\int\frac{dx}{x^2}=\int x^{-2}dx=\frac{-1}{x}+c$
4. $\int(x^4+5)dx=\int x^4dx+5\int dx=\frac{x^5}{5}+5x+c$
5. $\int(2\sin x+3\cos x)dx=-2\cos x+3\sin x+c$

Задание2.Вычислитьопределённыеинтегралы:

1. $\int_1^3(x^2-x+2)dx=\int_1^3x^2dx-\int_1^3xdx+\int_1^3 2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_1^3-\frac{x^2}{2}\Big|_1^3+2x\Big|_1^3=$
$(\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3})-(\frac{3^2}{2}-\frac{1^2}{2})+(2\cdot3-2\cdot1)=\frac{27}{3}-\frac{1}{3}-\frac{9}{2}+\frac{1}{2}+6-2=\frac{26}{3}-\frac{8}{2}+4=$
$\frac{26}{3}=8\frac{2}{3}$

2. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x\,dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1$

3. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = tg\frac{\pi}{3} - tg\frac{\pi}{6} = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Задание 3. Вычислите интеграл методом замены переменной (метод подстановки):

1. $\int (6x-4)^{10}dx = \left| \begin{array}{c} 6x-4=t \\ (6x-4)'dx=dt \\ 6dx=dt \\ dx=\frac{1}{6}dt \end{array} \right| = \int t^{10}\cdot\frac{1}{6}dt = \frac{1}{6}\int t^{10}dt = \frac{1}{6}\cdot\frac{t^{11}}{11} + C = \frac{t^{11}}{66} + C = \frac{(6x-4)^{11}}{66} + C$

2. $\int cos4xdx = \left| \begin{array}{c} 4x=t \\ (4x)'dx=dt \\ 4dx=dt \\ dx=\frac{1}{4}dt \end{array} \right| = \int cost\cdot\frac{1}{4}dt = \frac{1}{4}\int costdt = \frac{1}{4}sint + C = \frac{1}{4}sin4x + C$

<u>Контрольные вопросы</u>

1. Чем отличается неопределѐнный интеграл от определѐнного?
2. В чѐм заключается способ подстановки при интегрировании?

Для отчѐта представить:

1. Решение индивидуального задания.
2. Письменные ответы на контрольные вопросы.

Практическая работа №10

Тема: Вычисление неопределѐнных интегралов.

Цель: отработка практических навыков вычисления определѐнных интегралов

Время выполнения: 90 минут.

Ход работы:

1. Познакомиться с теоретическим материалом.
2. Сделать краткий конспект теоретического материала в рабочих тетрадях (основные понятия, определения, формулы, примеры).
3. В тетрадях для практических работ выполнить практическую работу.
4. Ответить письменно на контрольные вопросы.

5. Сдать преподавателю тетради для практических работ.

Теоретические сведения и методические рекомендации по решению задач

1. Определѐнный интеграл и его геометрический смысл.

Приращение F(b)– F(a)любой из первообразных функций

F(x)+Сприизмененииаргументаотх=адох=bназываетсяопределѐнным интегралом от a до b функции f (x) иобозначается:

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Числа a и b называются пределами интегрирования, a – нижним, b – верхним. Отрезок [a;b] называется отрезком интегрирования. Функцияf (x) называется подынтегральной функцией, а переменная x – переменной интегрирования.

Таким образом, по определению

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

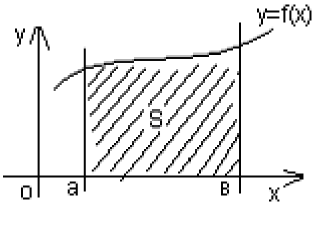
Данное равенство называется формулой Ньютона-Лейбница.

Геометрический смысл определенного интеграла:

Если интегрируемая на отрезке [a;b] функция f (x) неотрицательна, то определѐнный интеграл: $\int_a^b f(x)dx$

численно равен площади S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции f (x), осью абсцисс и прямыми x = a и x = b :

$$S = \int_a^b f(x)dx$$



2. Свойства определѐнного интеграла.

<u>1.</u> Постоянный множитель можно выносить за знаки нтеграла, т.е. если A=const. то

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx$$

2. Определѐнный интеграл от алгебраической суммы двух непрерывных функций равен алгебраической сумме их интегралов, т.е.

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

3. Еслиa<c<b,то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

4. Если функция f(x)неотрицательная наотрезке[a;b],гдеa<b,то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

5. Еслиf(x)≥g(x)для всехx€[a;b], гдеa<b, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

6. Если m и M–наименьшее и наибольшее значения функции f (x) на отрезке [a;b], где a<b, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

7. (Теорема о среднем).Если функция f (x) непрерывна на отрезке[a;b],то Существует точка $c \in [a;b]$ такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a)$$

Примеры по выполнению практической работы

Пример1:Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3dx}{\cos^2 x}$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3dx}{\cos^2 x} = 3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = 3tgx\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 3\left(tg\left(\frac{\pi}{4}\right) - tg0\right) = 3$$

Пример2: Вычислить $\int_0^{\pi}\left(2e^{2x}+3\cos x\right)dx$

$$\int_0^{\pi}\left(2e^{2x}+3\cos x\right)dx=2\int_0^{\pi}e^{2x}dx+3\int_0^{\pi}\cos x\,dx=\left(e^{2x}+3\sin x\right)\Big|_0^{\pi}=\left(e^{2\pi}+3\sin\pi\right)-\left(e^{0}+3\sin 0\right)=$$
$$=e^{2\pi}-1\approx 534{,}492$$

Пример3: Вычислить $\int_1^8\left(4x-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)\cdot\partial x$**:**

$$\int_1^8\left(4x-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)\cdot dx=4\int_1^8 x\,dx-\frac{1}{3}\int_1^8 x^{-2/3}dx=2x^2\Big|_1^8-\sqrt[3]{x}\Big|_1^8=2(8^2-1)-(\sqrt[3]{8}-1)=2\cdot 63-1=125$$

Пример4: Вычислить: $\int_0^3 2x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$:

$$\int_0^3 2x^2\sqrt{9-x^2}\,dx=18\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^2 t\sqrt{9-9\cos^2 t}\left(-3\sin t\,dt\right)=162\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\sin^2 t\,dt=\frac{81}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\sin t\cos t\right)^2dt=\frac{81}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\,dt=$$
$$=\frac{81}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4t}{2}\,dt=\frac{81}{4}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{81}{4}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\pi\right)=\frac{81}{8}\pi.$$

$$\int_0^1\left(e^x-1\right)^4e^x dx=\left|\begin{array}{l}e^x-1=t\\ d(e^x-1)=dt\\ e^x dx=dt\\ a'=e^0-1=0\\ b'=e^1-1=e-1\end{array}\right|=\int_0^{e-1}t^4dt=\frac{t^5}{5}\Big|_0^{e-1}=\frac{(e-1)^5}{5}-\frac{0^5}{5}=\frac{1}{5}(e-1)^5$$

<u>Контрольные вопросы</u>

1. В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?
2. Запишите формулу Ньютона-Лейбница
3. Какие основные свойства определенного интеграла вы знаете?
4. В чем заключается метод непосредственного интегрирования?
5. С каким способом интегрирования вы еще знакомы и в чем его суть?

Для отчѐта представить:

1. Решение индивидуального задания.
2. Письменные ответы на контрольные вопросы.

Список рекомендованной литературы.

Обязательные источники:

1. ГригорьевВ.П.Элементывысшейматематики(11-еизд.,перераб. и доп.) , М.: ООО «ОИЦ Академия», 2016.
2. Григорьев В.П. Сборник задач по высшей математике (6-е изд., стер.), М.: ООО «ОИЦ Академия», 2016.
3. Спирина М.С. Теория вероятностей и математическая статистика (7-е изд., стер.), М.: ООО «ОИЦ Академия», 2016.
4. СпиринаМ.С.Теориявероятностейиматематическаястатистика.Сборник задач. (2-е изд., стер.), М.: ООО «ОИЦ Академия», 2016.

Дополнительныеисточники:

1. АгаповГ.И.Задачникпотеориивероятностей.–М.:Высшаяшкола,1994.
2. Ершов И.И., Скороход А.В. Ядренко М.И. Элементы комбинаторики. – М.: Наука, 1977.
3. Математика :CD/-эл.ресурс. –М.:Высшаяшкола, 2005.
4. Н.В.БогомоловПрактическиезанятияпоматематике. –М.:Высшаяшкола, 2003.